Vorlesungsskript

Graphalgorithmen

Wintersemester 2018/19

Prof. Dr. Johannes Köbler
Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Komplexität und Kryptografie

31. Oktober 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Graphentheoretische Grundlagen

Definition 1.1. *Ein* ***(ungerichteter) Graph*** *ist ein Paar* $G = (V, E)$*, wobei*

V - *eine endliche Menge von* ***Knoten/Ecken*** *und*

E - *die Menge der* ***Kanten*** *ist.*

Hierbei gilt

$$E \subseteq \binom{V}{2} = \Big\{\{u, v\} \subseteq V \mid u \neq v\Big\}.$$

Sei $v \in V$ *ein Knoten.*

a) Die ***Nachbarschaft*** *von* v *ist* $N_G(v) = \{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}$.

b) Der ***Grad*** *von* v *ist* $\deg_G(v) = |N_G(v)|$.

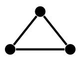
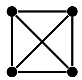
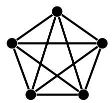
c) Der ***Minimalgrad*** *von* G *ist* $\delta(G) = \min_{v \in V} \deg_G(v)$ *und der* ***Maximalgrad*** *von* G *ist* $\Delta(G) = \max_{v \in V} \deg_G(v)$.

d) Jeder Knoten $u \in V$ *vom Grad* ≤ 1 *heißt* ***Blatt*** *und die übrigen Knoten (vom Grad* ≥ 2*) heißen* ***innere Knoten*** *von* G.

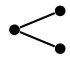
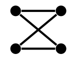
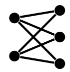
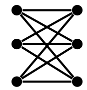
Falls G aus dem Kontext ersichtlich ist, schreiben wir auch einfach $N(v)$, $\deg(v)$, δ usw.

Beispiel 1.2.

- *Der* ***vollständige Graph*** (V, E) *auf* n *Knoten, d.h.* $|V| = n$ *und* $E = \binom{V}{2}$*, wird mit* K_n *und der* ***leere Graph*** $(V, \emptyset)$ *auf* n *Knoten wird mit* E_n *bezeichnet.*

K_1: K_2:  K_3:  K_4:  K_5: 

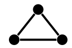
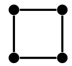
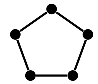
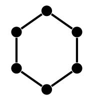
- *Der* ***vollständige bipartite Graph*** (A, B, E) *auf* $a + b$ *Knoten, d.h.* $A \cap B = \emptyset$, $|A| = a$, $|B| = b$ *und* $E = \{\{u, v\} \mid u \in A, v \in B\}$ *wird mit* $\boldsymbol{K_{a,b}}$ *bezeichnet.*

$K_{1,1}$:  $K_{1,2}$:  $K_{2,2}$:  $K_{2,3}$:  $K_{3,3}$: 

- *Der* ***Pfad*** *mit* n *Knoten wird mit* P_n *bezeichnet.*

P_2:  P_3:  P_4:  P_5: 

- *Der* ***Kreis*** *mit* n *Knoten wird mit* C_n *bezeichnet.*

C_3:  C_4:  C_5:  C_6: 

Definition 1.3. *Sei* $G = (V, E)$ *ein Graph.*

a) Eine Knotenmenge $U \subseteq V$ *heißt* ***unabhängig*** *oder* ***stabil****, wenn es keine Kante von* G *mit beiden Endpunkten in* U *gibt, d.h. es gilt* $E \cap \binom{U}{2} = \emptyset$*. Die* ***Stabilitätszahl*** *ist*

$$\alpha(G) = \max\{|U| \mid U \text{ ist stabile Menge in } G\}.$$

b) Eine Knotenmenge $U \subseteq V$ *heißt* ***Clique****, wenn jede Kante mit beiden Endpunkten in* U *in* E *ist, d.h. es gilt* $\binom{U}{2} \subseteq E$*. Die* ***Cliquenzahl*** *ist*

