

Vorlesungsskript
Graphalgorithmen

Wintersemester 2018/19

Prof. Dr. Johannes Köbler
Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Komplexität und Kryptografie

7. November 2018

Inhaltsverzeichnis

1	Graphentheoretische Grundlagen	1
2	Färben von Graphen	3
2.1	Färben von planaren Graphen	4
2.2	Färben von chordalen Graphen	10

1 Graphentheoretische Grundlagen

Definition 1.1. Ein (**ungerichteter**) **Graph** ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei

V - eine endliche Menge von **Knoten/Ecken** und

E - die Menge der **Kanten** ist.

Hierbei gilt

$$E \subseteq \binom{V}{2} = \{\{u, v\} \subseteq V \mid u \neq v\}.$$

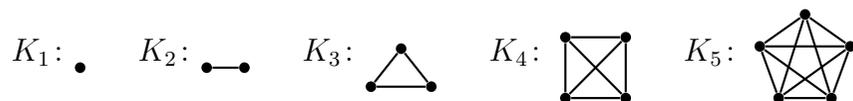
Sei $v \in V$ ein Knoten.

- Die **Nachbarschaft** von v ist $N_G(v) = \{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}$.
- Der **Grad** von v ist $\deg_G(v) = |N_G(v)|$.
- Der **Minimalgrad** von G ist $\delta(G) = \min_{v \in V} \deg_G(v)$ und der **Maximalgrad** von G ist $\Delta(G) = \max_{v \in V} \deg_G(v)$.
- Jeder Knoten $u \in V$ vom Grad ≤ 1 heißt **Blatt** und die übrigen Knoten (vom Grad ≥ 2) heißen **innere Knoten** von G .

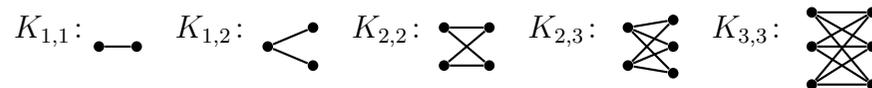
Falls G aus dem Kontext ersichtlich ist, schreiben wir auch einfach $N(v)$, $\deg(v)$, δ usw.

Beispiel 1.2.

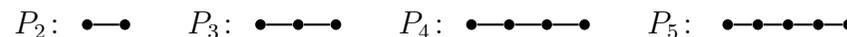
- Der **vollständige Graph** (V, E) auf n Knoten, d.h. $|V| = n$ und $E = \binom{V}{2}$, wird mit K_n und der **leere Graph** (V, \emptyset) auf n Knoten wird mit E_n bezeichnet.



- Der **vollständige bipartite Graph** (A, B, E) auf $a + b$ Knoten, d.h. $A \cap B = \emptyset$, $|A| = a$, $|B| = b$ und $E = \{\{u, v\} \mid u \in A, v \in B\}$ wird mit $K_{a,b}$ bezeichnet.



- Der **Pfad** mit n Knoten wird mit P_n bezeichnet.



- Der **Kreis** mit n Knoten wird mit C_n bezeichnet.



Definition 1.3. Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

- Eine Knotenmenge $U \subseteq V$ heißt **unabhängig** oder **stabil**, wenn es keine Kante von G mit beiden Endpunkten in U gibt, d.h. es gilt $E \cap \binom{U}{2} = \emptyset$. Die **Stabilitätszahl** ist

$$\alpha(G) = \max\{|U| \mid U \text{ ist stabile Menge in } G\}.$$

- Eine Knotenmenge $U \subseteq V$ heißt **Clique**, wenn jede Kante mit beiden Endpunkten in U in E ist, d.h. es gilt $\binom{U}{2} \subseteq E$. Die **Cliquenzahl** ist

$$\omega(G) = \max\{|U| \mid U \text{ ist Clique in } G\}.$$

- Ein Graph $G' = (V', E')$ heißt **Sub-/Teil-/Untergraph** von G , falls $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$ ist. Im Fall $V' = V$ wird G' auch ein **(auf)spannender Teilgraph** von G genannt und wir schreiben für G' auch $G - E''$ (bzw. $G = G' \cup E''$), wobei $E'' = E - E'$ die Menge der aus G entfernten Kanten ist. Im Fall $E'' = \{e\}$ schreiben wir für G' auch einfach $G - e$ (bzw. $G = G' \cup e$).

1 Graphentheoretische Grundlagen

- d) Ein k -regulärer spannender Teilgraph von G wird auch als **k -Faktor** von G bezeichnet. Ein d -regulärer Graph G heißt **k -faktorisierbar**, wenn sich G in $l = d/k$ kantendisjunkte k -Faktoren G_1, \dots, G_l zerlegen lässt.
- e) Ein Subgraph $G' = (V', E')$ heißt (**durch V'**) **induziert**, falls $E' = E \cap \binom{V'}{2}$ ist. Für G' schreiben wir dann auch $G[V']$ oder $G - V''$, wobei $V'' = V - V'$ die Menge der aus G entfernten Knoten ist. Ist $V'' = \{v\}$, so schreiben wir für G' auch einfach $G - v$ und im Fall $V' = \{v_1, \dots, v_k\}$ auch $G[v_1, \dots, v_k]$.
- f) Ein **Weg** ist eine Folge von (nicht notwendig verschiedenen) Knoten v_0, \dots, v_ℓ mit $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ für $i = 0, \dots, \ell - 1$. Die **Länge** des Weges ist die Anzahl der durchlaufenen Kanten, also ℓ . Im Fall $\ell = 0$ heißt der Weg **trivial**. Ein Weg (v_0, \dots, v_ℓ) heißt auch **v_0 - v_ℓ -Weg**.
- g) G heißt **zusammenhängend**, falls es für alle Paare $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ einen u - v -Weg gibt.
- h) Die durch die Äquivalenzklassen $V_i \subseteq V$ der Relation
- $$Z = \{(u, v) \in V \times V \mid \text{es gibt in } G \text{ einen } u\text{-}v\text{-Weg}\}$$
- induzierten Teilgraphen $G[V_i]$ heißen **Zusammenhangskomponenten** (engl. connected components) oder einfach **Komponenten** von G .
- i) Ein u - v -Weg heißt **einfach** oder **u - v -Pfad**, falls alle durchlaufenen Knoten verschieden sind.
- j) Ein **Zyklus** ist ein u - v -Weg mit $u = v$.
- k) Eine Menge von Pfaden heißt **disjunkt**, wenn je zwei Pfade in der Menge keine gemeinsamen Knoten haben, **kantendisjunkt**, wenn je zwei Pfade in der Menge keine gemeinsamen Kanten haben, und **knotendisjunkt**, wenn je zwei Pfade in der Menge höchstens gemeinsame Endpunkte haben.
- l) Ein **Kreis** ist ein Zyklus $(v_1, \dots, v_\ell, v_1)$ der Länge $\ell \geq 3$, für den v_1, \dots, v_ℓ paarweise verschieden sind.

