Vorlesungsskript

Graphalgorithmen

Wintersemester 2018/19

Prof. Dr. Johannes Köbler
Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Komplexität und Kryptografie

30. November 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Graphentheoretische Grundlagen

Definition 1.1. *Ein* ***(ungerichteter) Graph*** *ist ein Paar* $G = (V, E)$*, wobei*

V *- eine endliche Menge von* ***Knoten/Ecken*** *und*

E *- die Menge der* ***Kanten*** *ist.*

Hierbei gilt

$$E \subseteq \binom{V}{2} = \Big\{\{u, v\} \subseteq V \mid u \neq v\Big\}.$$

Sei $v \in V$ *ein Knoten.*

a) Die ***Nachbarschaft*** *von* v *ist* $N_G(v) = \{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}$.

b) Der ***Grad*** *von* v *ist* $\deg_G(v) = |N_G(v)|$.

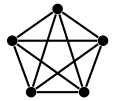
c) Der ***Minimalgrad*** *von* G *ist* $\delta(G) = \min_{v \in V} \deg_G(v)$ *und der* ***Maximalgrad*** *von* G *ist* $\Delta(G) = \max_{v \in V} \deg_G(v)$.

d) Jeder Knoten $u \in V$ *vom Grad* ≤ 1 *heißt* ***Blatt*** *und die übrigen Knoten (vom Grad* ≥ 2*) heißen* ***innere Knoten*** *von* G.

Falls G aus dem Kontext ersichtlich ist, schreiben wir auch einfach $N(v)$, $\deg(v)$, δ usw.

Beispiel 1.2.

- *Der* ***vollständige Graph*** (V, E) *auf* n *Knoten, d.h.* $|V| = n$ *und* $E = \binom{V}{2}$*, wird mit* K_n *und der* ***leere Graph*** $(V, \emptyset)$ *auf* n *Knoten wird mit* E_n *bezeichnet.*

K_1:  K_2: K_3:  K_4:  K_5: 

- *Der* ***vollständige bipartite Graph*** (A, B, E) *auf* $a + b$ *Knoten, d.h.* $A \cap B = \emptyset$*,* $|A| = a$*,* $|B| = b$ *und* $E = \{\{u, v\} \mid u \in A, v \in B\}$ *wird mit* $\boldsymbol{K_{a,b}}$ *bezeichnet.*

$K_{1,1}$: $K_{1,2}$:  $K_{2,2}$:  $K_{2,3}$:  $K_{3,3}$: 

- *Der* ***Pfad*** *mit* n *Knoten wird mit* P_n *bezeichnet.*

P_2: P_3: P_4: P_5:

- *Der* ***Kreis*** *mit* n *Knoten wird mit* C_n *bezeichnet.*

C_3:  C_4:  C_5:  C_6: 

Definition 1.3. *Sei* $G = (V, E)$ *ein Graph.*

a) Eine Knotenmenge $U \subseteq V$ *heißt* ***unabhängig*** *oder* ***stabil****, wenn es keine Kante von* G *mit beiden Endpunkten in* U *gibt, d.h. es gilt* $E \cap \binom{U}{2} = \emptyset$*. Die* ***Stabilitätszahl*** *ist*

$$\alpha(G) = \max\{|U| \mid U \text{ ist stabile Menge in } G\}.$$

b) Eine Knotenmenge $U \subseteq V$ *heißt* ***Clique****, wenn jede Kante mit beiden Endpunkten in* U *in* E *ist, d.h. es gilt* $\binom{U}{2} \subseteq E$*. Die* ***Cliquenzahl*** *ist*

$$\omega(G) = \max\{|U| \mid U \text{ ist Clique in } G\}.$$

c) Ein Graph $G' = (V', E')$ *heißt* ***Sub-/Teil-/Untergraph*** *von* G*, falls* $V' \subseteq V$ *und* $E' \subseteq E$ *ist. Im Fall* $V' = V$ *wird* G' *auch ein* ***(auf)spannender*** *Teilgraph von* G *genannt und wir schreiben für* G' *auch* $G - E''$ *(bzw.* $G = G' \cup E''$*), wobei* $E'' = E - E'$ *die Menge der aus* G *entfernten Kanten ist. Im Fall* $E'' = \{e\}$ *schreiben wir für* G' *auch einfach* $G - e$ *(bzw.* $G = G' \cup e$*).*

d) *Ein k-regulärer spannender Teilgraph von G wird auch als* ***k-Faktor*** *von G bezeichnet. Ein d-regulärer Graph G heißt* ***k-faktorisierbar****, wenn sich G in $l = d/k$ kantendisjunkte k-Faktoren $G_1, \ldots, G_l$ zerlegen lässt.*

e) *Ein Subgraph $G' = (V', E')$ heißt (****durch V'****) **induziert**, falls $E' = E \cap \binom{V'}{2}$ ist. Für G' schreiben wir dann auch $G[V']$ oder $G - V''$, wobei $V'' = V - V'$ die Menge der aus G entfernten Knoten ist. Ist $V'' = \{v\}$, so schreiben wir für G' auch einfach $G - v$ und im Fall $V' = \{v_1, \ldots, v_k\}$ auch $G[v_1, \ldots, v_k]$.*

f) *Ein* ***Weg*** *ist eine Folge von (nicht notwendig verschiedenen) Knoten $v_0, \ldots, v_\ell$ mit $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ für $i = 0, \ldots, \ell - 1$. Die* ***Länge*** *des Weges ist die Anzahl der durchlaufenen Kanten, also ℓ. Im Fall $\ell = 0$ heißt der Weg* ***trivial****. Ein Weg $(v_0, \ldots, v_\ell)$ heißt auch* ***v_0-v_ℓ-Weg****.*

g) *G heißt* ***zusammenhängend****, falls es für alle Paare $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ einen u-v-Weg gibt.*

h) *Die durch die Äquivalenzklassen $V_i \subseteq V$ der Relation*

$$Z = \{(u, v) \in V \times V \mid \text{ es gibt in } G \text{ einen } u\text{-}v\text{-Weg}\}$$

induzierten Teilgraphen $G[V_i]$ heißen ***Zusammenhangskomponenten*** *(engl.* connected components*) oder einfach* ***Komponenten*** *von G.*

i) *Ein u-v-Weg heißt* ***einfach*** *oder* ***u-v-Pfad****, falls alle durchlaufenen Knoten verschieden sind.*

j) *Ein* ***Zyklus*** *ist ein u-v-Weg mit $u = v$.*

k) *Eine Menge von Pfaden heißt* ***disjunkt****, wenn je zwei Pfade in der Menge keine gemeinsamen Knoten haben,* ***kantendisjunkt****, wenn je zwei Pfade in der Menge keine gemeinsamen Kanten haben, und* ***knotendisjunkt****, wenn je zwei Pfade in der Menge höchstens gemeinsame Endpunkte haben.*

l) *Ein* ***Kreis*** *ist ein Zyklus $(v_1 \ldots, v_\ell, v_1)$ der Länge $\ell \geq 3$, für den $v_1, \ldots, v_\ell$ paarweise verschieden sind.*

m) *Ein Graph heißt* ***kreisfrei****,* ***azyklisch*** *oder* ***Wald****, falls er keinen Kreis enthält. Ein* ***Baum*** *ist ein zusammenhängender Wald.*

Definition 1.4. *Ein* ***gerichteter Graph*** *oder* ***Digraph*** *ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei*

V - eine endliche Menge von ***Knoten/Ecken*** *und*

E - die Menge der ***Kanten*** *ist.*

Hierbei gilt

$$E \subseteq V \times V = \Big\{(u, v) \mid u, v \in V\Big\},$$

wobei E auch Schlingen (u, u) enthalten kann. Sei $v \in V$ ein Knoten.

a) *Die* ***Nachfolgermenge*** *von v ist $N^+(v) = \{u \in V \mid (v, u) \in E\}$.*

b) *Die* ***Vorgängermenge*** *von v ist $N^-(v) = \{u \in V \mid (u, v) \in E\}$.*

c) *Die* ***Nachbarmenge*** *von v ist $N(v) = N^+(v) \cup N^-(v)$.*

d) *Der* ***Ausgangsgrad*** *von v ist $\deg^+(v) = |N^+(v)|$ und der* ***Eingangsgrad*** *von v ist $\deg^-(v) = |N^-(v)|$. Der* ***Grad*** *von v ist $\deg(v) = \deg^+(v) + \deg^-(v)$.*

e) *Ein* ***(gerichteter) v_0-v_ℓ-Weg*** *ist eine Folge von Knoten $v_0, \ldots, v_\ell$ mit $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für $i = 0, \ldots, \ell - 1$.*

f) *Ein* ***(gerichteter) Zyklus*** *ist ein gerichteter u-v-Weg mit $u = v$.*

g) *Ein gerichteter Weg heißt* ***einfach*** *oder* ***(gerichteter) Pfad****, falls alle durchlaufenen Knoten verschieden sind.*

h) *Ein* ***(gerichteter) Kreis*** *in G ist ein gerichteter Zyklus $(v_1 \ldots, v_\ell, v_1)$ der Länge $\ell \geq 1$, für den $v_1, \ldots, v_\ell$ paarweise verschieden sind.*

i) *G heißt* ***kreisfrei*** *oder* ***azyklisch****, wenn es in G keinen gerichteten Kreis gibt.*

j) *G heißt* ***stark zusammenhängend****, wenn es in G für jedes Knotenpaar $u \neq v \in V$ sowohl einen u-v-Pfad als auch einen v-u-Pfad gibt.*

k) *G heißt* ***gerichteter Wald****, wenn G kreisfrei ist und jeder Knoten $v \in V$ Eingangsgrad $\deg^-(v) \leq 1$ hat.*

l) Ein Knoten $w \in V$ vom Eingangsgrad $\deg^-(w) = 0$ heißt ***Wurzel*** *von G, und ein Knoten $u \in V$ vom Ausgangsgrad $\deg^+(u) = 0$ heißt* ***Blatt*** *von G.*

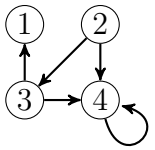
Die ***Adjazenzmatrix*** eines Graphen bzw. Digraphen $G = (V, E)$ mit (geordneter) Knotenmenge $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ist die $(n \times n)$-Matrix $A = (a_{ij})$ mit den Einträgen

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{bzw.} \qquad a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

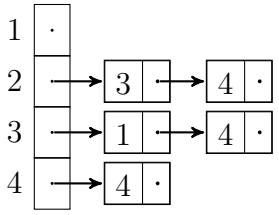
Für ungerichtete Graphen ist die Adjazenzmatrix symmetrisch mit $a_{ii} = 0$ für $i = 1, \ldots, n$.