$$\omega(G) = \max\{|U| \mid U \text{ ist Clique in } G\}.$$

c) Ein Graph $G' = (V', E')$ *heißt* ***Sub-/Teil-/Untergraph*** *von* G*, falls* $V' \subseteq V$ *und* $E' \subseteq E$ *ist. Im Fall* $V' = V$ *wird* G' *auch ein* ***(auf)spannender*** *Teilgraph von* G *genannt und wir schreiben für* G' *auch* $G - E''$ *(bzw.* $G = G' \cup E''$*), wobei* $E'' = E - E'$ *die Menge der aus* G *entfernten Kanten ist. Im Fall* $E'' = \{e\}$ *schreiben wir für* G' *auch einfach* $G - e$ *(bzw.* $G = G' \cup e$*).*

*d) Ein k-regulärer spannender Teilgraph von G wird auch als **k-Faktor** von G bezeichnet. Ein d-regulärer Graph G heißt **k-faktorisierbar**, wenn sich G in $l = d/k$ kantendisjunkte k-Faktoren $G_1, \ldots, G_l$ zerlegen lässt.*

*e) Ein Subgraph $G' = (V', E')$ heißt (**durch V'**) **induziert**, falls $E' = E \cap \binom{V'}{2}$ ist. Für G' schreiben wir dann auch $G[V']$ oder $G - V''$, wobei $V'' = V - V'$ die Menge der aus G entfernten Knoten ist. Ist $V'' = \{v\}$, so schreiben wir für G' auch einfach $G - v$ und im Fall $V' = \{v_1, \ldots, v_k\}$ auch $G[v_1, \ldots, v_k]$.*

*f) Ein **Weg** ist eine Folge von (nicht notwendig verschiedenen) Knoten $v_0, \ldots, v_\ell$ mit $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ für $i = 0, \ldots, \ell - 1$. Die **Länge** des Weges ist die Anzahl der durchlaufenen Kanten, also ℓ. Im Fall $\ell = 0$ heißt der Weg **trivial**. Ein Weg $(v_0, \ldots, v_\ell)$ heißt auch **v_0-v_ℓ-Weg**.*

*g) G heißt **zusammenhängend**, falls es für alle Paare $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ einen u-v-Weg gibt.*

h) Die durch die Äquivalenzklassen der Relation

$$Z = \{(u, v) \in V \times V \mid \text{ es gibt in } G \text{ einen } u\text{-}v\text{-Weg}\}$$

*induzierten Teilgraphen heißen **Zusammenhangskomponenten** (engl.* connected components*) oder einfach **Komponenten** von G.*

*i) Eine Menge $S \subseteq V$ heißt **Separator** in G, wenn es zwei Knoten $u, v \in V \setminus S$ gibt, zwischen denen in $G - S$ kein u-v-Weg existiert. Ist $|S| = k$, so nennen wir S auch einen **k-Separator** zwischen u und v oder auch einen **u-v-Separator**.*

*j) Ein Graph G heißt **k-zusammenhängend**, $0 \leq k \leq n - 1$, falls G keinen $(k-1)$-Separator hat. Die größte Zahl k, für die G k-zusammenhängend ist, heißt **Zusammenhangszahl** von G und wird mit $\kappa(G)$ bezeichnet.*

*k) Ein u-v-Weg heißt **einfach** oder **u-v-Pfad**, falls alle durchlaufenen Knoten verschieden sind.*

*l) Ein **Zyklus** ist ein u-v-Weg mit $u = v$.*

*m) Ein **Kreis** ist ein Zyklus $(v_1 \ldots, v_\ell, v_1)$ der Länge $\ell \geq 3$, für den $v_1, \ldots, v_\ell$ paarweise verschieden sind.*

*n) Ein Graph heißt **kreisfrei**, **azyklisch** oder **Wald**, falls er keinen Kreis enthält. Ein **Baum** ist ein zusammenhängender Wald.*

Definition 1.4. *Ein **gerichteter Graph** oder **Digraph** ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei*

*V - eine endliche Menge von **Knoten/Ecken** und*

*E - die Menge der **Kanten** ist.*

Hierbei gilt

$$E \subseteq V \times V = \Big\{(u, v) \mid u, v \in V\Big\},$$

wobei E auch Schlingen (u, u) enthalten kann. Sei $v \in V$ ein Knoten.