- m) Ein Graph heißt **kreisfrei**, **azyklisch** oder **Wald**, falls er keinen Kreis enthält. Ein **Baum** ist ein zusammenhängender Wald.

Definition 1.4. Ein **gerichteter Graph** oder **Digraph** ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei

- V - eine endliche Menge von **Knoten/Ecken** und
 E - die Menge der **Kanten** ist.

Hierbei gilt

$$E \subseteq V \times V = \{(u, v) \mid u, v \in V\},$$

wobei E auch Schlingen (u, u) enthalten kann. Sei $v \in V$ ein Knoten.

- a) Die **Nachfolgermenge** von v ist $N^+(v) = \{u \in V \mid (v, u) \in E\}$.
- b) Die **Vorgängermenge** von v ist $N^-(v) = \{u \in V \mid (u, v) \in E\}$.
- c) Die **Nachbarmenge** von v ist $N(v) = N^+(v) \cup N^-(v)$.
- d) Der **Ausgangsgrad** von v ist $\deg^+(v) = |N^+(v)|$ und der **Eingangsgrad** von v ist $\deg^-(v) = |N^-(v)|$. Der **Grad** von v ist $\deg(v) = \deg^+(v) + \deg^-(v)$.
- e) Ein (**gerichteter**) **v_0 - v_ℓ -Weg** ist eine Folge von Knoten v_0, \dots, v_ℓ mit $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für $i = 0, \dots, \ell - 1$.
- f) Ein (**gerichteter**) **Zyklus** ist ein gerichteter u - v -Weg mit $u = v$.
- g) Ein gerichteter Weg heißt **einfach** oder (**gerichteter**) **Pfad**, falls alle durchlaufenen Knoten verschieden sind.
- h) Ein (**gerichteter**) **Kreis** in G ist ein gerichteter Zyklus $(v_1, \dots, v_\ell, v_1)$ der Länge $\ell \geq 1$, für den v_1, \dots, v_ℓ paarweise verschieden sind.
- i) G heißt **kreisfrei** oder **azyklisch**, wenn es in G keinen gerichteten Kreis gibt.
- j) G heißt **stark zusammenhängend**, wenn es in G für jedes Knotenpaar $u \neq v \in V$ sowohl einen u - v -Pfad als auch einen v - u -Pfad gibt.

Die **Adjazenzmatrix** eines Graphen bzw. Digraphen $G = (V, E)$ mit (geordneter) Knotenmenge $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ ist die $(n \times n)$ -Matrix $A = (a_{ij})$ mit den Einträgen

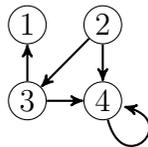
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für ungerichtete Graphen ist die Adjazenzmatrix symmetrisch mit $a_{ii} = 0$ für $i = 1, \dots, n$.

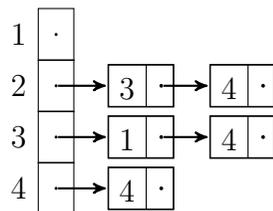
Bei der **Adjazenzlisten-Darstellung** wird für jeden Knoten v_i eine Liste mit seinen Nachbarn verwaltet. Im gerichteten Fall verwaltet man entweder nur die Liste der Nachfolger oder zusätzlich eine weitere für die Vorgänger. Falls die Anzahl der Knoten statisch ist, organisiert man die Adjazenzlisten in einem Feld, d.h. das Feldelement mit Index i verweist auf die Adjazenzliste von Knoten v_i . Falls sich die Anzahl der Knoten dynamisch ändert, so werden die Adjazenzlisten typischerweise ebenfalls in einer doppelt verketteten Liste verwaltet.

Beispiel 1.5.

Betrachte den gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit $V = \{1, 2, 3, 4\}$ und $E = \{(2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4), (4, 4)\}$. Dieser hat folgende Adjazenzmatrix- und Adjazenzlisten-Darstellung:



	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	0	0	1	1
3	1	0	0	1
4	0	0	0	1



<

2 Färben von Graphen

Definition 2.1. Sei $G = (V, E)$ ein Graph und sei $k \in \mathbb{N}$.

- a) Eine Abbildung $f: V \rightarrow \mathbb{N}$ heißt **Färbung** von G , wenn $f(u) \neq f(v)$ für alle $\{u, v\} \in E$ gilt.
- b) G heißt **k -färbbar**, falls eine Färbung $f: V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ existiert.
- c) Die **chromatische Zahl** ist

$$\chi(G) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ ist } k\text{-färbbar}\}.$$

Beispiel 2.2.

$$\chi(E_n) = 1, \quad \chi(K_{n,m}) = 2, \quad \chi(K_n) = n,$$

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & n \text{ gerade} \\ 3, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ein wichtiges Entscheidungsproblem ist, ob ein gegebener Graph k -färbbar ist. Dieses Problem ist für jedes feste $k \geq 3$ schwierig.

k -Färbbarkeit (k -COLORING):

- Gegeben:** Ein Graph G .
- Gefragt:** Ist G k -färbbar?