Bei der ***Adjazenzlisten-Darstellung*** wird für jeden Knoten v_i eine Liste mit seinen Nachbarn verwaltet. Im gerichteten Fall verwaltet man entweder nur die Liste der Nachfolger oder zusätzlich eine weitere für die Vorgänger. Falls die Anzahl der Knoten statisch ist, organisiert man die Adjazenzlisten in einem Feld, d.h. das Feldelement mit Index i verweist auf die Adjazenzliste von Knoten v_i. Falls sich die Anzahl der Knoten dynamisch ändert, so werden die Adjazenzlisten typischerweise ebenfalls in einer doppelt verketteten Liste verwaltet.

Beispiel 1.5.
Betrachte den gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit $V = \{1, 2, 3, 4\}$ und $E = \{(2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4), (4, 4)\}$. Dieser hat folgende Adjazenzmatrix- und Adjazenzlisten-Darstellung:



	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	0	0	1	1
3	1	0	0	1
4	0	0	0	1



◁

2 Färben von Graphen

Definition 2.1. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und sei $k \in \mathbb{N}$.*

a) Eine Abbildung $f\colon V \to \mathbb{N}$ heißt ***Färbung*** *von G, wenn $f(u) \neq f(v)$ für alle $\{u, v\} \in E$ gilt.*

b) G heißt ***k-färbbar****, falls eine Färbung $f\colon V \to \{1, \ldots, k\}$ existiert.*

c) Die ***chromatische Zahl*** *ist*

$$\chi(G) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ ist } k\text{-färbbar}\}.$$

Beispiel 2.2.

$$\chi(E_n) = 1,\ \chi(K_{n,m}) = 2,\ \chi(K_n) = n,$$

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & n \text{ gerade} \\ 3, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ein wichtiges Entscheidungsproblem ist, ob ein gegebener Graph k-färbbar ist. Dieses Problem ist für jedes feste $k \geq 3$ schwierig.

k-Färbbarkeit (k-Coloring):
Gegeben: Ein Graph G.
Gefragt: Ist G k-färbbar?

Satz 2.3. *k-Coloring ist für $k \geq 3$ NP-vollständig.*

Das folgende Lemma setzt die chromatische Zahl $\chi(G)$ in Beziehung zur Stabilitätszahl $\alpha(G)$.

Lemma 2.4. $n/\alpha(G) \leq \chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$.

Beweis. Sei G ein Graph und sei c eine $\chi(G)$-Färbung von G. Da dann die Mengen $S_i = \{u \in V \mid c(u) = i\}$, $i = 1, \ldots, \chi(G)$, stabil sind, folgt $|S_i| \leq \alpha(G)$ und somit gilt

$$n \;=\; \sum_{i=1}^{\chi(G)} |S_i| \;\leq\; \chi(G)\alpha(G).$$

Für den Beweis von $\chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$ sei S eine stabile Menge in G mit $|S| = \alpha(G)$. Dann ist $G - S$ k-färbbar für ein $k \leq n - |S|$. Da wir alle Knoten in S mit der Farbe $k + 1$ färben können, folgt $\chi(G) \leq k + 1 \leq n - \alpha(G) + 1$. ■

Beide Abschätzungen sind scharf, können andererseits aber auch beliebig schlecht werden.

Lemma 2.5. $\binom{\chi(G)}{2} \leq m$ *und somit* $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$.

Beweis. Zwischen je zwei Farbklassen einer optimalen Färbung muss es mindestens eine Kante geben. ■

Die chromatische Zahl steht auch in Beziehung zur Cliquenzahl $\omega(G)$ und zum Maximalgrad $\Delta(G)$:

Lemma 2.6. $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Beweis. Die erste Ungleichung folgt daraus, dass die Knoten einer maximal großen Clique unterschiedliche Farben erhalten müssen.

Um die zweite Ungleichung zu erhalten, betrachten wir folgenden Färbungsalgorithmus:

Algorithmus `greedy-color`

```
1  input ein Graph G = (V, E) mit V = {v_1, ..., v_n}
2  c(v_1) := 1
3  for i := 2 to n do
4     F_i := {c(v_j) | j < i, v_j ∈ N(v_i)}
5     c(v_i) := min{k ≥ 1 | k ∉ F_i}
```


Da für die Farbe $c(v_i)$ von v_i nur $|F_i| \leq \Delta(G)$ Farben verboten sind, gilt $c(v_i) \leq \Delta(G) + 1$. ■

2.1 Färben von planaren Graphen

Ein Graph G heißt ***planar***, wenn er so in die Ebene einbettbar ist, dass sich zwei verschiedene Kanten höchstens in ihren Endpunkten berühren. Dabei werden die Knoten von G als Punkte und die Kanten von G als Verbindungslinien (genauer: Jordankurven) zwischen den zugehörigen Endpunkten dargestellt.

Bereits im 19. Jahrhundert wurde die Frage aufgeworfen, wie viele Farben höchstens benötigt werden, um eine Landkarte so zu färben, dass aneinander grenzende Länder unterschiedliche Farben erhalten. Offensichtlich lässt sich eine Landkarte in einen planaren Graphen transformieren, indem man für jedes Land einen Knoten zeichnet und benachbarte Länder durch eine Kante verbindet. Länder, die sich nur in einem Punkt berühren, gelten dabei nicht als benachbart.

Die Vermutung, dass 4 Farben ausreichen, wurde 1878 von Kempe „bewiesen“ und erst 1890 entdeckte Heawood einen Fehler in Kempes „Beweis“. Übrig blieb der *5-Farben-Satz*. Der *4-Farben-Satz* wurde erst 1976 von Appel und Haken bewiesen. Hierbei handelt es sich jedoch nicht um einen Beweis im klassischen Sinne, da zur Überprüfung der vielen auftretenden Spezialfälle Computer benötigt werden.

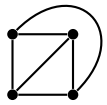
Satz 2.7 (Appel, Haken 1976)**.**
Jeder planare Graph ist 4-färbbar.

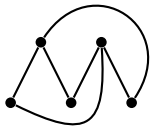
Aus dem Beweis des 4-Farben-Satzes von Appel und Haken lässt sich ein 4-Färbungsalgorithmus für planare Graphen mit einer Laufzeit von $\mathcal{O}(n^4)$ gewinnen.

In 1997 fanden Robertson, Sanders, Seymour und Thomas einen einfacheren Beweis für den 4-Farben-Satz, welcher zwar einen deut-

lich schnelleren $\mathcal{O}(n^2)$ Algorithmus liefert, aber ebenfalls nur mit Computer-Unterstützung verifizierbar ist.

Beispiel 2.8. *Wie die folgenden Einbettungen von K_4 und $K_{2,3}$ in die Ebene zeigen, sind K_4 und $K_{2,3}$ planar.*

K_4: 

$K_{2,3}$: 

◁

Zur Beantwortung der Frage, ob auch K_5 und $K_{3,3}$ planar sind, betrachten wir die ***Gebiete***, die bei der Einbettung von (zusammenhängenden) Graphen in die Ebene entstehen. Dabei gehören 2 Punkte zum selben Gebiet, falls es zwischen ihnen eine Verbindungslinie gibt, die keine Kante des eingebetten Graphen kreuzt oder berührt. Nur eines dieser Gebiete ist unbeschränkt und dieses wird als ***äußeres Gebiet*** bezeichnet. Die Anzahl der Gebiete von G bezeichnen wir mit $r(G)$ oder kurz mit r. Die begrenzenden Kanten eines Gebietes g bilden seinen ***Rand*** $rand(g)$. Ihre Anzahl bezeichnen wir mit $d(g)$, wobei Kanten $\{u, v\}$, an die g von beiden Seiten grenzt, doppelt gezählt werden.

Der ***Rand*** $rand(g)$ eines Gebiets g ist die (zirkuläre) Folge aller Kanten, die an g grenzen, wobei man jede Kante so durchläuft, dass g „in Fahrtrichtung links“ liegt bzw. jeden Knoten u, den man über eine Kante e erreicht, über die im Uhrzeigersinn nächste Kante e' wieder verlässt. Auf diese Weise erhält jede Kante auf dem Rand von g eine Richtung (oder Orientierung).

Da jede Kante zur Gesamtlänge $\sum_g d(g)$ aller Ränder den Wert 2 beiträgt (sie wird genau einmal in jeder Richtung durchlaufen), folgt

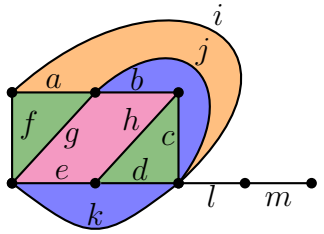
$$\sum_g d(g) = 2m(G).$$

Wir nennen das Tripel $G' = (V, E, R)$ eine ***ebene Realisierung*** des Graphen $G = (V, E)$, falls es eine Einbettung von G in die Ebene

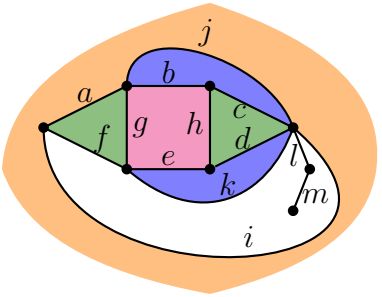
gibt, deren Gebiete die Ränder in R haben. In diesem Fall nennen wir $G' = (V, E, R)$ auch einen ***ebenen Graphen***. Ist G nicht zusammenhängend, so betten wir die Komponenten von G in die Ebene ein und fassen alle Ränder, die bei diesen Einbettungen entstehen, zu einer Randmenge R zusammen.

Führen zwei Einbettungen von G in die Ebene auf dieselbe Randmenge R, so werden sie als ***äquivalent*** angesehen. Eine andere Möglichkeit, Einbettungen bis auf Äquivalenz kombinatorisch zu beschreiben, besteht darin, für jeden Knoten u die (zirkuläre) Ordnung π_u aller mit u inzidenten Kanten anzugeben. Man nennt $\pi = \{\pi_u \mid u \in V\}$ ein ***Rotationssystem*** für G, falls es eine entsprechende Einbettung gibt. Rotationssysteme haben den Vorteil, dass sie bei Verwendung der Adjazenzlistendarstellung ohne zusätzlichen Platzaufwand gespeichert werden können, indem man die zu u adjazenten Knoten gemäß π_u anordnet.

