

Übungsblatt 3

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 13. November 2019

Aufgabe 11

mündlich

Zeigen Sie, dass die Funktionen

- (a) $n \mapsto k$, (e) $n \mapsto n^k + k$,
(b) $n \mapsto \lceil \log n \rceil$, (f) $n \mapsto 2^n$ und
(c) $n \mapsto \lceil \log n \rceil^k$, (g) $n \mapsto n! \cdot \lfloor \sqrt{n} \rfloor$
(d) $n \mapsto n \cdot \lceil \log n \rceil$,

für jede Konstante $k \in \mathbb{N}$ echte Komplexitätsfunktionen sind.

Aufgabe 12

mündlich

Der **Kleene-Stern** einer Sprache L ist definiert durch

$$L^* = \{x_1 \dots x_k \mid k \geq 0 \text{ und } x_1, \dots, x_k \in L\}.$$

Zeigen Sie, dass die Komplexitätsklassen **P** und **NP** abgeschlossen sind unter Vereinigung, Schnitt und dem Kleene-Stern.

Aufgabe 13

mündlich

Zeigen Sie, dass **DSPACE**($\log \log n$) nichtreguläre Sprachen enthält.

Hinweis: Betrachten Sie die Sprache

$$L = \{\text{bin}(1)\# \cdots \#\text{bin}(n) \mid n \geq 1\},$$

wobei $\text{bin}(i)$ die Binärdarstellung der Zahl i (ohne führende Nullen) ist.

Bemerkung: Es lässt sich zeigen, dass **DSPACE**($o(\log \log n)$) = **REG** ist.

Aufgabe 14

mündlich

Zeigen Sie, dass eine Sprache L genau dann in **NTIME**($\mathcal{O}(t)$) \cap **co-NTIME**($\mathcal{O}(t)$) liegt, falls eine $\mathcal{O}(t(n))$ -zeitbeschränkte NTM M mit $L(M) = L$ existiert, die auf allen Eingaben strong ist.

Aufgabe 15 (Blum-Komplexität)

mündlich

Eine partielle Funktion Φ , die (geeignete Kodierungen von) TMs M und Eingaben x in die natürlichen Zahlen abbildet, heißt **Komplexitätsmaß**, falls sie folgende Axiome erfüllt:

Axiom 1: $\Phi(M, x)$ ist genau dann definiert, wenn $M(x)$ hält.

Axiom 2: Die Frage, ob $\Phi(M, x) = m$ gilt, ist entscheidbar.

Welche der folgenden Funktionen sind Komplexitätsmaße?

- (a) $\text{time}_M(x)$ und $\text{space}_M(x)$ für DTMAs und NTMs.
(b) $\text{ink}_M(x)$: Anzahl der Ersetzungen eines Symbols durch ein anderes Symbol.
(c) $\text{carbon}_M(x)$: Anzahl der Ersetzungen eines Symbols durch das *gleiche* Symbol.

Dabei sollen $\text{ink}_M(x)$ und $\text{carbon}_M(x)$ (wie $\text{space}_M(x)$) nur dann definiert sein, wenn $M(x)$ nur Rechnungen endlicher Länge ausführt.

Aufgabe 16

10 Punkte

Zeigen Sie, dass aus $\mathsf{E} \neq \mathsf{NE}$ folgt, dass $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$ ist (*downward separation*).

Hinweis: Betrachten Sie die „tally Version“ einer Sprache $A \subseteq \{0, 1\}^*$,

$$\text{tally}(A) = \{0^{\text{num}(1x)} \mid x \in A\},$$

wobei $\text{num}(1x)$ die durch die Binärzahl $1x$ repräsentierte natürliche Zahl ist, und zeigen Sie die Äquivalenzen

$$A \in \mathsf{E} \Leftrightarrow \text{tally}(A) \in \mathsf{P} \text{ bzw. } A \in \mathsf{NE} \Leftrightarrow \text{tally}(A) \in \mathsf{NP}.$$