Satz 2.3. k -COLORING ist für $k \geq 3$ NP-vollständig.

Das folgende Lemma setzt die chromatische Zahl $\chi(G)$ in Beziehung zur Stabilitätszahl $\alpha(G)$.

Lemma 2.4. $n/\alpha(G) \leq \chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$.

Beweis. Sei G ein Graph und sei c eine $\chi(G)$ -Färbung von G . Da dann die Mengen $S_i = \{u \in V \mid c(u) = i\}$, $i = 1, \dots, \chi(G)$, stabil sind, folgt $|S_i| \leq \alpha(G)$ und somit gilt

$$n = \sum_{i=1}^{\chi(G)} |S_i| \leq \chi(G)\alpha(G).$$

Für den Beweis von $\chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$ sei S eine stabile Menge in G mit $|S| = \alpha(G)$. Dann ist $G - S$ k -färbbar für ein $k \leq n - |S|$. Da wir alle Knoten in S mit der Farbe $k + 1$ färben können, folgt $\chi(G) \leq k + 1 \leq n - \alpha(G) + 1$. ■

Beide Abschätzungen sind scharf, können andererseits aber auch beliebig schlecht werden.

Lemma 2.5. $\binom{\chi(G)}{2} \leq m$ und somit $\chi(G) \leq 1/2 + \sqrt{2m + 1/4}$.

Beweis. Zwischen je zwei Farbklassen einer optimalen Färbung muss es mindestens eine Kante geben. ■

Die chromatische Zahl steht auch in Beziehung zur Cliquenzahl $\omega(G)$ und zum Maximalgrad $\Delta(G)$:

Lemma 2.6. $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Beweis. Die erste Ungleichung folgt daraus, dass die Knoten einer maximal großen Clique unterschiedliche Farben erhalten müssen.

Um die zweite Ungleichung zu erhalten, betrachten wir folgenden Färbungsalgorithmus:

Algorithmus greedy-color

```

1  input ein Graph  $G = (V, E)$  mit  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ 
2   $c(v_1) := 1$ 
3  for  $i := 2$  to  $n$  do
4     $F_i := \{c(v_j) \mid j < i, v_j \in N(v_i)\}$ 
5     $c(v_i) := \min\{k \geq 1 \mid k \notin F_i\}$ 

```

Da für die Farbe $c(v_i)$ von v_i nur $|F_i| \leq \Delta(G)$ Farben verboten sind, gilt $c(v_i) \leq \Delta(G) + 1$. ■

2.1 Färben von planaren Graphen

Ein Graph G heißt **planar**, wenn er so in die Ebene einbettbar ist, dass sich zwei verschiedene Kanten höchstens in ihren Endpunkten berühren. Dabei werden die Knoten von G als Punkte und die Kanten von G als Verbindungslinien (genauer: Jordankurven) zwischen den zugehörigen Endpunkten dargestellt.

Bereits im 19. Jahrhundert wurde die Frage aufgeworfen, wie viele Farben höchstens benötigt werden, um eine Landkarte so zu färben, dass aneinander grenzende Länder unterschiedliche Farben erhalten. Offensichtlich lässt sich eine Landkarte in einen planaren Graphen transformieren, indem man für jedes Land einen Knoten zeichnet und benachbarte Länder durch eine Kante verbindet. Länder, die sich nur in einem Punkt berühren, gelten dabei nicht als benachbart.

Die Vermutung, dass 4 Farben ausreichen, wurde 1878 von Kempe „bewiesen“ und erst 1890 entdeckte Heawood einen Fehler in Kempes „Beweis“. Übrig blieb der *5-Farben-Satz*. Der *4-Farben-Satz* wurde erst 1976 von Appel und Haken bewiesen. Hierbei handelt es sich jedoch nicht um einen Beweis im klassischen Sinne, da zur Überprüfung der vielen auftretenden Spezialfälle Computer benötigt werden.

Satz 2.7 (Appel, Haken 1976).

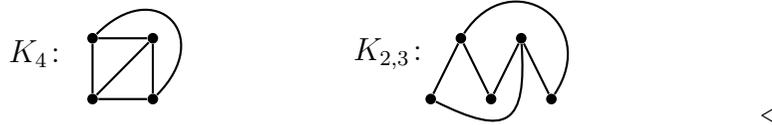
Jeder planare Graph ist 4-färbbar.

Aus dem Beweis des 4-Farben-Satzes von Appel und Haken lässt sich ein 4-Färbungsalgorithmus für planare Graphen mit einer Laufzeit von $\mathcal{O}(n^4)$ gewinnen.

In 1997 fanden Robertson, Sanders, Seymour und Thomas einen einfacheren Beweis für den 4-Farben-Satz, welcher zwar einen deut-

lich schnelleren $\mathcal{O}(n^2)$ Algorithmus liefert, aber ebenfalls nur mit Computer-Unterstützung verifizierbar ist.

Beispiel 2.8. *Wie die folgenden Einbettungen von K_4 und $K_{2,3}$ in die Ebene zeigen, sind K_4 und $K_{2,3}$ planar.*



Zur Beantwortung der Frage, ob auch K_5 und $K_{3,3}$ planar sind, betrachten wir die **Gebiete**, die bei der Einbettung von (zusammenhängenden) Graphen in die Ebene entstehen. Dabei gehören 2 Punkte zum selben Gebiet, falls es zwischen ihnen eine Verbindungslinie gibt, die keine Kante des eingebetteten Graphen kreuzt oder berührt. Nur eines dieser Gebiete ist unbeschränkt und dieses wird als **äußeres Gebiet** bezeichnet. Die Anzahl der Gebiete von G bezeichnen wir mit $r(G)$ oder kurz mit r . Die begrenzenden Kanten eines Gebietes g bilden seinen **Rand** $\text{rand}(g)$. Ihre Anzahl bezeichnen wir mit $d(g)$, wobei Kanten $\{u, v\}$, an die g von beiden Seiten grenzt, doppelt gezählt werden.