Beispiel 2.9. *Die beiden nebenstehenden Einbettungen eines Graphen $G = (V, E)$ in die Ebene haben jeweils 7 Gebiete und führen beide auf den ebenen Graphen $G' = (V, E, R)$ mit den 7 Rändern*



$$R = \{(a, f, g), (a, j, i), (b, g, e, h), (b, c, j), (c, h, d), (d, e, k), (f, i, l, m, m, l, k)\}.$$



Das zugehörige Rotationssystem ist

$$\pi = \{(a, f, i), (a, j, b, g), (b, c, h), (e, k, f, g), (d, e, h), (c, j, i, l, k, d), (l, m), (m)\}.$$

Man beachte, dass sowohl in R als auch in π jede Kante genau zweimal vorkommt. Anstelle von (zirkulären) Kantenfolgen kann man die Elemente von R und π natürlich auch durch entsprechende Knotenfolgen beschreiben. ◁

Satz 2.10 (Polyederformel von Euler, 1750)**.**
Für einen zusammenhängenden ebenen Graphen $G = (V, E, R)$ gilt

$$n(G) - m(G) + r(G) = 2. \qquad (*)$$

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion über die Kantenzahl $m(G) = m$.

$m = 0$: Da G zusammenhängend ist, muss dann $n = 1$ sein.
Somit ist auch $r = 1$, also $(*)$ erfüllt.

$m - 1 \rightsquigarrow m$: Sei G ein zusammenhängender ebener Graph mit m Kanten.

Ist G ein Baum, so entfernen wir ein Blatt und erhalten einen zusammenhängenden ebenen Graphen G' mit $n' = n - 1$ Knoten, $m' = m - 1$ Kanten und $r' = r$ Gebieten. Nach IV folgt $n - m + r = (n - 1) - (m - 1) + r = n' - m' + r' = 2$.

Falls G kein Baum ist, entfernen wir eine Kante auf einem Kreis in G und erhalten einen zusammenhängenden ebenen Graphen G' mit $n' = n$ Knoten, $m' = m - 1$ Kanten und $r' = r - 1$ Gebieten. Nach IV folgt $n - m + r = n - (m - 1) + (r - 1) = n' - m' + r' = 2$. ■

Korollar 2.11. *Sei $G = (V, E)$ ein planarer Graph mit $n \geq 3$ Knoten. Dann ist $m \leq 3n - 6$. Falls G dreiecksfrei ist, gilt sogar $m \leq 2n - 4$.*

Beweis. O.B.d.A. sei G zusammenhängend. Wir betrachten eine beliebige planare Einbettung von G. Da $n \geq 3$ ist, ist jedes Gebiet g von $d(g) \geq 3$ Kanten umgeben. Daher ist $2m = i = \sum_g d(g) \geq 3r$ bzw. $r \leq 2m/3$. Eulers Formel liefert

$$m = n + r - 2 \leq n + 2m/3 - 2,$$

was $(1 - 2/3)m \leq n - 2$ und somit $m \leq 3n - 6$ impliziert.
Wenn G dreiecksfrei ist, ist jedes Gebiet von $d(g) \geq 4$ Kanten umgeben. Daher ist $2m = i = \sum_g d(g) \geq 4r$ bzw. $r \leq m/2$. Eulers Formel liefert daher $m = n + r - 2 \leq n + m/2 - 2$, was $m/2 \leq n - 2$ und somit $m \leq 2n - 4$ impliziert. ■

Korollar 2.12. *Die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ sind nicht planar.*

Beweis. Wegen $n(K_5) = 5$, also $3n(K_5) - 6 = 9$, und wegen $m(K_5) = \binom{5}{2} = 10$ gilt $m(K_5) \not\leq 3n(K_5) - 6$.
Wegen $n(K_{3,3}) = 6$, also $2n(K_{3,3}) - 4 = 8$, und wegen $m(K_{3,3}) = 3 \cdot 3 = 9$ gilt $m(K_{3,3}) \not\leq 2n(K_{3,3}) - 4$. ■

Als weitere interessante Folgerung aus der Polyederformel können wir zeigen, dass jeder planare Graph einen Knoten v vom Grad $\deg(v) \leq 5$ hat.

Korollar 2.13. *Jeder planare Graph hat einen Minimalgrad $\delta \leq 5$.*

Beweis. Für $n \leq 6$ ist die Behauptung klar. Für $n > 6$ impliziert die Annahme $\delta \geq 6$ die Ungleichung

$$m = \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{u \in V} \deg(u) \geq \tfrac{1}{2} \sum_{u \in V} 6 = 3n,$$

was im Widerspruch zu $m \leq 3n - 6$ steht. ■

Definition 2.14. *Seien $G = (V, E)$ und H Graphen und seien $u, v \in V$.*

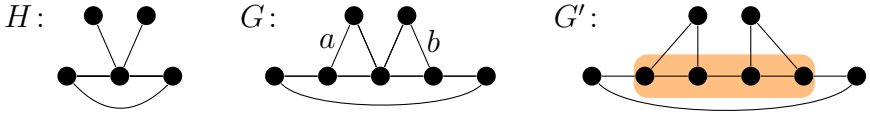
- *Durch **Fusion** von u und v entsteht aus G der Graph $G_{uv} = (V - \{v\}, E')$ mit*

$$E' = \{e \in E \mid v \notin e\} \cup \{\{u, v'\} \mid \{v, v'\} \in E - \{u, v\}\}.$$

*Ist $e = \{u, v\}$ eine Kante von G (also $e \in E$), so sagen wir auch, G_{uv} entsteht aus G durch **Kontraktion** der Kante e. Hat zudem v den Grad 2 mit $N_G(v) = \{u, w\}$, so sagen wir auch, G_{uv} entsteht aus G durch **Überbrückung** des Knotens v bzw. G aus G_{uv} durch **Unterteilung** der Kante $\{u, w\}$.*

- *G heißt zu H **kontrahierbar**, falls H aus einer isomorphen Kopie von G durch wiederholte Kontraktionen gewonnen werden kann.*
- *G heißt **Unterteilung** von H, falls G aus einer isomorphen Kopie von H durch wiederholte Unterteilungen gewonnen werden kann.*
- *H heißt **Minor** von G, wenn ein Teilgraph von G zu H kontrahierbar ist, und **topologischer Minor**, wenn ein Teilgraph von G eine Unterteilung von H ist.*
- *G heißt **H-frei**, falls H kein Minor von G ist. Für eine Menge $\mathcal{H}$ von Graphen heißt G **$\mathcal{H}$-frei**, falls G für alle $H \in \mathcal{H}$ H-frei ist.*

Beispiel 2.15. *Betrachte folgende Graphen:*



G ist keine Unterteilung von H, da G Knoten vom Grad 3 hat, aber H nicht. Entfernen wir jedoch die beiden Kanten a und b aus G, so ist der resultierende Teilgraph eine Unterteilung von H, d.h. H ist ein topologischer Minor von G. H ist aber kein topologischer Minor von G', da H einen Knoten vom Grad 4 hat und G' nur Knoten vom Grad ≤ 3. Da durch Kontraktion der drei umrandeten Kanten ein zu H isomorpher Graph entsteht, ist H aber ein Minor von G'. ◁

Es ist klar, dass die Klasse $\mathcal{K}$ der planaren Graphen zwar unter Unterteilung und (topologischer) Minorenbildung abgeschlossen ist (d.h. wenn $G \in \mathcal{K}$ und H ein Minor oder eine Unterteilung von G ist, dann folgt $H \in \mathcal{K}$), aber nicht unter Fusion.

Nach Definition lässt sich jeder (topologische) Minor H von G aus einem zu G isomorphen Graphen durch wiederholte Anwendung folgender Operationen gewinnen:

- Entfernen einer Kante oder eines Knotens,
- Kontraktion einer Kante (bzw. Überbrückung eines Knotens).

Da die Kontraktionen (bzw. Überbrückungen) o.B.d.A. auch zuletzt ausgeführt werden können, gilt hiervon auch die Umkehrung. Zudem ist leicht zu sehen, dass G und H genau dann (topologische) Minoren voneinander sind, wenn sie isomorph sind.

Satz 2.16 (Kempe 1878, Heawood 1890)**.**
Jeder planare Graph ist 5-färbbar.

Beweis. Wir beweisen den Satz durch Induktion über n.

$n = 1$: Klar.

$n - 1 \rightsquigarrow n$: Da G planar ist, existiert ein Knoten u mit $\deg(u) \leq 5$. Im Fall $\deg(u) \leq 4$ entfernen wir u aus G. Andernfalls hat u zwei Nachbarn v und w, die nicht durch eine Kante verbunden sind (andernfalls wäre K_5 ein Teilgraph von G). In diesem Fall entfernen wir alle mit u inzidenten Kanten außer $\{u, v\}$ und $\{u, w\}$ und kontrahieren diese beiden Kanten zum Knoten v.

In beiden Fällen ist der resultierende Graph G' ein Minor von G und daher planar. Da G' zudem höchstens $n - 1$ Knoten hat, existiert nach IV eine 5-Färbung c' für G'. Da wir im 2. Fall dem Knoten w die Farbe $c'(v)$ geben können, haben die Nachbarn von u höchstens 4 verschiedene Farben und wir können G 5-färben. ■

Kuratowski konnte 1930 beweisen, dass jeder nichtplanare Graph G den $K_{3,3}$ oder den K_5 als topologischen Minor enthält. Für den Beweis benötigen wir noch folgende Notationen.

Definition 2.17. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph.*

- *Eine Menge $S \subseteq V$ heißt **Separator** in G, wenn es zwei Knoten $u, v \in V \setminus S$ gibt, zwischen denen in $G - S$ kein u-v-Weg existiert. Ist $|S| = k$, so nennen wir S auch einen **k-Separator** zwischen u und v oder auch einen **u-v-Separator** der Größe k. Ein 1-Separator wird auch **Artikulation** oder **Schnittknoten** von G genannt.*
- *Ein Graph G heißt **k-zusammenhängend**, $0 \leq k \leq n - 1$, falls G keinen $(k-1)$-Separator hat. Die größte Zahl k, für die G k-*

zusammenhängend ist, heißt ***Zusammenhangszahl*** *von G und wird mit $\kappa(G)$ bezeichnet.*

Ein Graph G mit $n \geq 2$ Knoten ist also genau dann zusammenhängend, wenn $\kappa(G) \geq 1$ ist.

