Übungsblatt 11

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 29. Januar 2020

Aufgabe 46 ***mündlich***

Eine Sprache $S \subseteq \Sigma^*$ heißt *sparse* (kurz $S \in \mathsf{SPARSE}$), falls für ein Polynom p und alle n gilt: $\|S \cap \Sigma^n\| \leq p(n)$. Sprachen $T \subseteq \{1\}^*$ heißen *tally* (kurz $T \in \mathsf{TALLY}$). Zeigen Sie:

$$\mathsf{P}/\text{poly} = \mathsf{P}(\mathsf{SPARSE}) = \mathsf{P}(\mathsf{TALLY}).$$

Aufgabe 47 Zeigen Sie: ***mündlich***

(a) USat ist in der Klasse $\mathsf{D}^p = \{A \setminus B \mid A, B \in \mathsf{NP}\}$ enthalten und hart für $\mathsf{UP} \cup \text{co-}\mathsf{NP}$.
(b) Für jedes Orakel A gilt $\# \cdot \mathsf{P}^A = \#\mathsf{P}^A$ und $\oplus \cdot \mathsf{P}^A = \oplus\mathsf{P}^A$.
(c) $\#\mathsf{P}^A = \#\mathsf{P} \Leftrightarrow A \in \mathsf{UP} \cap \text{co-}\mathsf{UP}$.
(d) $\exists^p \cdot \mathsf{L} = \mathsf{NL} \Leftrightarrow \mathsf{PH} = \mathsf{NL}$.

Aufgabe 48 ***mündlich***

Eine Funktion g heißt *parsimonious reduzierbar* auf eine Funktion h (kurz $g \leq_{par} h$), falls eine Funktion $f \in \mathsf{FL}$ existiert, so dass für alle x gilt: $g(x) = h(f(x))$.

(a) Zeigen Sie, dass folgende auf der Menge aller booleschen Formeln (mit Junktoren $\neg$, $\wedge$ und $\vee$) definierte Funktion vollständig für $\#\mathsf{P}$ unter parsimonious Reduktionen ist:

$$\#\text{Sat} : F(x_1, \cdots, x_n) \mapsto |\{a \in \{0,1\}^n \mid F(a) = 1\}|$$

(b) Folgern Sie, dass $\oplus$Sat vollständig für $\oplus\mathsf{P}$ ist.
(c) Zeigen Sie, dass Teil (a) für jede vollständige Basis von Junktoren (wie z. B. $\{\wedge, \neg\}$, $\{\overline{\wedge}\}$ (NAND), $\{\rightarrow, 0\}$ oder $\{\wedge, \oplus, 1\}$) gilt.

Aufgabe 49 Zeigen Sie: ***10 Punkte***

(a) Es gibt ein Orakel A mit $\mathsf{P}^A \neq \mathsf{NP}^A \neq \text{co-}\mathsf{NP}^A$.
(b) Es gibt ein Orakel B mit $\mathsf{L}^B \neq \mathsf{NL}^B \neq \text{co-}\mathsf{NL}^B$.
(c) Es gibt ein Orakel C mit $C \in \mathsf{L}^{det(C)} \setminus \mathsf{NL}^{strong(C)}$.
(d) Es gilt

$$\begin{aligned}\mathsf{L} = \mathsf{NL} &\Leftrightarrow \forall A : \mathsf{L}^{det(A)} = \mathsf{NL}^{det(A)} \\ &\Leftrightarrow \forall A : \mathsf{L}^{strong(A)} = \mathsf{NL}^{strong(A)}\end{aligned}$$