

Übungsblatt 3

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 13. November 2019

Aufgabe 11

mündlich

Zeigen Sie, dass die Funktionen

- (a) $n \mapsto k$,
- (b) $n \mapsto \lceil \log n \rceil$,
- (c) $n \mapsto \lceil \log n \rceil^k$,
- (d) $n \mapsto n \cdot \lceil \log n \rceil$,
- (e) $n \mapsto n^k + k$,
- (f) $n \mapsto 2^n$ und
- (g) $n \mapsto n! \cdot \lfloor \sqrt{n} \rfloor$

für jede Konstante $k \in \mathbb{N}$ echte Komplexitätsfunktionen sind.

Aufgabe 12

mündlich

Der **Kleene-Stern** einer Sprache L ist definiert durch

$$L^* = \{x_1 \dots x_k \mid k \geq 0 \text{ und } x_1, \dots, x_k \in L\}.$$

Zeigen Sie, dass die Komplexitätsklassen \mathbf{P} und \mathbf{NP} abgeschlossen sind unter Vereinigung, Schnitt und dem Kleene-Stern.

Aufgabe 13

mündlich

Zeigen Sie, dass $\mathbf{DSPACE}(\log \log n)$ nichtreguläre Sprachen enthält.

Hinweis: Betrachten Sie die Sprache

$$L = \{\text{bin}(1)\# \dots \#\text{bin}(n) \mid n \geq 1\},$$

wobei $\text{bin}(i)$ die Binärdarstellung der Zahl i (ohne führende Nullen) ist.

Bemerkung: Es lässt sich zeigen, dass $\mathbf{DSPACE}(o(\log \log n)) = \mathbf{REG}$ ist.

Aufgabe 14

mündlich

Zeigen Sie, dass eine Sprache L genau dann in $\mathbf{NTIME}(\mathcal{O}(t)) \cap \mathbf{co-NTIME}(\mathcal{O}(t))$ liegt, falls eine $\mathcal{O}(t(n))$ -zeitbeschränkte NTM M mit $L(M) = L$ existiert, die auf allen Eingaben strong ist.

Aufgabe 15 (Blum-Komplexität)

mündlich

Eine partielle Funktion Φ , die (geeignete Kodierungen von) TMs M und Eingaben x in die natürlichen Zahlen abbildet, heißt **Komplexitätsmaß**, falls sie folgende Axiome erfüllt:

Axiom 1: $\Phi(M, x)$ ist genau dann definiert, wenn $M(x)$ hält.

Axiom 2: Die Frage, ob $\Phi(M, x) = m$ gilt, ist entscheidbar.

Welche der folgenden Funktionen sind Komplexitätsmaße?

- (a) $\text{time}_M(x)$ und $\text{space}_M(x)$ für DTMs und NTMs.
- (b) $\text{ink}_M(x)$: Anzahl der Ersetzungen eines Symbols durch ein anderes Symbol.
- (c) $\text{carbon}_M(x)$: Anzahl der Ersetzungen eines Symbols durch das gleiche Symbol.

Dabei sollen $\text{ink}_M(x)$ und $\text{carbon}_M(x)$ (wie $\text{space}_M(x)$) nur dann definiert sein, wenn $M(x)$ nur Rechnungen endlicher Länge ausführt.

Aufgabe 16

10 Punkte

Zeigen Sie, dass aus $\mathbf{E} \neq \mathbf{NE}$ folgt, dass $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ ist (*downward separation*).

Hinweis: Betrachten Sie die „tally Version“ einer Sprache $A \subseteq \{0, 1\}^*$,

$$\text{tally}(A) = \{0^{\text{num}(1x)} \mid x \in A\},$$

wobei $\text{num}(1x)$ die durch die Binärzahl $1x$ repräsentierte natürliche Zahl ist, und zeigen Sie die Äquivalenzen

$$A \in \mathbf{E} \Leftrightarrow \text{tally}(A) \in \mathbf{P} \text{ bzw. } A \in \mathbf{NE} \Leftrightarrow \text{tally}(A) \in \mathbf{NP}.$$