Lemma 2.18. *Ist ein Graph $G = (V, E)$ nicht planar, so hat er einen*

- *2-zusammenhängenden Untergraphen $U = (V', E')$ und einen*
- *3-zusammenhängenden topologischen Minor $M = (V'', E'')$,*

die ***minimal nicht planar*** *sind, d.h. U und M sind nicht planar und für alle $e' \in E'$ und $e'' \in E''$ sind die Graphen $U - e'$ und $M - e''$ planar.*

Beweis. Wir entfernen zuerst solange Kanten und Knoten aus G, bis wir aus dem verbliebenen Teilgraphen $U = (V', E')$ keine weiteren Kanten oder Knoten entfernen können, ohne dass U planar wird.

U ist zusammenhängend, da andernfalls mindestens eine Komponente von U nicht planar ist und wir alle übrigen Komponenten entfernen könnten, ohne dass U planar wird.

U ist sogar 2-zusammenhängend, da U sonst einen Schnittknoten s enthält und $U - s$ in $k \geq 2$ Komponenten $U[V_1], \ldots, U[V_k]$ zerfällt. Dann ist aber mindestens ein Teilgraph $T_i = U[V_i \cup \{s\}]$ nicht planar und wir können alle Knoten außerhalb von T_i entfernen, ohne dass U planar wird.

Um einen topologischen Minor M von G mit den behaupteten Eigenschaften zu erhalten, konstruieren wir zu U einen topologischen Minor U', der minimal nicht planar ist und zudem 3-zusammenhängend ist oder weniger Knoten als U hat. Indem wir diese Konstruktion wiederholen, erhalten wir schließlich M.

Falls U 3-zusammenhängend ist, ist $U' = U$. Andernfalls gibt es in U einen 2-Separator $S = \{u, v\}$, d.h. $U - S$ zerfällt in $k \geq 2$ Komponenten $U[V_1], \ldots, U[V_k]$. Betrachte die (2-zusammenhängenden) Graphen $G_i = U[V_i \cup \{u, v\}] \cup \{u, v\}$. Dann ist mindestens ein G_i nicht planar (z.B. G_1), da sonst auch U planar wäre. Da $k \geq 2$ ist, erhalten wir einen zu G_1 isomorphen Graphen U' als topologischen Minor von $H = U[V_1 \cup V_2 \cup \{u, v\}]$ (und damit von U), indem wir in $U[V_2 \cup \{u, v\}]$ einen beliebigen u-v-Pfad P wählen und aus H alle Knoten und Kanten entfernen, die nicht auf P liegen und danach P überbrücken. Dann hat U' weniger Knoten als U und ist wie U minimal nicht planar. ■

Definition 2.19. *Sei G ein Graph und sei K ein Kreis in G. Ein Teilgraph B von G heißt* ***Brücke*** *von K in G, falls*

- *B nur aus einer Kante besteht, die zwei Knoten von K verbindet, aber nicht auf K liegt (solche Brücken werden auch als* ***Sehnen*** *von K bezeichnet), oder*
- *$B - K$ eine Komponente von $G - K$ ist und B aus $B - K$ durch Hinzufügen aller Kanten zwischen $B - K$ und K (und der zugehörigen Endpunkte auf K) entsteht.*

Die Knoten von B, die auf K liegen, heißen ***Kontaktpunkte*** *von B. Zwei Brücken B und B' von K heißen* ***inkompatibel****, falls*

- *B Kontaktpunkte u, v und B' Kontaktpunkte u', v' hat, so dass diese vier Punkte in der Reihenfolge u, u', v, v' auf K liegen, oder*
- *B und B' mindestens 3 gemeinsame Kontaktpunkte haben.*

Es ist leicht zu sehen, dass in einem planaren Graphen kein Kreis mehr als zwei inkompatible Brücken haben kann.

Satz 2.20 (Kuratowski 1930)**.**
Für einen Graphen G sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) G ist planar.

(ii) G enthält weder den $K_{3,3}$ noch den K_5 als topologischen Minor.

Beweis. Die Implikation von *i*) nach *ii*) folgt aus der Abgeschlossenheit der planaren Graphen unter (topologischer) Minorenbildung.

Die Implikation von *ii)* nach *i)* zeigen wir durch Kontraposition. Sei also $G = (V, E)$ nicht planar. Dann hat G nach Lemma 2.18 einen 3-zusammenhängenden nicht planaren topologischen Minor $M = (V', E')$, so dass $M - e'$ für jede Kante $e' \in E'$ planar ist. Wir entfernen eine beliebige Kante $e_0 = \{a_0, b_0\}$ aus M. Dann ist $M - e_0$ planar. Da $M - e_0$ 2-zusammenhängend ist, gibt es in $M - e_0$ einen Kreis K durch die beiden Knoten a_0 und b_0 (siehe Übungen). Wir wählen K zusammen mit einer ebenen Realisierung H' von $M - e_0$ so, dass K möglichst viele Gebiete in H' einschließt.

Für zwei Knoten a, b auf K bezeichnen wir mit $K[a, b]$ die Menge aller Knoten, die auf dem Bogen von a nach b (im Uhrzeigersinn) auf K liegen. Zudem sei $K[a, b) = K[a, b] \setminus \{b\}$. Die Mengen $K(a, b)$ und $K(a, b]$ sind analog definiert.

Die Kanten jeder Brücke B von K in $M - e_0$ verlaufen in H' entweder alle innerhalb oder alle außerhalb von K. Im ersten Fall nennen wir B eine ***innere Brücke*** und im zweiten eine ***äußere Brücke***.

Es ist klar, dass K in H' mindestens eine innere und mindestens eine äußere Brücke haben muss. Zudem muss jede äußere Brücke B aus einer Kante $\{u, v\}$ bestehen, die zwei Knoten $u \in K(a_0, b_0)$ und $v \in K(b_0, a_0)$ verbindet. Andernfalls hätte B nämlich mindestens 2 Kontaktpunkte auf $K[a_0, b_0]$ oder auf $K[b_0, a_0]$. Daher könnte K zu einem Kreis K' erweitert werden, der in H' mehr Gebiete einschließt (bzw. ausschließt) als K, was der Wahl von K und H' widerspricht.

K hat in M außer den Brücken in $M - e_0$ noch zusätzlich die Brücke e_0. Wir wählen nun eine innere Brücke B, die sowohl zu e_0 als auch zu mindestens einer äußeren Brücke $e_1 = \{a_1, b_1\}$ inkompatibel ist. Eine solche Brücke muss es geben, da wir sonst alle mit e_0 inkompatiblen inneren Brücken nach außen klappen und e_0 als innere Brücke hinzunehmen könnten, ohne die Planarität zu verletzen.

Wir benutzen K und die drei Brücken e_0, e_1 und B, um eine Unterteilung des $K_{3,3}$ oder des K_5 in M zu finden. Hierzu geben wir entweder zwei disjunkte Mengen $A_1, A_2 \subseteq V'$ mit jeweils 3 Knoten an, so dass

9 knotendisjunkte Pfade zwischen allen Knoten $a \in A_1$ und $b \in A_2$ existieren. Oder wir geben eine Menge $A \subseteq V'$ mit fünf Knoten an, so dass 10 knotendisjunkte Pfade zwischen je zwei Knoten $a, b \in A$ existieren. Da e_0 und e_1 inkompatibel sind, können wir annehmen, dass die vier Knoten a_0, a_1, b_0, b_1 in dieser Reihenfolge auf K liegen.

Fall 1: B hat einen Kontaktpunkt $k_1 \notin \{a_0, a_1, b_0, b_1\}$. Aus Symmetriegründen können wir $k_1 \in K(a_0, a_1)$ annehmen. Da B weder zu e_0 noch zu e_1 kompatibel ist, hat B weitere Kontaktpunkte $k_2 \in K(b_0, a_0)$ und $k_3 \in K(a_1, b_1)$, wobei $k_2 = k_3$ sein kann.

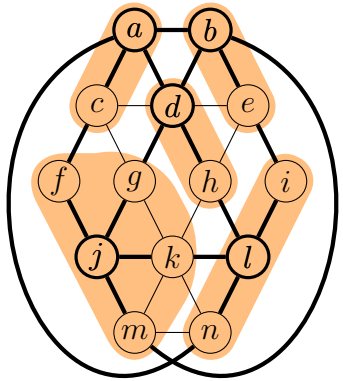
- **Fall 1a:** Ein Knoten $k_i \in \{k_2, k_3\}$ liegt auf dem Bogen $K(b_0, b_1)$. In diesem Fall existieren 9 knotendisjunkte Pfade zwischen $\{a_0, a_1, k_i\}$ und $\{b_0, b_1, k_1\}$.
- **Fall 1b:** $K(b_0, b_1) \cap \{k_2, k_3\} = \emptyset$. In diesem Fall ist $k_2 \in K[b_1, a_0)$ und $k_3 \in K(a_1, b_0]$. Dann gibt es in B einen Knoten u, von dem aus 3 knotendisjunkte Pfade zu $\{k_1, k_2, k_3\}$ existieren. Folglich gibt es 9 knotendisjunkte Pfade zwischen $\{a_0, a_1, u\}$ und $\{k_1, k_2, k_3\}$.

Fall 2: Alle Kontaktpunkte von B liegen in der Menge $\{a_0, a_1, b_0, b_1\}$. Da B inkompatibel zu e_0 und e_1 ist, müssen in diesem Fall alle vier Punkte zu B gehören. Sei P_0 ein a_0-b_0-Pfad in B und sei P_1 ein a_1-b_1-Pfad in B. Sei u der erste Knoten auf P_0, der auch auf P_1 liegt und sei v der letzte solche Knoten.

- **Fall 2a:** $u = v$. Dann gibt es in B vier knotendisjunkte Pfade von u zu $\{a_0, a_1, b_0, b_1\}$ und somit existieren in M 10 knotendisjunkte Pfade zwischen den Knoten u, a_0, a_1, b_0, b_1.
- **Fall 2b:** $u \neq v$. Durch u und v wird der Pfad P_1 in drei Teilpfade P_{xu}, P_{uv} und P_{vy} unterteilt, wobei die Indizes die Endpunkte bezeichnen und $\{x, y\} = \{a_1, b_1\}$ ist.

