Übungsblatt 10

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 22. Januar 2020

Aufgabe 43 ***mündlich***

Eine NP-Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ hat *selfcomputable witnesses* ($A \in \mathsf{SCW}$), falls eine (k,p)-balancierte Sprache $B \in \mathsf{P}$, ein Alphabet Γ der Größe k und ein polynomiell zeitbeschränkter Orakeltransducer M existieren mit

- $A = \exists B$, d.h. $\forall x \in \Sigma^* : x \in A \Leftrightarrow \exists y \in \Gamma^{p(|x|)} : x\#y \in B$,
- für jede Eingabe $x \in A$ erzeugt M^A eine Ausgabe $M^A(x)$ der Länge $p(|x|)$ mit $x\#M^A(x) \in B$.

Wir sagen auch, M^A berechnet eine witness-Funktion für A (bzgl. B). Zeigen Sie:

(a) $\text{Sat} \in \mathsf{SCW}$.
(b) Jede NP-vollständige Sprache besitzt *selfcomputable witnesses*.
(c) Jede Sprache $A \in \mathsf{PSK} \cap \mathsf{SCW}$ hat eine witness-Funktion in PSK, d.h. es existieren ein Polynom p, eine p-balancierte Sprache $B \in \mathsf{P}$ und eine Folge c_n von booleschen Schaltkreisen polynomieller Größe mit $p(n)$ Ausgängen, so dass $A = \exists B$ ist und für alle n und alle $x \in A$ der Länge n gilt: $x\#c_n(bin(x)) \in B$.
(d) Für jede Sprache $A = \exists B \in \mathsf{PSK} \cap \mathsf{SCW}$ ist die Korrektheit eines Schaltkreises c für eine geg. Eingabelänge n in $\mathsf{co\text{-}NP}$ entscheidbar, d.h. $\{0^n\#bin(c) \mid \forall x \in A \cap \Sigma^n : x\#c(bin(x)) \in B\} \in \mathsf{co\text{-}NP}$.
(e) $\mathsf{NP}(\mathsf{NP}(\mathsf{PSK} \cap \mathsf{SCW})) = \mathsf{NP}(\mathsf{NP})$,
(f) Sat ist nicht in PSK enthalten, außer wenn PH auf Σ_2^p kollabiert.

Aufgabe 44 ***mündlich***

Eine ***Offline-Orakelturingmaschine*** (kurz ***Offline-OTM***) ist eine Offline-TM mit einem zusätzlichen write-only Orakelband. Der Platzverbrauch einer Offline-OTM M ist genauso definiert wie bei einer Offline-TM, wobei das Orakelband unberücksichtigt bleibt. Sei $L = L(M^A)$ die von einer $s(n)$-platzbeschränkten Offline-OTM M mit Orakel A erkannte Sprache.

- Wir sagen, M ***stellt ihre Fragen deterministisch*** und schreiben $L = L(M^{det(A)})$, wenn jede Teilrechnung von M beginnend mit der Ausgabe des jeweils ersten Zeichens auf dem Orakelband bis zum Übergang in den Fragezustand deterministisch ist.
- Falls M auch unter Berücksichtigung des Orakelbandes $s(n)$-platzbeschränkt ist, nennen wir M ***streng s(n)-platzbeschränkt*** und schreiben $L = L(M^{strong(A)})$.

Entsprechend erhalten wir die relativierten Klassen $\mathsf{DSPACE}^A(s(n))$, $\mathsf{DSPACE}^{det(A)}(s(n))$ und $\mathsf{DSPACE}^{strong(A)}(s(n))$, sowie $\mathsf{NSPACE}^A(s(n))$, $\mathsf{NSPACE}^{det(A)}(s(n))$ und $\mathsf{NSPACE}^{strong(A)}(s(n))$.
Zeigen Sie:

(a) $\mathsf{DSPACE}^{strong(A)}(s(n)) \subseteq \mathsf{DSPACE}^{det(A)}(s(n)) = \mathsf{DSPACE}^A(s(n))$.
(b) $\mathsf{NSPACE}^{strong(A)}(s(n)) \subseteq \mathsf{NSPACE}^{det(A)}(s(n)) \subseteq \mathsf{NSPACE}^A(s(n))$.
(c) Für jedes Orakel A gilt $\mathsf{L}^A \subseteq \mathsf{NL}^{det(A)} \subseteq \mathsf{P}^A$ und $\mathsf{NL}^A \subseteq \mathsf{NP}^A$.
(d) Es gibt ein Orakel A mit $\mathsf{NL}^A \not\subseteq \mathsf{P}^A$.
(e) Es gibt ein Orakel B mit $\mathsf{NL}^B \not\subseteq \mathsf{DSPACE}^B(\log^2(n))$.

Aufgabe 45 ***10 Punkte***

Für $L \subseteq \Sigma^*$ sei $perm(L) = \{y \in \Sigma^* \mid y \text{ ist Permutation eines } x \in L\}$. Zeigen Sie:

(a) Für jedes L existiert ein $T_L \in \mathsf{TALLY}$, sodass $perm(L) \leq_m^{log} T_L$.
(b) Ist P unter *perm* abgeschlossen, so gibt es für jedes $T \in \mathsf{TALLY} \cap \mathsf{NP}$ eine Sprache $B \in \mathsf{P}$, auf die T disjunktiv reduzierbar ist.
(c) P ist genau dann unter *perm* abgeschlossen, falls $\mathsf{E} = \mathsf{NE}$.

Hinweis: Nutzen Sie Aufgabe 16 und $\mathsf{NP} = \exists^p\mathsf{P}$.