*a) Die **Nachfolgermenge** von v ist $N^+(v) = \{u \in V \mid (v, u) \in E\}$.*

*b) Die **Vorgängermenge** von v ist $N^-(v) = \{u \in V \mid (u, v) \in E\}$.*

*c) Die **Nachbarmenge** von v ist $N(v) = N^+(v) \cup N^-(v)$.*

*d) Der **Ausgangsgrad** von v ist $\deg^+(v) = |N^+(v)|$ und der **Eingangsgrad** von v ist $\deg^-(v) = |N^-(v)|$. Der **Grad** von v ist $\deg(v) = \deg^+(v) + \deg^-(v)$.*

*e) Ein **(gerichteter) v_0-v_ℓ-Weg** ist eine Folge von Knoten $v_0, \ldots, v_\ell$ mit $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für $i = 0, \ldots, \ell - 1$.*

*f) Ein **(gerichteter) Zyklus** ist ein gerichteter u-v-Weg mit $u = v$.*

*g) Ein gerichteter Weg heißt **einfach** oder **(gerichteter) Pfad**, falls alle durchlaufenen Knoten verschieden sind.*

*h) Ein **(gerichteter) Kreis** in G ist ein gerichteter Zyklus $(v_1 \ldots, v_\ell, v_1)$ der Länge $\ell \geq 1$, für den $v_1, \ldots, v_\ell$ paarweise verschieden sind.*

*i) G heißt **kreisfrei** oder **azyklisch**, wenn es in G keinen gerichteten Kreis gibt.*

*j) G heißt **stark zusammenhängend**, wenn es in G für jedes Knotenpaar $u \neq v \in V$ sowohl einen u-v-Pfad als auch einen v-u-Pfad gibt.*

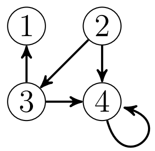
Die ***Adjazenzmatrix*** eines Graphen bzw. Digraphen $G = (V, E)$ mit (geordneter) Knotenmenge $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ ist die $(n \times n)$-Matrix $A = (a_{ij})$ mit den Einträgen

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{bzw.} \qquad a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

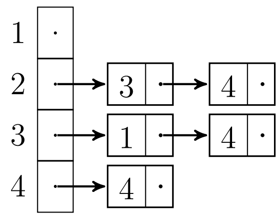
Für ungerichtete Graphen ist die Adjazenzmatrix symmetrisch mit $a_{ii} = 0$ für $i = 1, \dots, n$.

Bei der ***Adjazenzlisten-Darstellung*** wird für jeden Knoten v_i eine Liste mit seinen Nachbarn verwaltet. Im gerichteten Fall verwaltet man entweder nur die Liste der Nachfolger oder zusätzlich eine weitere für die Vorgänger. Falls die Anzahl der Knoten statisch ist, organisiert man die Adjazenzlisten in einem Feld, d.h. das Feldelement mit Index i verweist auf die Adjazenzliste von Knoten v_i. Falls sich die Anzahl der Knoten dynamisch ändert, so werden die Adjazenzlisten typischerweise ebenfalls in einer doppelt verketteten Liste verwaltet.