  Somit gibt es in B drei Pfade zwischen u und jedem Knoten in $\{a_0, v, x\}$ und zwei Pfade zwischen v und jedem Knoten in $\{b_0, y\}$, die alle 5 knotendisjunkt sind. Folglich gibt es in M 9 knotendisjunkte Pfade zwischen $\{a_0, v, x\}$ und $\{b_0, y, u\}$. ■

Beispiel 2.21. *Der nebenstehende Graph ist nicht planar, da wir den K_5 durch Kontraktion der farblich unterlegten Teilgraphen als Minor von G erhalten.*
Alternativ lässt sich der K_5 auch als ein topologischer Minor von G erhalten, indem wir die dünnen Kanten entfernen und in dem resultierenden Teilgraphen alle Knoten vom Grad 2 überbrücken. ◁



Eine unmittelbare Folgerung aus dem Satz von Kuratowski ist folgende Charakterisierung der Klasse der planaren Graphen.

Korollar 2.22 (Wagner 1937)**.** *Ein Graph ist genau dann planar, wenn er $\{K_{3,3}, K_5\}$-frei ist.*

Satz 2.23 (Satz von Robertson und Seymour, 1983-2004)**.** *Sei $\mathcal{K}$ eine Graphklasse, die unter Minorenbildung abgeschlossen ist. Dann gibt es eine endliche Menge $\mathcal{H}$ von Graphen mit*

$$\mathcal{K} = \{G \mid G \text{ ist } \mathcal{H}\text{-frei}\}.$$

Die Graphen in $\mathcal{H}$ sind bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt und heißen ***verbotene Minoren*** *für die Klasse $\mathcal{K}$.*

Eine interessante Folgerung aus diesem Satz ist, dass jede unendliche Graphklasse zwei Graphen G und H enthält, so dass H ein Minor von G ist. Das Problem, für zwei gegebene Graphen G und H zu entscheiden, ob H ein Minor von G ist, ist zwar NP-vollständig (da sich das Hamiltonkreisproblem darauf reduzieren lässt). Für einen festen Graphen H ist das Problem dagegen effizient entscheidbar.

Satz 2.24 (Robertson und Seymour, 1995)**.** *Für jeden Graphen H gibt es einen $O(n^3)$-zeitbeschränkten Algorithmus, der für einen gegebenen Graphen G entscheidet, ob er H-frei ist.*

Korollar 2.25. *Die Zugehörigkeit zu jeder unter Minorenbildung abgeschlossenen Graphklasse $\mathcal{K}$ ist in* P *entscheidbar.*

Der Entscheidungsalgorithmus für $\mathcal{K}$ lässt sich allerdings nur angeben, wenn wir die verbotenen Minoren für $\mathcal{K}$ kennen. Leider ist der Beweis von Theorem 2.23 in dieser Hinsicht nicht konstruktiv, so dass der Nachweis, dass $\mathcal{K}$ unter Minorenbildung abgeschlossen ist, nicht automatisch zu einem effizienten Erkennungsalgorithmus für $\mathcal{K}$ führt.

2.2 Färben von chordalen Graphen

Chordalen Graphen treten in vielen Anwendungen auf, z.B. sind alle Intervall- und alle Komparabilitätsgraphen (auch transitiv orientierbare Graphen genannt) chordal. Wir werden sehen, dass sich für chordale Graphen effizient eine optimale Knotenfärbung berechnen lässt.

Definition 2.26. *Ein Graph $G = (V, E)$ heißt* ***chordal*** *oder* ***triangguliert****, wenn jeder Kreis $K = (u_1, \ldots, u_l, u_1)$ der Länge $l \geq 4$ in G mindestens eine Sehne hat.*

G ist also genau dann chordal, wenn er keinen induzierten Kreis der Länge $l \geq 4$ enthält (ein induzierter Kreis ist ein induzierter Teilgraph $G[V']$, $V' \subseteq V$, der ein Kreis ist). Dies zeigt, dass die Klasse der chordalen Graphen unter induzierter Teilgraphbildung abgeschlossen ist (aber nicht unter Teilgraphbildung). Jede solche Graphklasse $\mathcal{G}$ ist durch eine Familie von minimalen ***verbotenen induzierten Teilgraphen*** H_i charakterisiert, die bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt sind. Die Graphen H_i gehören also nicht zu $\mathcal{G}$, aber sobald wir einen Knoten daraus entfernen, erhalten wir einen Graphen in $\mathcal{G}$. Die Klasse der chordalen Graphen hat die Familie der Kreise C_n der Länge $n \geq 4$ als verbotene induzierte Teilgraphen.

Lemma 2.27. *Für einen Graphen G sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) G ist chordal.

(ii) Jeder inklusionsminimale x-y-Separator S in G ist eine Clique.

(iii) Jedes Paar von nicht adjazenten Knoten x und y in G hat einen x-y-Separator S, der eine Clique ist.

Beweis. Um zu zeigen, dass die zweite Aussage aus der ersten folgt, nehmen wir an, dass G einen minimalen x-y-Separator S hat (d.h. $S \setminus \{s\}$ ist für jedes $s \in S$ kein x-y-Separator), der zwei nicht adjazente Knoten u und v enthält. Seien $G[V_1]$ und $G[V_2]$ die beiden Komponenten in $G - S$ mit $x \in V_1$ und $y \in V_2$. Da S minimal ist, haben die beiden Knoten u und v sowohl einen Nachbarn in V_1 als auch in V_2. Betrachte die beiden Teilgraphen $G_i = G[V_i \cup \{u, v\}]$ $(i = 1, 2)$ und wähle jeweils einen kürzesten u-v-Pfad P_i in G_i. Da deren Länge ≥ 2 ist, ist $K = P_1 \cup P_2$ ein Kreis der Länge ≥ 4. Aufgrund der Konstruktion ist zudem klar, dass K keine Sehnen in G hat.

Dass die zweite Aussage die dritte impliziert, ist klar, da jedes Paar von nicht adjazenten Knoten x und y einen x-y-Separator S hat, und S eine Clique sein muss, wenn wir S inklusionsminimal wählen.

Um zu zeigen, dass die erste Aussage aus der dritten folgt, nehmen wir an, dass G nicht chordal ist. Dann gibt es in G einen induzierten Kreis K der Länge ≥ 4. Seien x und y zwei beliebige nicht adjazente Knoten auf K und sei S ein x-y-Separator in G. Dann muss S mindestens zwei nicht adjazente Knoten aus K enthalten. ■

Definition 2.28. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und sei $k \geq 0$. Ein Knoten $u \in V$ vom Grad k heißt **k-simplizial**, wenn alle Nachbarn von u paarweise adjazent sind. Jeder k-simpliziale Knoten wird auch als **simplizial** bezeichnet.*

Zusammenhängende chordale Graphen können als eine Verallgemeinerung von Bäumen aufgefasst werden. Ein Graph G ist ein Baum, wenn er aus K_1 durch sukzessives Hinzufügen von 1-simplizialen Knoten erzeugt werden kann. Entsprechend heißt G **k-Baum**, wenn G aus K_k durch sukzessives Hinzufügen von k-simplizialen Knoten erzeugt werden kann. Wir werden sehen, dass ein zusammenhängender Graph G genau dann chordal ist, wenn er aus einem isolierten Knoten (also aus einer 1-Clique) durch sukzessives Hinzufügen von simplizialen Knoten erzeugt werden kann. Äquivalent hierzu ist, dass G durch sukzessives Entfernen von simplizialen Knoten auf einen isolierten Knoten reduziert werden kann.

Definition 2.29. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine lineare Ordnung $(u_1, \ldots, u_n)$ auf V heißt **perfekte Eliminationsordnung (PEO)** von G, wenn u_i simplizial in $G[u_1, \ldots, u_i]$ für $i = 2, \ldots, n$ ist.*

Es ist klar dass alle Knoten eines vollständigen Graphen simplizial sind. Das folgende Lemma verallgemeinert die bekannte Tatsache, dass jeder nicht vollständige Baum T (also $T \notin \{K_1, K_2\}$) mindestens zwei nicht adjazente Blätter hat.

Lemma 2.30. *Jeder nicht vollständige chordale Graph G besitzt mindestens zwei simpliziale Knoten, die nicht adjazent sind.*

Beweis. Wir führen Induktion über n. Für $n \leq 2$ ist die Behauptung klar. Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $n \geq 3$ Knoten. Da G nicht vollständig ist, enthält G zwei nichtadjazente Knoten x_1 und x_2. Sei S ein minimaler x_1-x_2-Separator der Größe $k \geq 0$. Im Fall $k > 0$ ist S nach Lemma 2.27 eine Clique in G. Seien $G[V_1]$ und $G[V_2]$ die beiden Komponenten von $G - S$ mit $x_i \in V_i$. Wir zeigen die Existenz zweier simplizialer Knoten $s_i \in V_i$, $i = 1, 2$.

Betrachte die Teilgraphen $G_i = G[V_i \cup S]$. Da G_i chordal ist und weniger als n Knoten hat, ist G_i nach IV entweder eine Clique oder G_i enthält mindestens zwei nicht adjazente simpliziale Knoten y_i, z_i.

Falls G_i eine Clique ist, ist $s_i = x_i$ simplizial in G_i, und da x_i keine Nachbarn außerhalb von $V_i \cup S$ hat, ist s_i dann auch simplizial in G.

Ist G_i keine Clique, kann höchstens einer der beiden Knoten y_i, z_i zu S gehören (da S im Fall $S \neq \emptyset$ eine Clique und $\{y_i, z_i\} \notin E$ ist). O.B.d.A. sei $y_i \in V_i$. Dann hat $s_i = y_i$ keine Nachbarn außerhalb von $V_i \cup S$ und somit ist s_i auch simplizial in G. ■

Satz 2.31. *Ein Graph ist genau dann chordal, wenn er eine PEO hat.*

Beweis. Falls G chordal ist, lässt sich eine PEO gemäß Lemma 2.30 bestimmen, indem wir für $i = n, \ldots, 2$ sukzessive einen simplizialen Knoten u_i in $G - \{u_{i+1}, \ldots, u_n\}$ wählen.

