Übungsblatt 4

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 20. November 2019

Aufgabe 17 — *mündlich*

Die Klasse der quantifizierten booleschen Formeln (Q-Formeln) ist induktiv wie folgt definiert:

(1) Jede boolesche Formel über den Junktoren $\neg$, $\vee$ und $\wedge$ ist eine Q-Formel.

(2) Ist G eine Q-Formel, so auch $\exists x G$ und $\forall x G$.

Sei F eine Q-Formel mit freien Variablen $x_1, \dots, x_n$ und sei $a = a_1 \dots a_n \in \{0,1\}^n$ eine Belegung. Der Wert von F unter a ist dann

- $F(a)$, falls F quantorenfrei ist,
- $G(a0) \vee G(a1)$, falls $F = \exists y\, G(x_1, \dots, x_n, y)$ ist, und
- $G(a0) \wedge G(a1)$, falls $F = \forall y\, G(x_1, \dots, x_n, y)$ ist.

Zeigen Sie, dass folgendes Entscheidungsproblem QBF (True Quantified Boolean Formulas) in PSPACE entscheidbar ist:

Gegeben: Eine Q-Formel F

Gefragt: Ist F unter allen Belegungen wahr?

Aufgabe 18 — *mündlich*

Seien Φ und Φ' zwei Komplexitätsmaße. Zeigen Sie, dass es dann eine rekursive Funktion r gibt, so dass für alle Turingmaschinen M und für fast alle x gilt: $\Phi(M,x) \le r(x, \Phi'(M,x))$.

Aufgabe 19 — *mündlich*

Seien $f, g, t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ echte Komplexitätsfunktionen mit $f(n), g(n), t(n) \ge n$. Für eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ mit $\# \notin \Sigma$ sei die Sprache A_t definiert durch

$$A_t = \{x\#^{t(|x|)-|x|} \mid x \in A\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $A \in \mathsf{DTIME}(\mathcal{O}(f(t(n)))) \Leftrightarrow A_t \in \mathsf{DTIME}(\mathcal{O}(f(n)))$.

(b) Die Inklusion $\mathsf{DTIME}(\mathcal{O}(f(n))) \subseteq \mathsf{DTIME}(\mathcal{O}(g(n)))$ impliziert $\mathsf{DTIME}(\mathcal{O}(f(t(n)))) \subseteq \mathsf{DTIME}(\mathcal{O}(g(t(n))))$.

(c) Die Inklusion $\mathsf{DTIME}(\mathcal{O}(n^k \log^a n)) \subseteq \mathsf{DTIME}(\mathcal{O}(n^k))$ impliziert im Fall $k \ge 1$ und $a > 0$ für alle $i, j \ge 1$ folgende Inklusionen:
   (1) $\mathsf{DTIME}(\mathcal{O}(2^n n^a)) \subseteq \mathsf{DTIME}(\mathcal{O}(2^n))$,
   (2) $\mathsf{DTIME}(\mathcal{O}(2^{2^n + jan})) \subseteq \mathsf{DTIME}(\mathcal{O}(2^{2^n+(j-1)an}))$,
   (3) $\mathsf{DTIME}(\mathcal{O}(2^{2^n + in})) \subseteq \mathsf{DTIME}(\mathcal{O}(2^{2^n}))$.

(d) $\mathsf{DTIME}(n^k) \subsetneq \mathsf{DTIME}(n^k \log^a n)$ für alle $k \ge 1$ und $a > 0$.

Aufgabe 20 — *mündlich*

Zeigen Sie, dass aus $\mathsf{E} = \mathsf{NE}$ folgt, dass $\mathsf{EXP} = \mathsf{NEXP}$ ist. (*Hinweis:* Benutzen Sie die Konstruktion aus Aufgabe 19, um eine beliebige Sprache $A \in \mathsf{NEXP}$ in eine geeignete Sprache $A_t \in \mathsf{NE}$ zu transformieren.)

Aufgabe 21 — *10 Punkte*

Zeigen Sie, dass die Komplexitätsklassen NP und E verschieden sind. Betrachten Sie hierzu die Sprache

$$K = \{\langle M, x, 1^t\rangle \mid \text{die DTM } M \text{ akzeptiert } x \in \{0,1\}^* \text{ in } \le 2^t \text{ Schritten}\}$$

und zeigen Sie:

(a) K ist E-vollständig.

(b) Eine Sprache ist genau dann E-hart, wenn sie EXP-hart ist.

(c) E ist nicht unter $\le_m^{log}$ abgeschlossen.