Übungsblatt 13

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 12. Februar 2020

Aufgabe 54 ***mündlich***

Eine k**-Färbung** eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine Abbildung $c\colon V \to \{1, \ldots, k\}$. Ein Isomorphismus φ zwischen zwei gefärbten Graphen (G_1, c_1) und (G_2, c_2) darf einen Knoten u mit Farbe $c_1(u) = i$ nur auf Knoten v mit derselben Farbe $c_2(v) = i$ abbilden. Bezeichne COLGI das Graphenisomorphieproblem für gefärbte Graphen. Zeigen Sie:

(a) COLGI, DIRGI und GI sind logspace-äquivalent, d.h. es gilt COLGI $\equiv_m^{log}$ COLGI $\equiv_m^{log}$ GI.

(b) Das Graphenisomorphieproblem für Bäume liegt in P.

Aufgabe 55 Zeigen Sie: ***mündlich***

(a) Das Primzahlproblem liegt in $\oplus\mathsf{P}$. (*Hinweis:* Überlegen Sie, auf wie viele Arten sich eine quadratfreie Zahl n in zwei teilerfremde Faktoren zerlegen lässt.)

(b) $\mathsf{BPL} \subseteq \mathsf{PL} \subseteq \mathsf{P}$ und $\oplus\mathsf{L} \subseteq \mathsf{P}$. (*Bemerkung:* $\oplus\mathsf{L}$, BPL und PL sind definiert wie $\oplus\mathsf{P}$, BPP und PP, nur dass anstelle der polynomiellen Zeitschranke eine logarithmische Platzschranke auferlegt wird.)

Aufgabe 56 ***mündlich***

Für zwei gegebene Graphen $G_i = (V, E_i)$, $i = 1, 2$, bezeichne UGI das Problem, zu entscheiden, ob zwischen G_1 und G_2 genau ein Isomorphismus existiert. Zeigen Sie:

(a) $\overline{\text{GA}} \le_m$ UGI

(b) UGI $\in \mathsf{P}_{\|}^{\text{GA}[2]}$ (ob GI $\in \mathsf{P}^{\text{GA}}$ ist, ist nicht bekannt)

(c) GI $\in \mathsf{SCW}$ (d.h. GI hat selfcomputable witnesses)

(d) Für jedes Graphenpaar $(G_1, G_2) \in$ UGI lässt sich mit nichtadaptiven Orakelfragen an GA ein Isomorphismus in Polynomialzeit berechnen.

(e) GA $\le_d$ GI und GA $\le_d$ UGI

(f) GA $\le_m^P$ GI

Aufgabe 57 ***mündlich***

Ein **Turniergraph** ist ein gerichteter Graph $G = (V, E)$, so dass für alle Knoten $u \neq v$ genau eine der beiden Kanten (u, v) und (v, u) in E enthalten ist. Bezeichne TURNIER die Menge aller Turniergraphen und bezeichne DIRGI das Graphenisomorphieproblem für gerichtete Graphen. Zeigen Sie:

(a) Die Anzahl der Automorphismen eines Turniergraphen ist ungerade.

(b) Das Graphenisomorphieproblem für Turniergraphen TURNIER $\cap$ DIRGI liegt in $\oplus\mathsf{P}$.

Aufgabe 58 ***10 Punkte***

Sei GapP der Abschluss von $\#\mathsf{P}$ unter Subtraktion. Weiter sei SPP die Klasse aller Sprachen, deren charakteristische Funktion in GapP berechenbar ist, und für eine NTM N bezeichne $acc_N(x)$ ($rej_N(x)$) die Anzahl der akzeptierenden (verwerfenden) Berechnungen von $N(x)$. Zeigen Sie:

(a) Eine Funktion g liegt genau dann in GapP, wenn es eine NP-TM N mit $g(x) = acc_N(x) - rej_N(x)$ gibt.

(b) Eine Sprache A liegt genau dann in $\oplus\mathsf{P}$, wenn es eine Funktion $g \in \mathsf{GapP}$ gibt mit $A(x) \equiv_2 g(x)$.

(c) Eine Sprache A liegt genau dann in PP, wenn es eine Funktion $g \in \mathsf{GapP}$ gibt mit $x \in A \Leftrightarrow g(x) > 0$.

(d) GapP besitzt alle in der Vorlesung für $\#\mathsf{P}$ bewiesenen Abschlusseigenschaften (siehe Lemma 117).

(e) $\mathsf{SPP} = \{A \mid \mathsf{GapP}^A = \mathsf{GapP}\}$.