Für die umgekehrte Richtung sei $(u_1, \ldots, u_n)$ eine PEO von G. Wir zeigen induktiv, dass $G_i = G[u_1, \ldots, u_i]$ chordal ist. Da u_{i+1} simplizial in G_{i+1} ist, enthält jeder Kreis K der Länge ≥ 4 in G_{i+1}, auf dem u_{i+1} liegt, eine Sehne zwischen den beiden Kreisnachbarn von u_{i+1}. Daher ist mit G_i auch G_{i+1} chordal. ■

Korollar 2.32. *Es gibt einen Polynomialzeitalgorithmus A, der für einen gegebenen Graphen G eine PEO berechnet, falls G chordal ist, und andernfalls einen induzierten Kreis der Länge ≥ 4 ausgibt.*

Beweis. A versucht wie im Beweis von Theorem 2.31 beschrieben, eine PEO zu bestimmen. Stellt sich heraus, dass $G_i = G - \{u_{i+1}, \ldots, u_n\}$ keinen simplizialen Knoten u_i hat, so ist G_i wegen Lemma 2.30 nicht chordal. Daher gibt es in G_i nach Lemma 2.27 *(iii)* ein Knotenpaar x, y, so dass kein x-y-Separator eine Clique ist. Berechnen wir für dieses Paar einen beliebigen minimalen x-y-Separator S, so ist S keine Clique und wir können wie im Beweis von $(i) \implies (ii)$ einen induzierten Kreis K der Länge ≥ 4 in G_i konstruieren. Da G_i ein induzierter Teilgraph von G ist, ist K auch ein induzierter Kreis in G. ■

Eine PEO kann verwendet werden, um einen chordalen Graphen zu färben:

Algorithmus `chordal-color`(V, E)

```
1 berechne eine PEO (u_1, ..., u_n) für G = (V, E)
2 starte greedy-color mit der Knotenfolge (u_1, ..., u_n)
```


Satz 2.33. *Für einen gegebenen chordalen Graphen $G = (V, E)$ berechnet der Algorithmus* `chordal-color` *eine k-Färbung c von G mit $k = \chi(G) = \omega(G)$.*

Beweis. Sei u_i ein beliebiger Knoten mit $c(u_i) = k$. Da $(u_1, \ldots, u_n)$ eine PEO von G ist, ist u_i simplizial in $G[u_1, \ldots, u_i]$. Somit bilden die Nachbarn u_j von u_i mit $j < i$ eine Clique und wegen $c(u_i) = k$ bilden sie zusammen mit u_i eine k-Clique. Daher gilt $\chi(G) \leq k \leq \omega(G)$, woraus wegen $\omega(G) \leq \chi(G)$ die Behauptung folgt. ■

Um `chordal-color` in Linearzeit zu implementieren, benötigen wir einen Linearzeit-Algorithmus zur Bestimmung einer PEO. Rose, Tarjan und Lueker haben 1976 einen solchen Algorithmus angegeben, der auf *lexikographischer Breitensuche* (kurz LexBFS oder LBFS, engl. *lexicographic breadth-first search*) basiert. Bevor wir diese Variante der Breitensuche vorstellen, gehen wir kurz auf verschiedene Ansätze zum Durchsuchen von Graphen ein.

Der folgende Algorithmus `GraphSearch`(V, E) startet eine Suche in einem beliebigen Knoten u und findet zunächst alle von u aus erreichbaren Knoten. Danach wird solange von einem noch nicht erreichten Knoten eine neue Suche gestartet, bis alle Knoten erreicht wurden. Die Menge der aktuellen Knoten wird dabei in einer Datenstruktur A gespeichert. Genauer enthält A alle bereits entdeckten Knoten, die noch nicht abgearbeitet sind.

Algorithmus `GraphSearch`(V, E)

```
1 R := ∅    // Menge der erreichten Knoten
2 L := ()   // Ausgabeliste
3 repeat
4   wähle u ∈ V \ R    // u wurde neu entdeckt
5   append(L, u)
6   parent(u) := ⊥
7   A := {u}    // Menge der aktuellen Knoten
8   R := R ∪ {u}
```

```
9    while A ≠ ∅ do
10     wähle u aus A
11     if ∃v ∈ N(u)\R then
12       A := A ∪ {v}     // v wurde neu entdeckt
13       R := R ∪ {v}
14       append(L, v)
15       parent(v) := u
16     else entferne u aus A     // u wurde abgearbeitet
17   until R = V
18   return(L)
```

Der Algorithmus `GraphSearch(`V, E`)` findet in jedem Durchlauf der repeat-Schleife eine neue Komponente des Eingabegraphen $G = (V, E)$. Dies bedeutet, dass alle Knoten, die zu einer Komponente gehören, konsekutiv in der Ausgabeliste $L = (u_1, \ldots, u_n)$ auftreten, wobei abgesehen vom ersten Knoten jeder Komponente jeder Knoten u_k einen Nachbarn u_i mit $i < k$ hat.

Die folgende Definition fasst diese Eigenschaften der Ausgabeliste zusammen.

Definition 2.34. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine lineare Ordnung $(u_1, \ldots, u_n)$ auf V heißt* ***Suchordnung (SO)*** *von G, wenn für jedes Tripel $j < k < l$ gilt:*

$$u_j \in N(u_l) \setminus N(u_k) \Rightarrow \exists i < k : i \neq j \wedge u_i \in N(u_k).$$

Satz 2.35. *Für jeden Graphen $G = (V, E)$ gibt der Algorithmus* `GraphSearch(`V, E`)` *eine SO von G aus.*

Beweis. Ein Knoten u_k erhält nur dann den Wert $\texttt{parent}(u_k) = \perp$, wenn alle Knoten u_j mit $j < k$ bereits abgearbeitet sind und diese nur Nachbarn u_l mit $l < k$ hatten. Falls also ein Vorgänger u_j von u_k mit einem Nachfolger u_l von u_k verbunden ist, liefert die `parent`-Funktion einen Nachbarn $u_i = \texttt{parent}(u_k)$ von u_k mit $i < k$. Da $u_j \notin N(u_k)$ ist, gilt zusätzlich $i \neq j$. ■

Die `parent`-Funktion induziert einen gerichteten Wald $W = (V, E_{\texttt{parent}})$, dessen Kantenmenge aus allen Kanten der Form $(\texttt{parent}(v), v)$ mit $\texttt{parent}(v) \neq \perp$ besteht. Die Kanten von W werden auch als ***Baumkanten*** (kurz ***B-Kanten***) und W wird auch als ***Suchwald*** von $G = (V, E)$ bezeichnet. Für jeden Knoten $v \in V$ gibt es genau eine Wurzel w in W, von der aus v in W erreichbar ist. Der eindeutig bestimmte w-v-Pfad $P = (u_0, \ldots, u_l)$ in W mit $u_0 = w$ und $u_l = v$ lässt sich ausgehend von $u_l = v$ unter Verwendung der `parent`-Funktion mittels $u_{i-1} = \texttt{parent}(u_i)$ für $i = l, \ldots, 1$ berechnen. P wird auch als ***parent-Pfad*** von v bezeichnet. Es ist klar, dass 2 Knoten v und v' genau dann in einer Komponente von G liegen, wenn sie die gleiche Wurzel haben.

Realisieren wir die Menge der aktuellen Knoten als einen Keller S, so erhalten wir eine Suchstrategie, die als ***Tiefensuche*** (kurz *DFS*, engl. *depth first search*) bezeichnet wird. Die Benutzung eines Kellers bewirkt, dass nach der Entdeckung eines neuen Knotens v unter den Nachbarn des aktuellen Knotens u die Suche zuerst bei den Nachbarn von v fortgesetzt wird, bevor die anderen Nachbarn von u getestet werden.

Algorithmus `DFS(`V, E`)`

```
1   R := ∅     // Menge der erreichten Knoten
2   L := ()    // Ausgabeliste
3   repeat
4     wähle u ∈ V\R     // u wurde neu entdeckt
5     R := R ∪ {u}
6     append(L, u)
7     parent(u) := ⊥
8     S := (u)     // Keller der aktuellen Knoten
9     while S ≠ () do
10      u := top(S)
11      if ∃v ∈ N(u)\R then
12        push(S, v)     // v wurde neu entdeckt
```

```
13        R := R ∪ {v}
14        append(L, v)
15        parent(v) := u
16      else pop(S)    // u wurde abgearbeitet
17  until R = V
18  return(L)
```

Definition 2.36. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine lineare Ordnung $(u_1, \ldots, u_n)$ auf V heißt* ***DFS-Ordnung (DO)*** *von G, wenn für jedes Tripel $j < k < l$ gilt:*

$$u_j \in N(u_l) \setminus N(u_k) \Rightarrow \exists i : j < i < k \wedge u_i \in N(u_k).$$

Satz 2.37. *Für jeden Graphen $G = (V, E)$ gibt der Algorithmus* `DFS(`V, E`)` *eine DO von G aus.*

Beweis. Siehe Übungen. ■

Realisieren wir die Menge der abzuarbeitenden Knoten als eine Warteschlange Q, so findet der resultierende Algorithmus `BFS(`V, E`)` einen kürzesten Weg vom Startknoten u zu allen von u aus erreichbaren Knoten. Diese Suchstrategie wird als ***Breitensuche*** (kurz *BFS*, engl. *breadth first search*) bezeichnet. Die Benutzung einer Warteschlange Q zur Speicherung der noch abzuarbeitenden Knoten bewirkt, dass alle Nachbarknoten v des aktuellen Knotens u vor den bisher noch nicht erreichten Nachbarn von v ausgegeben werden.