Beispiel 1.5.
Betrachte den gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit $V = \{1, 2, 3, 4\}$ und $E = \{(2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4), (4, 4)\}$. Dieser hat folgende Adjazenzmatrix- und Adjazenzlisten-Darstellung:



	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	0	0	1	1
3	1	0	0	1
4	0	0	0	1



◁

2 Färben von Graphen

Definition 2.1. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und sei $k \in \mathbb{N}$.*

*a) Eine Abbildung $f\colon V \to \mathbb{N}$ heißt **Färbung** von G, wenn $f(u) \neq f(v)$ für alle $\{u, v\} \in E$ gilt.*

*b) G heißt **k-färbbar**, falls eine Färbung $f\colon V \to \{1, \dots, k\}$ existiert.*

*c) Die **chromatische Zahl** ist*

$$\chi(G) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ ist } k\text{-färbbar}\}.$$

Beispiel 2.2.

$$\chi(E_n) = 1,\ \chi(K_{n,m}) = 2,\ \chi(K_n) = n,$$

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & n \text{ gerade} \\ 3, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ein wichtiges Entscheidungsproblem ist, ob ein gegebener Graph k-färbbar ist. Dieses Problem ist für jedes feste $k \geq 3$ schwierig.

***k*-Färbbarkeit (k-Coloring):**

Gegeben: Ein Graph G.
Gefragt: Ist G k-färbbar?

Satz 2.3. *k-Coloring ist für $k \geq 3$ NP-vollständig.*

Das folgende Lemma setzt die chromatische Zahl $\chi(G)$ in Beziehung zur Stabilitätszahl $\alpha(G)$.

Lemma 2.4. *$n/\alpha(G) \leq \chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$.*

Beweis. Sei G ein Graph und sei c eine $\chi(G)$-Färbung von G. Da dann die Mengen $S_i = \{u \in V \mid c(u) = i\}$, $i = 1, \ldots, \chi(G)$, stabil sind, folgt $|S_i| \leq \alpha(G)$ und somit gilt

$$n \;=\; \sum_{i=1}^{\chi(G)} |S_i| \;\leq\; \chi(G)\alpha(G).$$

Für den Beweis von $\chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$ sei S eine stabile Menge in G mit $|S| = \alpha(G)$. Dann ist $G - S$ k-färbbar für ein $k \leq n - |S|$. Da wir alle Knoten in S mit der Farbe $k+1$ färben können, folgt $\chi(G) \leq k + 1 \leq n - \alpha(G) + 1$. ■

Beide Abschätzungen sind scharf, können andererseits aber auch beliebig schlecht werden.

Lemma 2.5. $\binom{\chi(G)}{2} \leq m$ *und somit* $\chi(G) \leq 1/2 + \sqrt{2m + 1/4}$.

Beweis. Zwischen je zwei Farbklassen einer optimalen Färbung muss es mindestens eine Kante geben. ■

Die chromatische Zahl steht auch in Beziehung zur Cliquenzahl $\omega(G)$ und zum Maximalgrad $\Delta(G)$:

Lemma 2.6. $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Beweis. Die erste Ungleichung folgt daraus, dass die Knoten einer maximal großen Clique unterschiedliche Farben erhalten müssen.

Um die zweite Ungleichung zu erhalten, betrachten wir folgenden Färbungsalgorithmus:

Algorithmus `greedy-color`

input ein Graph $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$
$c(v_1) := 1$
for $i := 2$ **to** n **do**
  $F_i := \{c(v_j) \mid j < i, v_j \in N(v_i)\}$
  $c(v_i) := \min\{k \geq 1 \mid k \notin F_i\}$

Da für die Farbe $c(v_i)$ von v_i nur $|F_i| \leq \Delta(G)$ Farben verboten sind, gilt $c(v_i) \leq \Delta(G) + 1$. ■

2.1 Färben von planaren Graphen

Ein Graph G heißt ***planar***, wenn er so in die Ebene einbettbar ist, dass sich zwei verschiedene Kanten höchstens in ihren Endpunkten berühren. Dabei werden die Knoten von G als Punkte und die Kanten von G als Verbindungslinien (genauer: Jordankurven) zwischen den zugehörigen Endpunkten dargestellt.