Der **Rand** $\text{rand}(g)$ eines Gebiets g ist die (zirkuläre) Folge aller Kanten, die an g grenzen, wobei man jede Kante so durchläuft, dass g „in Fahrtrichtung links“ liegt bzw. jeden Knoten u , den man über eine Kante e erreicht, über die im Uhrzeigersinn nächste Kante e' wieder verlässt. Auf diese Weise erhält jede Kante auf dem Rand von g eine Richtung (oder Orientierung).

Da jede Kante zur Gesamtlänge $\sum_g d(g)$ aller Ränder den Wert 2 beiträgt (sie wird genau einmal in jeder Richtung durchlaufen), folgt

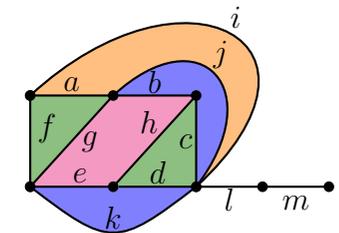
$$\sum_g d(g) = 2m(G).$$

Wir nennen das Tripel $G' = (V, E, R)$ eine **ebene Realisierung** des Graphen $G = (V, E)$, falls es eine Einbettung von G in die Ebene

gibt, deren Gebiete die Ränder in R haben. In diesem Fall nennen wir $G' = (V, E, R)$ auch einen **ebenen Graphen**. Ist G nicht zusammenhängend, so betten wir die Zusammenhangskomponenten von G in die Ebene ein und fassen alle Ränder, die bei diesen Einbettungen entstehen, zu einer Randmenge R zusammen.

Führen zwei Einbettungen von G in die Ebene auf dieselbe Randmenge R , so werden sie als **äquivalent** angesehen. Eine andere Möglichkeit, Einbettungen bis auf Äquivalenz kombinatorisch zu beschreiben, besteht darin, für jeden Knoten u die (zirkuläre) Ordnung π_u aller mit u inzidenten Kanten anzugeben. Man nennt $\pi = \{\pi_u \mid u \in V\}$ ein **Rotationssystem** für G , falls es eine entsprechende Einbettung gibt. Rotationssysteme haben den Vorteil, dass sie bei Verwendung der Adjazenzlistendarstellung ohne zusätzlichen Platzaufwand gespeichert werden können, indem man die zu u adjazenten Knoten gemäß π_u anordnet.

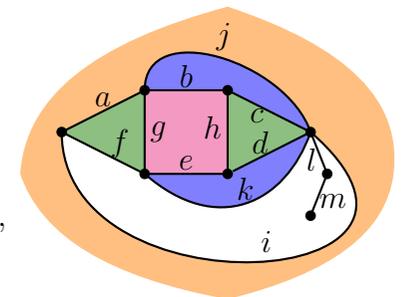
Beispiel 2.9. *Die beiden nebenstehenden Einbettungen eines Graphen $G = (V, E)$ in die Ebene haben jeweils 7 Gebiete und führen beide auf den ebenen Graphen $G' = (V, E, R)$ mit den 7 Rändern*



$$R = \{(a, f, g), (a, j, i), (b, g, e, h), (b, c, j), (c, h, d), (d, e, k), (f, i, l, m, m, l, k)\}.$$

Das zugehörige Rotationssystem ist

$$\pi = \{(a, f, i), (a, j, b, g), (b, c, h), (e, k, f, g), (d, e, h), (c, j, i, l, k, d), (l, m), (m)\}.$$



Man beachte, dass sowohl in R als auch in π jede Kante genau zweimal vorkommt. Anstelle von (zirkulären) Kantenfolgen kann man die Elemente von R und π natürlich auch durch entsprechende Knotenfolgen beschreiben.

Satz 2.10 (Polyederformel von Euler, 1750).

Für einen zusammenhängenden ebenen Graphen $G = (V, E, R)$ gilt

$$n(G) - m(G) + r(G) = 2. \quad (*)$$

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion über die Kantenzahl $m(G) = m$.

$m = 0$: Da G zusammenhängend ist, muss dann $n = 1$ sein.

Somit ist auch $r = 1$, also $(*)$ erfüllt.

$m - 1 \rightsquigarrow m$: Sei G ein zusammenhängender ebener Graph mit m Kanten.

Ist G ein Baum, so entfernen wir ein Blatt und erhalten einen zusammenhängenden ebenen Graphen G' mit $n' = n - 1$ Knoten, $m' = m - 1$ Kanten und $r' = r$ Gebieten. Nach IV folgt $n - m + r = (n - 1) - (m - 1) + r = n' - m' + r' = 2$.

Falls G kein Baum ist, entfernen wir eine Kante auf einem Kreis in G und erhalten einen zusammenhängenden ebenen Graphen G' mit $n' = n$ Knoten, $m' = m - 1$ Kanten und $r' = r - 1$ Gebieten. Nach IV folgt $n - m + r = n - (m - 1) + (r - 1) = n' - m' + r' = 2$. ■

Korollar 2.11. Sei $G = (V, E)$ ein planarer Graph mit $n \geq 3$ Knoten. Dann ist $m \leq 3n - 6$. Falls G dreiecksfrei ist, gilt sogar $m \leq 2n - 4$.

Beweis. O.B.d.A. sei G zusammenhängend. Wir betrachten eine beliebige planare Einbettung von G . Da $n \geq 3$ ist, ist jedes Gebiet g von $d(g) \geq 3$ Kanten umgeben. Daher ist $2m = i = \sum_g d(g) \geq 3r$ bzw. $r \leq 2m/3$. Eulers Formel liefert

$$m = n + r - 2 \leq n + 2m/3 - 2,$$

was $(1 - 2/3)m \leq n - 2$ und somit $m \leq 3n - 6$ impliziert.