Algorithmus `BFS(`V, E`)`

```
1  R := ∅    // Menge der erreichten Knoten
2  L := ()   // Ausgabeliste
3  repeat
4    wähle u ∈ V\R    // u wurde neu entdeckt
5    R := R ∪ {u}
6    parent(u) := ⊥
```



```
7    Q := (u)    // Warteschlange der aktuellen Knoten
8    while Q ≠ () do
9      u := dequeue(Q)    // u wird komplett abgearbeitet
10     append(L, u)
11     for all v ∈ N(u)\R do
12       enqueue(Q, v)    // v wurde neu entdeckt
13       parent(v) := u
14     R := R ∪ N(u)
15  until R = V
16  return(L)
```

Definition 2.38. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine lineare Ordnung $(u_1, \ldots, u_n)$ auf V heißt* ***BFS-Ordnung (BO)*** *von G, wenn für jedes Tripel $j < k < l$ gilt:*

$$u_j \in N(u_l) \setminus N(u_k) \Rightarrow \exists i < j : u_i \in N(u_k).$$

Satz 2.39. *Für jeden Graphen $G = (V, E)$ gibt der Algorithmus* `BFS(`V, E`)` *eine BO von G aus.*

Beweis. Existiert im Fall $k < l$ eine Position $j < k$ mit $u_j \in N(u_l) \setminus N(u_k)$, so muss es einen Knoten $u_i \in N(u_k)$ mit $i < j$ geben, der dafür gesorgt hat, dass der Knoten u_k vor dem Knoten u_l in die Warteschlange aufgenommen wurde. ■

BFS-Ordnungen lassen sich anschaulich anhand der Adjazenzmatrix charakterisieren. Sei $(u_1, \ldots, u_n)$ eine BO für $G = (V, E)$ und sei $A = (a_{ij})$ die Adjazenzmatrix von G mit $a_{ij} = 1 \Leftrightarrow \{u_i, u_j\} \in E$. Weiter seien $z_i = a_{i1} \ldots a_{i,i-1}$ die Präfixe der Zeilen von A, die unterhalb der Diagonale verlaufen. Sind nun die ersten j Einträge $a_{k1} \ldots a_{kj}$ einer Zeile s_k Null, so muss dies auch für jede Zeile s_l mit $l > k$ so sein, da im Fall $a_{lj} = 1$ der Knoten $u_j \in N(u_l) \setminus N(u_k)$ wäre und somit ein $i < j$ mit $a_{ki} = 1$ existieren müsste. Dies bedeutet, dass s_l mindestens so viele Nullen als Präfix hat wie z_k. Es ist aber möglich, dass z_k bspw. mit 00010... beginnt und z_l mit 00011....

Alternativ können wir Q auch als eine Warteschlange von Knotenmengen realisieren (siehe Algorithmus `BFS'`), um einen Überblick über alle möglichen Fortsetzungen der aktuellen Liste L zu einer BO zu erhalten. Die Prozedur `Dequeue`(Q) liefert ein beliebiges Element aus der ersten Menge in Q zurück und entfernt dieses aus Q.

Algorithmus `BFS'`(V, E)

```
1  R := ∅    // Menge der erreichten Knoten
2  L := ()   // Ausgabeliste
3  repeat
4    wähle u ∈ V \ R
5    R := R ∪ {u}
6    Q := ({u})    // Warteschlange von Knotenmengen
7    while Q ≠ () do
8      u := Dequeue(Q)    // u wird komplett abgearbeitet
9      append(L, u)
10     if N(u) ⊈ R then enqueue(Q, N(u) \ R)
11     R := R ∪ N(u)
12 until R = V
13 return(L)
```

Prozedur `Dequeue`(Q)

```
1  entferne u aus first(Q)
2  if first(Q) = ∅ then dequeue(Q)
3  return(u)
```

Fassen wir die Menge $V \setminus R$ der noch nicht erreichten Knoten als Nachfolgemenge der letzten Menge in Q auf, so wird von dieser Restmenge in jedem Durchlauf der `while`-Schleife von `BFS'` die Teilmenge $N(u) \setminus R$ abgetrennt und im Fall $N(u) \setminus R \neq \emptyset$ der Schlange Q hinzugefügt.

Der Unterschied von LexBFS zur normalen Breitensuche besteht darin, dass die zulässigen Ausgabefolgen gegenüber der BFS weiter eingeschränkt werden. Der Name von LexBFS rührt daher, dass die Knoten in einer Reihenfolge ausgegeben werden, die eine lexikographische Sortierung der Zeilenpräfixe z_i bewirkt, sofern man sie durch Anhängen von Einsen auf die gleiche Länge bringt. Eine solche Sortierung kann auch bei einer gewöhnlichen Breitensuche auftreten, ist bei dieser aber nicht garantiert. Bei einer Breitensuche werden die noch nicht besuchten Nachbarn des aktuellen Knotens in beliebiger Reihenfolge zur Warteschlange hinzugefügt und auch wieder in dieser Reihenfolge entfernt. Dagegen werden bei einer LexBFS die Knoten in der Warteschlange nachträglich umsortiert, falls dies notwendig ist, um eine LexBFS-Ordnung der Knoten zu erhalten (siehe Definition 2.40). Ähnlich wie bei `BFS'` wird hierzu die Menge der noch nicht abgearbeiteten Knoten in eine Folge von Knotenmengen zerlegt. Im Gegensatz zu `BFS'` kann `LexBFS` aber nicht nur die letzte Menge $V \setminus R$ splitten, sondern alle Mengen der Folge.

Algorithmus `LexBFS`(V, E, u)

```
1  L := ()    // Ausgabeliste
2  Q := (V)   // Warteschlange von Knotenmengen
3  while Q ≠ () do
4    u := Dequeue(Q)    // u wird komplett abgearbeitet
5    append(L, u)
6    Splitqueue(Q, N(u))
7  return(L)
```

Prozedur `Splitqueue`(Q, S)

```
1  for T in Q with T ∩ S ∉ {∅, T} do
2    ersetze die Teilfolge (T) in Q durch (T ∩ S, T \ S)
```

Für eine effiziente Implementierung sollte die Schlange $Q = (S_1, \ldots, S_k)$ von Knotenmengen $S_i \subseteq V$ als doppelt verkettete Liste realisiert werden und für jeden Knoten u in der Adjazenzliste ein Zeiger auf die Menge S_i, die u enthält und auf seinen Eintrag in

S_i gespeichert werden. Zudem sollte die for-Schleife in der Prozedur `Splitqueue` durch eine Schleife über die Knoten in $S = N(u)$ ersetzt werden.

Definition 2.40. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine lineare Ordnung $(u_1, \ldots, u_n)$ auf V heißt **LexBFS-Ordnung (LBO)** von G, wenn für jedes Tripel $j < k < l$ gilt:*

$$u_j \in N(u_l) \setminus N(u_k) \Rightarrow \exists i < j : u_i \in N(u_k) \setminus N(u_l).$$

Ob eine Ordnung $(u_1, \ldots, u_n)$ eine LBO ist, lässt sich wie folgt an der gemäß $(u_1, \ldots, u_n)$ geordneten Adjazenzmatrix A ablesen: die verkürzten Zeilen $z_1, \ldots, z_n$ unter der Diagonalen müssen wie folgt sortiert sein: entweder ist z_i ein Präfix von z_{i+1} oder z_i hat an der ersten Position, wo sich die beiden Strings unterscheiden, eine Eins. Bringen wir also die verkürzten Zeilen durch Anhängen von Einsen auf dieselbe Länge, so sind sie lexikographisch sortiert. In den Übungen wird gezeigt, dass man sogar eine lexikographische Ordnung auf den *kompletten* Zeilen von A erhält, falls man die Diagonale auf 1 setzt und die Knoten in jeder Menge von Q nach absteigendem Knotengrad in G sortiert.

Satz 2.41. *Für jeden Graphen $G = (V, E)$ gibt der Algorithmus `LexBFS`(V, E) eine LBO $(u_1, \ldots, u_n)$ von G aus.*

Beweis. Sei $A = (a_{ij})$ die Adjazenzmatrix von G mit $a_{ij} = 1 \Leftrightarrow \{u_i, u_j\} \in E$. Wir zeigen, dass die Strings $z_i = a_{i1}, \ldots, a_{i,i-1}$ lexikalisch sortiert sind. Existiert nämlich im Fall $k < l$ eine Position $j < k$ mit $a_{kj} = 0$ und $a_{lj} = 1$, so muss es eine Position $i < j$ mit $a_{ki} = 1$ und $a_{li} = 0$ geben. Ansonsten wäre der Knoten u_l spätestens beim Abarbeiten von u_j in eine Menge vor dem Knoten u_k sortiert worden und könnte daher nicht nach dem Knoten u_k ausgegeben werden. ■

Satz 2.42. *Jede LBO für einen chordalen Graphen G ist eine PEO für G.*

Beweis. Sei $(u_1, \ldots, u_n)$ eine LBO für $G = (V, E)$ und sei $A = (a_{ij})$ die Adjazenzmatrix von G mit $a_{ij} = 1 \Leftrightarrow \{u_i, u_j\} \in E$, wobei wir für a_{ij} auch $A[i, j]$ schreiben. Wir zeigen, dass G nicht chordal ist, wenn u_i nicht simplizial in $G_i = G[u_1, \ldots, u_i]$ ist.

Falls u_i nicht simplizial in G_i ist, müssen Indizes $i_2 < i_1 < i =: i_0$ mit $A[i_0, i_1] = A[i_0, i_2] = 1$ und $A[i_1, i_2] = 0$ existieren. Wegen $A[i_1, i_2] = 0$ und $A[i_0, i_2] = 1$ muss es einen Index $i_3 < i_2$ geben mit $A[i_1, i_3] = 1$ und $A[i_0, i_3] = 0$, wobei wir i_3 möglichst klein wählen.

Falls nun $A[i_2, i_3] = 1$ ist, haben wir einen induzierten Kreis $G[u_{i_0}, u_{i_1}, u_{i_2}, u_{i_3}] = (u_{i_0}, u_{i_1}, u_{i_3}, u_{i_2})$ der Länge 4 in G gefunden. Andernfalls muss es wegen $A[i_2, i_3] = 0$ und $A[i_1, i_3] = 1$ einen Index $i_4 < i_3$ geben mit $A[i_2, i_4] = 1$ und $A[i_1, i_4] = 0$, wobei wir i_4 wieder möglichst klein wählen. Da spätestens für $i_k = 1$ kein Index $i_{k+1} < i_k$ existiert, also $A[i_{k-1}, i_k] = 1$ sein muss, erhalten wir eine Indexfolge $1 \leq i_k < \cdots < i_1 < i_0$ mit

(a) $A[i_0, i_1] = A[i_j, i_{j+2}] = A[i_{k-1}, i_k] = 1$ für $j = 0, \ldots, k-2$ und

(b) $A[i_0, i_3] = A[i_j, i_{j+1}] = A[i_j, i_{j+3}] = A[i_{k-2}, i_{k-1}] = 0$ für $j = 1, \ldots, k-3$ und

(c) $A[i_j, l] = A[i_{j-1}, l]$ für $j = 1, \ldots, k-3$ und $l < i_{j+2}$.