Bereits im 19. Jahrhundert wurde die Frage aufgeworfen, wie viele Farben höchstens benötigt werden, um eine Landkarte so zu färben, dass aneinander grenzende Länder unterschiedliche Farben erhalten. Offensichtlich lässt sich eine Landkarte in einen planaren Graphen transformieren, indem man für jedes Land einen Knoten zeichnet und benachbarte Länder durch eine Kante verbindet. Länder, die sich nur in einem Punkt berühren, gelten dabei nicht als benachbart.

Die Vermutung, dass 4 Farben ausreichen, wurde 1878 von Kempe „bewiesen“ und erst 1890 entdeckte Heawood einen Fehler in Kempes „Beweis“. Übrig blieb der *5-Farben-Satz*. Der *4-Farben-Satz* wurde erst 1976 von Appel und Haken bewiesen. Hierbei handelt es sich jedoch nicht um einen Beweis im klassischen Sinne, da zur Überprüfung der vielen auftretenden Spezialfälle Computer benötigt werden.

Satz 2.7 (Appel, Haken 1976)**.**
Jeder planare Graph ist 4-färbbar.

Aus dem Beweis des 4-Farben-Satzes von Appel und Haken lässt sich ein 4-Färbungsalgorithmus für planare Graphen mit einer Laufzeit von $\mathcal{O}(n^4)$ gewinnen.

In 1997 fanden Robertson, Sanders, Seymour und Thomas einen einfacheren Beweis für den 4-Farben-Satz, welcher zwar einen deutlich schnelleren $\mathcal{O}(n^2)$ Algorithmus liefert, aber ebenfalls nur mit Computer-Unterstützung verifizierbar ist.

Beispiel 2.8. *Wie die folgenden Einbettungen von K_4 und $K_{2,3}$ in die Ebene zeigen, sind K_4 und $K_{2,3}$ planar.*

◁

Zur Beantwortung der Frage, ob auch K_5 und $K_{3,3}$ planar sind, betrachten wir die ***Gebiete***, die bei der Einbettung von (zusammenhängenden) Graphen in die Ebene entstehen. Dabei gehören 2 Punkte zum selben Gebiet, falls es zwischen ihnen eine Verbindungslinie gibt, die keine Kante des eingebetten Graphen kreuzt oder berührt. Nur eines dieser Gebiete ist unbeschränkt und dieses wird als ***äußeres Gebiet*** bezeichnet. Die Anzahl der Gebiete von G bezeichnen wir mit $r(G)$ oder kurz mit r. Die begrenzenden Kanten eines Gebietes g bilden seinen ***Rand*** $rand(g)$. Ihre Anzahl bezeichnen wir mit $d(g)$, wobei Kanten $\{u, v\}$, an die g von beiden Seiten grenzt, doppelt gezählt werden.

Der ***Rand*** $rand(g)$ eines Gebiets g ist die (zirkuläre) Folge aller Kanten, die an g grenzen, wobei man jede Kante so durchläuft, dass g „in Fahrtrichtung links" liegt bzw. jeden Knoten u, den man über eine Kante e erreicht, über die im Uhrzeigersinn nächste Kante e' wieder verlässt. Auf diese Weise erhält jede Kante auf dem Rand von g eine Richtung (oder Orientierung).

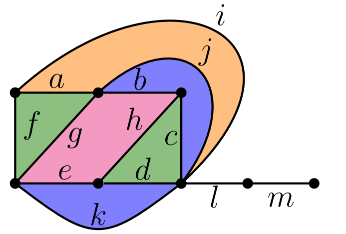
Da jede Kante zur Gesamtlänge $\sum_g d(g)$ aller Ränder den Wert 2 beiträgt (sie wird genau einmal in jeder Richtung durchlaufen), folgt

$$\sum_g d(g) = 2m(G).$$

Wir nennen das Tripel $G' = (V, E, R)$ eine ***ebene Realisierung*** des Graphen $G = (V, E)$, falls es eine Einbettung von G in die Ebene gibt, deren Gebiete die Ränder in R haben. In diesem Fall nennen wir $G' = (V, E, R)$ auch einen ***ebenen Graphen***. Ist G nicht zusammenhängend, so betten wir die Zusammenhangskomponenten von G in die Ebene ein und fassen alle Ränder, die bei diesen Einbettungen entstehen, zu einer Randmenge R zusammen.