Wenn G dreiecksfrei ist, ist jedes Gebiet von $d(g) \geq 4$ Kanten umgeben. Daher ist $2m = i = \sum_g d(g) \geq 4r$ bzw. $r \leq m/2$. Eulers Formel

liefert daher $m = n + r - 2 \leq n + m/2 - 2$, was $m/2 \leq n - 2$ und somit $m \leq 2n - 4$ impliziert. ■

Korollar 2.12. Die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ sind nicht planar.

Beweis. Wegen $n(K_5) = 5$, also $3n(K_5) - 6 = 9$, und wegen $m(K_5) = \binom{5}{2} = 10$ gilt $m(K_5) \not\leq 3n(K_5) - 6$.

Wegen $n(K_{3,3}) = 6$, also $2n(K_{3,3}) - 4 = 8$, und wegen $m(K_{3,3}) = 3 \cdot 3 = 9$ gilt $m(K_{3,3}) \not\leq 2n(K_{3,3}) - 4$. ■

Als weitere interessante Folgerung aus der Polyederformel können wir zeigen, dass jeder planare Graph einen Knoten v vom Grad $\deg(v) \leq 5$ hat.

Korollar 2.13. Jeder planare Graph hat einen Minimalgrad $\delta \leq 5$.

Beweis. Für $n \leq 6$ ist die Behauptung klar. Für $n > 6$ impliziert die Annahme $\delta \geq 6$ die Ungleichung

$$m = \frac{1}{2} \sum_{u \in V} \deg(u) \geq \frac{1}{2} \sum_{u \in V} 6 = 3n,$$

was im Widerspruch zu $m \leq 3n - 6$ steht. ■

Definition 2.14. Seien $G = (V, E)$ und H Graphen und seien $u, v \in V$.

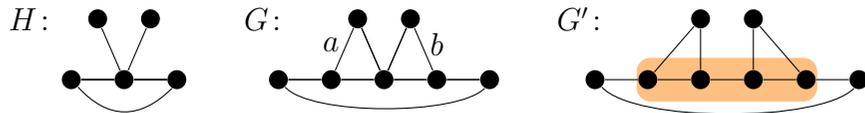
- Durch **Fusion** von u und v entsteht aus G der Graph $G_{uv} = (V - \{v\}, E')$ mit

$$E' = \{e \in E \mid v \notin e\} \cup \{\{u, v'\} \mid \{v, v'\} \in E - \{u, v\}\}.$$

Ist $e = \{u, v\}$ eine Kante von G (also $e \in E$), so sagen wir auch, G_{uv} entsteht aus G durch **Kontraktion** der Kante e . Hat zudem v den Grad 2 mit $N_G(v) = \{u, w\}$, so sagen wir auch, G_{uv} entsteht aus G durch **Überbrückung** des Knotens v bzw. G aus G_{uv} durch **Unterteilung** der Kante $\{u, w\}$.

- G heißt zu H **kontrahierbar**, falls H aus einer isomorphen Kopie von G durch wiederholte Kontraktionen gewonnen werden kann.
- G heißt **Unterteilung** von H , falls G aus einer isomorphen Kopie von H durch wiederholte Unterteilungen gewonnen werden kann.
- H heißt **Minor** von G , wenn ein Teilgraph von G zu H kontrahierbar ist, und **topologischer Minor**, wenn ein Teilgraph von G eine Unterteilung von H ist.
- G heißt **H -frei**, falls H kein Minor von G ist. Für eine Menge \mathcal{H} von Graphen heißt G **\mathcal{H} -frei**, falls G für alle $H \in \mathcal{H}$ H -frei ist.

Beispiel 2.15. Betrachte folgende Graphen:



G ist keine Unterteilung von H , da G Knoten vom Grad 3 hat, aber H nicht. Entfernen wir jedoch die beiden Kanten a und b aus G , so ist der resultierende Teilgraph eine Unterteilung von H , d.h. H ist ein topologischer Minor von G . H ist aber kein topologischer Minor von G' , da H einen Knoten vom Grad 4 hat und G' nur Knoten vom Grad ≤ 3 . Da durch Kontraktion der drei umrandeten Kanten ein zu H isomorpher Graph entsteht, ist H aber ein Minor von G' . \triangleleft

Es ist klar, dass die Klasse \mathcal{K} der planaren Graphen zwar unter Unterteilung und (topologischer) Minorenbildung abgeschlossen ist (d.h. wenn $G \in \mathcal{K}$ und H ein Minor oder eine Unterteilung von G ist, dann folgt $H \in \mathcal{K}$), aber nicht unter Fusion.

Nach Definition lässt sich jeder (topologische) Minor H von G aus einem zu G isomorphen Graphen durch wiederholte Anwendung folgender Operationen gewinnen:

- Entfernen einer Kante oder eines Knotens,
- Kontraktion einer Kante (bzw. Überbrückung eines Knotens).

Da die Kontraktionen (bzw. Überbrückungen) o.B.d.A. auch zuletzt ausgeführt werden können, gilt hiervon auch die Umkehrung. Zudem ist leicht zu sehen, dass G und H genau dann (topologische) Minoren voneinander sind, wenn sie isomorph sind.

Satz 2.16 (Kempe 1878, Heawood 1890).
 Jeder planare Graph ist 5-färbbar.

Beweis. Wir beweisen den Satz durch Induktion über n .
 $n = 1$: Klar.

$n - 1 \rightsquigarrow n$: Da G planar ist, existiert ein Knoten u mit $\deg(u) \leq 5$. Im Fall $\deg(u) \leq 4$ entfernen wir u aus G . Andernfalls hat u zwei Nachbarn v und w , die nicht durch eine Kante verbunden sind (andernfalls wäre K_5 ein Teilgraph von G). In diesem Fall entfernen wir alle mit u inzidenten Kanten außer $\{u, v\}$ und $\{u, w\}$ und kontrahieren diese beiden Kanten zum Knoten v .