Die Eigenschaften (a) und (b) ergeben sich direkt aus der Konstruktion der Folge. Eigenschaft (c) folgt aus der minimalen Wahl der Indizes $i_3, \ldots, i_k$ und impliziert für $r = 3, \ldots, k$ die Gleichungen $A[i_0, i_r] = A[i_1, i_r] = \cdots = A[i_{r-3}, i_r]$, indem wir $j = 1, \ldots, r-3$ und $l = i_r$ setzen. Da zudem $A[i_{r-3}, i_r]$ gemäß Eigenschaft (b) für $r = 3, \ldots, k$ den Wert 0 hat, folgt für alle Paare $0 \leq j < r \leq k$ die Äquivalenz

$$A[i_j, i_r] = 1 \Leftrightarrow r = j + 2 \text{ oder } j = 0 \wedge r = 1 \text{ oder } j = k - 1 \wedge r = k.$$

Folglich ist $G[u_{i_0}, \ldots, u_{i_k}]$ ein Kreis der Länge $k + 1 \geq 4$. ■

Damit haben wir einen Linearzeitalgorithmus, der für chordale Graphen eine PEO berechnet. Da auch `greedy-color` linear zeitbe-

schränkt ist, können wir den Algorithmus `chordal-color` in Linearzeit implementieren. Diesen Algorithmus können wir leicht noch so modifizieren, dass er zusammen mit der gefundenen k-Färbung entweder eine Clique C der Größe k (als Zertifikat, dass $\chi(G) = k = \omega(G)$ ist) oder einen induzierten Kreis der Länge ≥ 4 (als Zertifikat, dass G nicht chordal ist) ausgibt.

2.3 Der Satz von Brooks

Satz 2.43 (Brooks 1941)**.** *Für einen zusammenhängenden Graphen G gilt $\chi(G) = \Delta(G) + 1$ genau dann, wenn $G = K_n$ für ein $n \geq 1$ oder $G = C_n$ für ein ungerades $n \geq 3$ ist.*

Beweis. Es ist klar, dass die Graphen $G = K_n$ für $n \geq 1$ und $G = C_n$ für ungerades $n \geq 3$ die chromatische Zahl $\Delta(G) + 1$ haben. Für $\Delta(G) \leq 2$ ist leicht zu sehen, dass dies auch die einzigen zusammenhängenden Graphen mit dieser Eigenschaft sind.

Für zusammenhängende Graphen $G \neq K_n$ mit $\Delta(G) \geq 3$ zeigen wir induktiv über $n = n(G)$, dass $\chi(G) \leq \Delta(G)$ ist. Für $n \leq 4$ (IA) ist dies klar, da wir den K_4 ausgeschlossen haben. Für den IS sei also $G \neq K_n$ ein zusammenhängender Graph mit $n \geq 5$ Knoten und sei $d := \Delta(G) \geq 3$.

Falls $\delta(G) < d$ ist, hat $G' = G - u$ eine d-Färbung c', wobei u ein Knoten vom Grad $\deg(u) < d$ ist (man beachte, dass $\delta(G') < d$ und somit G' nicht d-regulär ist, was nach IV $\chi(G) \leq d$ impliziert). Da $\deg(u) < d$ ist, lässt sich c' zu einer d-Färbung c von G erweitern.

Falls $\kappa(G) \leq 1$ ist, hat G $k \geq 2$ Blöcke $B_1, \ldots B_k$, die nicht d-regulär und somit d-färbbar sind. Dies impliziert $\chi(G) \leq d$, da wir die d-Färbungen der Blöcke ausgehend von einem beliebigen Wurzelblock des BC-Baums hin zu den Blattblöcken in eine d-Färbung für G transformieren können.

Es bleibt also der Fall, dass G d-regulär und $\kappa(G) \geq 2$ ist.

Behauptung 2.44. *In G gibt es einen Knoten u_1, der zwei Nachbarn a und b mit $\{a, b\} \notin E$ hat, so dass $G - \{a, b\}$ zusammenhängend ist.*

Da $G \neq K_n$ ist, gibt es einen Knoten x, der zwei Nachbarn $y, z \in N(x)$ mit $\{y, z\} \notin E$ hat.

- Falls $G - y$ 2-zusammenhängend ist, ist $G - \{y, z\}$ zusammenhängend und die Behauptung folgt für $u_1 = x$.
- Ist $G - y$ nicht 2-zusammenhängend, d.h. $G - y$ hat mindestens zwei Blöcke, dann hat der BC-Baum T von $G - y$ mindestens zwei Blätter. Da $\kappa(G) \geq 2$ ist, ist y in G zu mindestens einem Knoten in jedem Blatt von T benachbart, der kein Schnittknoten ist. Wählen wir für a und b zwei dieser Knoten in verschiedenen Blättern, so ist $G - \{a, b\}$ zusammenhängend und somit die Behauptung für $u_1 = y$ bewiesen.

Sei also u_1 ein Knoten, der zwei Nachbarn a und b mit $\{a, b\} \notin E$ hat, so dass $G - \{a, b\}$ zusammenhängend ist. Durchsuchen wir den Graphen $G - \{a, b\}$ ausgehend vom Startknoten u_1, so erhalten wir eine Suchordnung $(u_1, \ldots, u_{n-2})$. Starten wir nun `greedy-color` mit der Reihenfolge $(a, b, u_{n-2}, \ldots, u_1)$, so erhalten wir eine d-Färbung c für G mit $c(a) = c(b) = 1$. Zudem hat Knoten u_i, $i > 1$, einen Nachbarn u_j mit $j < i$, weshalb $c(u_i) \leq \deg(u_i) \leq d$ ist. Zuletzt erhält auch u_1 eine Farbe $c(u_1) \leq d$, da die Nachbarn a und b von u_1 dieselbe Farbe haben. ■

In den Übungen wird folgende Folgerung aus dem Beweis des Satzes von Brooks gezeigt.

Korollar 2.45. *Es gibt einen Linearzeitalgorithmus, der für jeden Graphen G mit $\Delta(G) \leq 3$ eine $\chi(G)$-Färbung berechnet.*

2.4 Kantenfärbungen

Neben der Frage, mit wievielen Farben die Knoten eines Graphen gefärbt werden können, muss bei vielen Anwendungen auch eine Kantenfärbung mit möglichst wenigen Farben gefunden werden. Neben Graphen treten hierbei auch ***Multigraphen*** $G = (V, E)$ auf, d.h. die Kantenmenge von G ist eine Multimenge auf der Grundmenge $\binom{V}{2}$. In diesem Fall können 2 Kanten nicht nur einen, sondern sogar beide Endpunkte gemeinsam haben. Wie bei Graphen gehen wir aber davon aus, dass jede Kante 2 verschiedene Endpunkte hat, d.h. G ist schlingenfrei.

Eine Multimenge A auf einer Grundmenge M lässt sich durch eine Funktion $v_A\colon M \to \mathbb{N}$ beschreiben, wobei $v_A(a)$ die Anzahl der Vorkommen von a in A angibt. Die Mächtigkeit von A ist dann $|A| = \sum_{a\in A} v_A(a)$. Eine Multimenge A ist Teilmenge einer Multimenge B, wenn $v_A(a) \leq v_B(a)$ für alle $a \in M$ gilt.

Definition 2.46. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und sei $k \in \mathbb{N}$.*

*a) Eine Abbildung $c\colon E \to \mathbb{N}$ heißt **Kantenfärbung** von G, wenn $c(e) \neq c(e')$ für alle $e \neq e' \in E$ mit $e \cap e' \neq \emptyset$ gilt.*

*b) G heißt **k-kantenfärbbar**, falls eine Kantenfärbung $c\colon E \to \{1, \dots, k\}$ existiert.*

*c) Die **kantenchromatische Zahl** oder der **chromatische Index** von G ist*

$$\chi'(G) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ ist } k\text{-kantenfärbbar}\}.$$

Eine k-Kantenfärbung $c\colon E \to \mathbb{N}$ muss also je 2 Kanten, die einen gemeinsamen Endpunkt haben, verschiedene Farben zuweisen. Daher bildet jede ***Farbklasse*** $E_i = \{e \in E \mid f(e) = i\}$ ein Matching von G, d.h. c zerlegt E in k disjunkte Matchings $E_1, \dots, E_k$. Umgekehrt liefert jede Zerlegung von E in k disjunkte Matchings eine k-Kantenfärbung von G.

Ist $G = (V, E)$ ein Multigraph, so können wir eine k-Kantenfärbung von G auch durch eine Funktion c beschreiben, die jeder Kante $e \in E$ eine Menge $c(e) \subseteq \{1, \dots, k\}$ von $|c(e)| = v_E(e)$ Farben zuordnet, so dass $c(e) \cap c(e') = \emptyset$ für alle $e \neq e' \in E$ mit $e \cap e' \neq \emptyset$ gilt.

Beispiel 2.47.

$$\chi'(C_n) = \begin{cases} 2, & n \text{ gerade,} \\ 3, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\chi'(K_n) = 2\lceil n/2 \rceil - 1 = \begin{cases} n-1, & n \text{ gerade,} \\ n, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das Kantenfärbungsproblem für einen Graphen G lässt sich leicht auf das Knotenfärbungsproblem für einen Graphen G' reduzieren.

Definition 2.48. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $m \geq 1$ Kanten. Dann heißt der Graph $L(G) = (E, E')$ mit*

$$E' = \left\{ \{e, e'\} \subseteq \binom{E}{2} \;\middle|\; e \cap e' \neq \emptyset \right\}$$

*der **Kantengraph** oder **Line-Graph** von G.*

Ist G ein Multigraph, so ersetzen wir die Multimenge E in $L(G)$ durch eine Menge V_E derselben Mächtigkeit, die für jede Kante $e \in E$ $v_E(e)$ verschiedene Kopien $e^1, \dots, e^{v_E(e)}$ von e enthält. Die folgenden Beziehungen zwischen einem Graphen G und dem zugehörigen Line-Graphen lassen sich leicht verifizieren.

Proposition 2.49. *Sei $G' = L(G)$ der Line-Graph eines Graphen G. Dann gilt*

(i) $n(G') = m(G)$,

(ii) $\chi(G') = \chi'(G)$,

(iii) $\alpha(G') = \mu(G)$,

(iv) $\omega(G') \geq \Delta(G)$,

(v) $\Delta(G') = \max_{\{u,v\}\in E} \deg_G(u) + \deg_G(v) - 2 \leq 2\Delta(G) - 2$.