Übungsblatt 7

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 18. Dezember 2019

Aufgabe 32 ***mündlich***

Zeigen Sie, dass QBF PSPACE-vollständig ist.

Aufgabe 33 Zeigen Sie: ***mündlich***

(a) Die Klassen RP, ZPP und BPP ändern sich nicht, wenn wir anstelle der Laufzeit die erwartete Laufzeit polynomiell beschränken.

(b) Nicht jede von einer PM in erwarteter Laufzeit $n^{\mathcal{O}(1)}$ akzeptierte Sprache liegt in PP.

Aufgabe 34 ***mündlich***

Zeigen Sie, dass eine Sprache L genau dann in ZPP liegt, wenn es eine PM M gibt, die niemals ? ausgibt, keinen Fehler macht (d.h. es gilt $\Pr[M(x) = \bar{L}(x)] = 0$ für alle x) und deren erwartete Laufzeit bei allen Eingaben polynomiell beschränkt ist. Finden Sie eine analoge Charakterisierung für $L \in \mathsf{RP}$.

Aufgabe 35 ***mündlich***

Für eine p-balancierte Sprache B sei

$$bias_B(x) = \Pr_{y \in_R \{0,1\}^{p(n)}}[x\#y \in B] - 1/2.$$

Weiter sei

$$\mathsf{BP}' \cdot \mathsf{C} = \{\exists^{\geq 1/2} B \mid B \in \mathsf{C} \text{ ist } p\text{-balanciert und } |bias_B(x)| = 1/n^{\mathcal{O}(1)}\}$$

und

$$\mathsf{R}' \cdot \mathsf{C} = \{\exists B \mid B \in \mathsf{C} \text{ ist } p\text{-balanciert und } \#B(x) \notin [1, 2^{p(n)}/n^{\mathcal{O}(1)})\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathsf{BP}' \cdot \mathsf{C} = \mathsf{BP} \cdot \mathsf{C}$ (bzw. $\mathsf{R}' \cdot \mathsf{C} = \mathsf{R} \cdot \mathsf{C}$) ist, falls C unter majority- (bzw. disjunktiven) Reduktionen abgeschlossen ist.

Aufgabe 36 Zeigen Sie: ***mündlich***

(a) Falls C unter majority-Reduktionen abgeschlossen ist, dann auch unter disjunktiven Reduktionen.

(b) Falls C unter disjunktiven Reduktionen abgeschlossen ist, dann ist $\mathsf{R} \cdot \mathsf{C}$ unter dem R-Operator abgeschlossen.

Aufgabe 37 ***10 Punkte***

(a) Sei E die Kantenrelation eines gerichteten Graphen G. Zeigen Sie, dass sich dann die reflexive transitive Hülle E^* von E durch $E^* = (E \cup Id)^{n-1}$ darstellen lässt.

(b) Reduzieren Sie Reach auf CirVal, indem Sie zu jedem gerichteten Graphen G mit n Knoten einen Schaltkreis c der Tiefe $\mathcal{O}(\log^2 n)$ ohne Eingänge konstruieren mit $c = 1$ gdw. $G \in$ Reach.

(c) Zeigen Sie, dass Sprachen in $\mathsf{NSPACE}(s(n))$, $s(n) \geq \log n$, Schaltkreise der Tiefe $\mathcal{O}(s(n)^2)$ und Größe $2^{\mathcal{O}(s(n))}$ haben.