In beiden Fällen ist der resultierende Graph G' ein Minor von G und daher planar. Da G' zudem höchstens $n - 1$ Knoten hat, existiert nach IV eine 5-Färbung c' für G' . Da wir im 2. Fall dem Knoten w die Farbe $c'(v)$ geben können, haben die Nachbarn von u höchstens 4 verschiedene Farben und wir können G 5-färben. \blacksquare

Kuratowski konnte 1930 beweisen, dass jeder nichtplanare Graph G den $K_{3,3}$ oder den K_5 als topologischen Minor enthält. Für den Beweis benötigen wir noch folgende Notationen.

Definition 2.17. Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

- Eine Menge $S \subseteq V$ heißt **Separator** in G , wenn es zwei Knoten $u, v \in V \setminus S$ gibt, zwischen denen in $G - S$ kein u - v -Weg existiert. Ist $|S| = k$, so nennen wir S auch einen **k -Separator** zwischen u und v oder auch einen **u - v -Separator** der Größe k . Ein 1-Separator wird auch **Artikulation** oder **Schnittknoten** von G genannt.
- Ein Graph G heißt **k -zusammenhängend**, $0 \leq k \leq n - 1$, falls G keinen $(k - 1)$ -Separator hat. Die größte Zahl k , für die G k -

zusammenhängend ist, heißt **Zusammenhangszahl** von G und wird mit $\kappa(G)$ bezeichnet.

Ein Graph G mit $n \geq 2$ Knoten ist also genau dann zusammenhängend, wenn $\kappa(G) \geq 1$ ist.

Lemma 2.18. *Ist ein Graph $G = (V, E)$ nicht planar, so hat er einen*

- *2-zusammenhängenden Untergraphen $U = (V', E')$ und einen*
- *3-zusammenhängenden topologischen Minor $M = (V'', E'')$,*

*die **minimal nicht planar** sind, d.h. U und M sind nicht planar und für alle $e' \in E'$ und $e'' \in E''$ sind die Graphen $U - e'$ und $M - e''$ planar.*

Beweis. Wir entfernen zuerst solange Kanten und Knoten aus G , bis wir aus dem verbliebenen Teilgraphen $U = (V', E')$ keine weiteren Kanten oder Knoten entfernen können, ohne dass U planar wird.

U ist zusammenhängend, da andernfalls mindestens eine Komponente von U nicht planar ist und wir alle übrigen Komponenten entfernen könnten, ohne dass U planar wird.

U ist sogar 2-zusammenhängend, da U sonst einen Schnittknoten s enthält und $U - s$ in $k \geq 2$ Komponenten $U[V_1], \dots, U[V_k]$ zerfällt. Dann ist aber mindestens ein Teilgraph $T_i = U[V_i \cup \{s\}]$ nicht planar und wir können alle Knoten außerhalb von T_i entfernen, ohne dass U planar wird.

Um einen topologischen Minor M von G mit den behaupteten Eigenschaften zu erhalten, konstruieren wir zu U einen topologischen Minor U' , der minimal nicht planar ist und zudem 3-zusammenhängend ist oder weniger Knoten als U hat. Indem wir diese Konstruktion wiederholen, erhalten wir schließlich M .

Falls U 3-zusammenhängend ist, ist $U' = U$. Andernfalls gibt es in U einen 2-Separator $S = \{u, v\}$, d.h. $U - S$ zerfällt in $k \geq 2$ Komponenten $U[V_1], \dots, U[V_k]$. Betrachte die (2-zusammenhängenden) Graphen $G_i = U[V_i \cup \{u, v\}] \cup \{u, v\}$. Dann ist mindestens ein G_i

nicht planar (z.B. G_1), da sonst auch U planar wäre. Da $k \geq 2$ ist, erhalten wir einen zu G_1 isomorphen Graphen U' als topologischen Minor von $H = U[V_1 \cup V_2 \cup \{u, v\}]$ (und damit von U), indem wir in $U[V_2 \cup \{u, v\}]$ einen beliebigen u - v -Pfad P wählen und aus H alle Knoten und Kanten entfernen, die nicht auf P liegen und danach P überbrücken. Dann hat U' weniger Knoten als U und ist wie U minimal nicht planar. ■

Definition 2.19. *Sei G ein Graph und sei K ein Kreis in G . Ein Teilgraph B von G heißt **Brücke** von K in G , falls*

- *B nur aus einer Kante besteht, die zwei Knoten von K verbindet, aber nicht auf K liegt (solche Brücken werden auch als **Sehnen** von K bezeichnet), oder*
- *$B - K$ eine Komponente von $G - K$ ist und B aus $B - K$ durch Hinzufügen aller Kanten zwischen $B - K$ und K (und der zugehörigen Endpunkte auf K) entsteht.*

*Die Knoten von B , die auf K liegen, heißen **Kontaktpunkte** von B . Zwei Brücken B und B' von K heißen **inkompatibel**, falls*

- *B Kontaktpunkte u, v und B' Kontaktpunkte u', v' hat, so dass diese vier Punkte in der Reihenfolge u, u', v, v' auf K liegen, oder*
- *B und B' mindestens 3 gemeinsame Kontaktpunkte haben.*

Es ist leicht zu sehen, dass in einem planaren Graphen kein Kreis mehr als zwei inkompatible Brücken haben kann.

Satz 2.20 (Kuratowski 1930).

Für einen Graphen G sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) *G ist planar.*
- (ii) *G enthält weder den $K_{3,3}$ noch den K_5 als topologischen Minor.*

Beweis. Die Implikation von i) nach ii) folgt aus der Abgeschlossenheit der planaren Graphen unter (topologischer) Minorenbildung.

Die Implikation von *ii*) nach *i*) zeigen wir durch Kontraposition. Sei also $G = (V, E)$ nicht planar. Dann hat G nach Lemma 2.18 einen 3-zusammenhängenden nicht planaren topologischen Minor $M = (V', E')$, so dass $M - e'$ für jede Kante $e' \in E'$ planar ist. Wir entfernen eine beliebige Kante $e_0 = \{a_0, b_0\}$ aus M . Dann ist $M - e_0$ planar. Da $M - e_0$ 2-zusammenhängend ist, gibt es in $M - e_0$ einen Kreis K durch die beiden Knoten a_0 und b_0 (siehe Übungen). Wir wählen K zusammen mit einer ebenen Realisierung H' von $M - e_0$ so, dass K möglichst viele Gebiete in H' einschließt.

Für zwei Knoten a, b auf K bezeichnen wir mit $K[a, b]$ die Menge aller Knoten, die auf dem Bogen von a nach b (im Uhrzeigersinn) auf K liegen. Zudem sei $K[a, b) = K[a, b] \setminus \{b\}$. Die Mengen $K(a, b)$ und $K(a, b]$ sind analog definiert.

Die Kanten jeder Brücke B von K in $M - e_0$ verlaufen in H' entweder alle innerhalb oder alle außerhalb von K . Im ersten Fall nennen wir B eine **innere Brücke** und im zweiten eine **äußere Brücke**.

Es ist klar, dass K in H' mindestens eine innere und mindestens eine äußere Brücke haben muss. Zudem muss jede äußere Brücke B aus einer Kante $\{u, v\}$ bestehen, die zwei Knoten $u \in K(a_0, b_0)$ und $v \in K(b_0, a_0)$ verbindet. Andernfalls hätte B nämlich mindestens 2 Kontaktpunkte auf $K[a_0, b_0]$ oder auf $K[b_0, a_0]$. Daher könnte K zu einem Kreis K' erweitert werden, der in H' mehr Gebiete einschließt (bzw. ausschließt) als K , was der Wahl von K und H' widerspricht.

K hat in M außer den Brücken in $M - e_0$ noch zusätzlich die Brücke e_0 . Wir wählen nun eine innere Brücke B , die sowohl zu e_0 als auch zu mindestens einer äußeren Brücke $e_1 = \{a_1, b_1\}$ inkompatibel ist. Eine solche Brücke muss es geben, da wir sonst alle mit e_0 inkompatiblen inneren Brücken nach außen klappen und e_0 als innere Brücke hinzunehmen könnten, ohne die Planarität zu verletzen.

Wir benutzen K und die drei Brücken e_0, e_1 und B , um eine Unterteilung des $K_{3,3}$ oder des K_5 in M zu finden. Hierzu geben wir entweder zwei disjunkte Mengen $A_1, A_2 \subseteq V'$ mit jeweils 3 Knoten an, so dass

9 knotendisjunkte Pfade zwischen allen Knoten $a \in A_1$ und $b \in A_2$ existieren. Oder wir geben eine Menge $A \subseteq V'$ mit fünf Knoten an, so dass 10 knotendisjunkte Pfade zwischen je zwei Knoten $a, b \in A$ existieren. Da e_0 und e_1 inkompatibel sind, können wir annehmen, dass die vier Knoten a_0, a_1, b_0, b_1 in dieser Reihenfolge auf K liegen.

Fall 1: B hat einen Kontaktpunkt $k_1 \notin \{a_0, a_1, b_0, b_1\}$. Aus Symmetriegründen können wir $k_1 \in K(a_0, a_1)$ annehmen. Da B weder zu e_0 noch zu e_1 kompatibel ist, hat B weitere Kontaktpunkte $k_2 \in K(b_0, a_0)$ und $k_3 \in K(a_1, b_1)$, wobei $k_2 = k_3$ sein kann.

Fall 1a: Ein Knoten $k_i \in \{k_2, k_3\}$ liegt auf dem Bogen $K(b_0, b_1)$. In diesem Fall existieren 9 knotendisjunkte Pfade zwischen $\{a_0, a_1, k_i\}$ und $\{b_0, b_1, k_1\}$.

Fall 1b: $K(b_0, b_1) \cap \{k_2, k_3\} = \emptyset$. In diesem Fall ist $k_2 \in K[b_1, a_0]$ und $k_3 \in K(a_1, b_0]$. Dann gibt es in B einen Knoten u , von dem aus 3 knotendisjunkte Pfade zu $\{k_1, k_2, k_3\}$ existieren. Folglich gibt es 9 knotendisjunkte Pfade zwischen $\{a_0, a_1, u\}$ und $\{k_1, k_2, k_3\}$.

Fall 2: Alle Kontaktpunkte von B liegen in der Menge $\{a_0, a_1, b_0, b_1\}$. Da B inkompatibel zu e_0 und e_1 ist, müssen in diesem Fall alle vier Punkte zu B gehören. Sei P_0 ein a_0 - b_0 -Pfad in B und sei P_1 ein a_1 - b_1 -Pfad in B . Sei u der erste Knoten auf P_0 , der auch auf P_1 liegt und sei v der letzte solche Knoten.

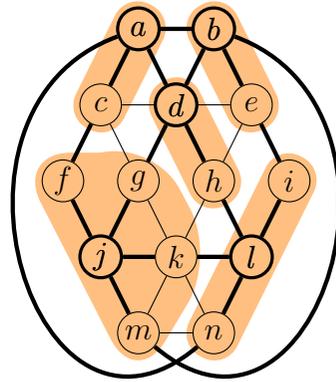
Fall 2a: $u = v$. Dann gibt es in B vier knotendisjunkte Pfade von u zu $\{a_0, a_1, b_0, b_1\}$ und somit existieren in M 10 knotendisjunkte Pfade zwischen den Knoten u, a_0, a_1, b_0, b_1 .

Fall 2b: $u \neq v$. Durch u und v wird der Pfad P_1 in drei Teilpfade P_{xu}, P_{uv} und P_{vy} unterteilt, wobei die Indizes die Endpunkte bezeichnen und $\{x, y\} = \{a_1, b_1\}$ ist.

Somit gibt es in B drei Pfade zwischen u und jedem Knoten in $\{a_0, v, x\}$ und zwei Pfade zwischen v und jedem Knoten in $\{b_0, y\}$, die alle 5 knotendisjunkt sind. Folglich gibt es in M 9 knotendisjunkte Pfade zwischen $\{a_0, v, x\}$ und $\{b_0, y, u\}$. ■

Beispiel 2.21. Der nebenstehende Graph ist nicht planar, da wir den K_5 durch Kontraktion der farblich unterlegten Teilgraphen als Minor von G erhalten.

Alternativ lässt sich der K_5 auch als ein topologischer Minor von G erhalten, indem wir die dünnen Kanten entfernen und in dem resultierenden Teilgraphen alle Knoten vom Grad 2 überbrücken. \triangleleft



Eine unmittelbare Folgerung aus dem Satz von Kuratowski ist folgende Charakterisierung der Klasse der planaren Graphen.

Korollar 2.22 (Wagner 1937). *Ein Graph ist genau dann planar, wenn er $\{K_{3,3}, K_5\}$ -frei ist.*

Satz 2.23 (Satz von Robertson und Seymour, 1983-2004). *Sei \mathcal{K} eine Graphklasse, die unter Minorenbildung abgeschlossen ist. Dann gibt es eine endliche Menge \mathcal{H} von Graphen mit*

$$\mathcal{K} = \{G \mid G \text{ ist } \mathcal{H}\text{-frei}\}.$$

*Die Graphen in \mathcal{H} sind bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt und heißen **verbotene Minoren** für die Klasse \mathcal{K} .*

Eine interessante Folgerung aus diesem Satz ist, dass jede unendliche Graphklasse zwei Graphen G und H enthält, so dass H ein Minor von G ist. Das Problem, für zwei gegebene Graphen G und H zu entscheiden, ob H ein Minor von G ist, ist zwar NP-vollständig (da sich das Hamiltonkreisproblem darauf reduzieren lässt). Für einen festen Graphen H ist das Problem dagegen effizient entscheidbar.

Satz 2.24 (Robertson und Seymour, 1995). *Für jeden Graphen H gibt es einen $O(n^3)$ -zeitbeschränkten Algorithmus, der für einen gegebenen Graphen G entscheidet, ob er H -frei ist.*

Korollar 2.25. *Die Zugehörigkeit zu jeder unter Minorenbildung abgeschlossenen Graphklasse \mathcal{K} ist in P entscheidbar.*

Der Entscheidungsalgorithmus für \mathcal{K} lässt sich allerdings nur angeben, wenn wir die verbotenen Minoren für \mathcal{K} kennen. Leider ist der Beweis von Theorem 2.23 in dieser Hinsicht nicht konstruktiv, so dass der Nachweis, dass \mathcal{K} unter Minorenbildung abgeschlossen ist, nicht automatisch zu einem effizienten Erkennungsalgorithmus für \mathcal{K} führt.

2.2 Färben von chordalen Graphen

Chordalen Graphen treten in vielen Anwendungen auf, z.B. sind alle Intervall- und alle Komparabilitätsgraphen (auch transitiv orientierbare Graphen genannt) chordal. Wir werden sehen, dass sich für chordale Graphen effizient eine optimale Knotenfärbung berechnen lässt.

Definition 2.26. *Ein Graph $G = (V, E)$ heißt **chordal** oder **trianguliert**, wenn jeder Kreis $K = (u_1, \dots, u_l, u_1)$ der Länge $l \geq 4$ in G mindestens eine Sehne hat.*

G ist also genau dann chordal, wenn er keinen induzierten Kreis der Länge $l \geq 4$ enthält (ein induzierter Kreis ist ein induzierter Teilgraph $G[V']$, $V' \subseteq V$, der ein Kreis ist). Dies zeigt, dass die Klasse der chordalen Graphen unter induzierter Teilgraphbildung abgeschlossen ist (aber nicht unter Teilgraphbildung). Jede solche Graphklasse \mathcal{G} ist durch eine Familie von minimalen **verbotenen induzierten Teilgraphen** H_i charakterisiert, die bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt sind. Die Graphen H_i gehören also nicht zu \mathcal{G} , aber sobald wir einen Knoten daraus entfernen, erhalten wir einen Graphen in \mathcal{G} . Die Klasse der chordalen Graphen hat die Familie der Kreise C_n der Länge $n \geq 4$ als verbotene induzierte Teilgraphen.

Lemma 2.27. *Für einen Graphen G sind folgende Aussagen äquivalent.*

- (i) G ist chordal.

- (ii) Jeder inklusionsminimale Separator von G ist eine Clique.
- (iii) Jedes Paar von nicht adjazenten Knoten x und y in G hat einen x - y -Separator S , der eine Clique ist.

Beweis. Um zu zeigen, dass die zweite Aussage aus der ersten folgt, nehmen wir an, dass G einen minimalen Separator S hat, der zwei nicht adjazente Knoten x und y enthält. Seien $G[V_1]$ und $G[V_2]$ zwei Komponenten in $G - S$, die durch S getrennt werden. Da S minimal ist, sind die beiden Knoten x und y sowohl mit $G[V_1]$ als auch mit $G[V_2]$ verbunden. Betrachte die beiden Teilgraphen $G_i = G[V_i \cup \{x, y\}]$ ($i = 1, 2$) und wähle jeweils einen kürzesten x - y -Pfad P_i in G_i . Da diese eine Länge ≥ 2 haben, ist $K = P_1 \cup P_2$ ein Kreis der Länge ≥ 4 . Aufgrund der Konstruktion ist zudem klar, dass K keine Sehnen in G hat.

Dass die zweite Aussage die dritte impliziert, ist klar, da jedes Paar von nicht adjazenten Knoten x und y einen x - y -Separator S hat, und S eine Clique sein muss, wenn wir S inklusionsminimal wählen.

Um zu zeigen, dass die erste Aussage aus der dritten folgt, nehmen wir an, dass G nicht chordal ist. Dann gibt es in G einen induzierten Kreis K der Länge ≥ 4 . Seien x und y zwei beliebige nicht adjazente Knoten auf K und sei S ein x - y -Separator in G . Dann muss S mindestens zwei nicht adjazente Knoten aus K enthalten. ■