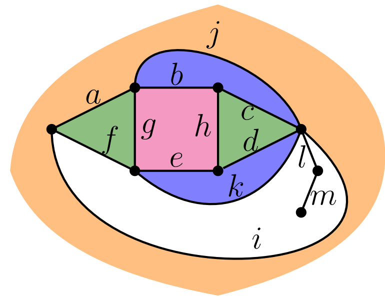
Führen zwei Einbettungen von G in die Ebene auf dieselbe Randmenge R, so werden sie als ***äquivalent*** angesehen. Eine andere Möglichkeit, Einbettungen bis auf Äquivalenz kombinatorisch zu beschreiben, besteht darin, für jeden Knoten u die (zirkuläre) Ordnung π_u aller mit u inzidenten Kanten anzugeben. Man nennt $\pi = \{\pi_u \mid u \in V\}$ ein ***Rotationssystem*** für G, falls es eine entsprechende Einbettung gibt. Rotationssysteme haben den Vorteil, dass sie bei Verwendung der Adjazenzlistendarstellung ohne zusätzlichen Platzaufwand gespeichert werden können, indem man die zu u adjazenten Knoten gemäß π_u anordnet.

Beispiel 2.9. *Die beiden nebenstehenden Einbettungen eines Graphen $G = (V, E)$ in die Ebene haben jeweils 7 Gebiete und führen beide auf den ebenen Graphen $G' = (V, E, R)$ mit den 7 Rändern*



$$R = \{(a, f, g), (a, j, i), (b, g, e, h), (b, c, j), (c, h, d), (d, e, k), (f, i, l, m, m, l, k)\}.$$

Das zugehörige Rotationssystem ist



$$\pi = \{(a, f, i), (a, j, b, g), (b, c, h), (e, k, f, g), (d, e, h), (c, j, i, l, k, d), (l, m), (m)\}.$$

Man beachte, dass sowohl in R als auch in π jede Kante genau zweimal vorkommt. Anstelle von (zirkulären) Kantenfolgen kann man die Elemente von R und π natürlich auch durch entsprechende Knotenfolgen beschreiben. ◁

Satz 2.10 (Polyederformel von Euler, 1750)**.**
Für einen zusammenhängenden ebenen Graphen $G = (V, E, R)$ gilt

$$n(G) - m(G) + r(G) = 2. \qquad (*)$$

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion über die Kantenzahl $m(G) = m$.

$m = 0$: Da G zusammenhängend ist, muss dann $n = 1$ sein.
Somit ist auch $r = 1$, also $(*)$ erfüllt.

$m - 1 \rightsquigarrow m$: Sei G ein zusammenhängender ebener Graph mit m Kanten.
Ist G ein Baum, so entfernen wir ein Blatt und erhalten einen zusammenhängenden ebenen Graphen G' mit $n' = n - 1$ Knoten, $m' = m - 1$ Kanten und $r' = r$ Gebieten. Nach IV folgt $n - m + r = (n - 1) - (m - 1) + r = n' - m' + r' = 2$.
Falls G kein Baum ist, entfernen wir eine Kante auf einem Kreis in G und erhalten einen zusammenhängenden ebenen Graphen G' mit $n' = n$ Knoten, $m' = m - 1$ Kanten und $r' = r - 1$ Gebieten. Nach IV folgt $n - m + r = n - (m - 1) + (r - 1) = n' - m' + r' = 2$. ■

Korollar 2.11. *Sei $G = (V, E)$ ein planarer Graph mit $n \geq 3$ Knoten. Dann ist $m \leq 3n - 6$. Falls G dreiecksfrei ist, gilt sogar $m \leq 2n - 4$.*

Beweis. O.B.d.A. sei G zusammenhängend. Wir betrachten eine beliebige planare Einbettung von G. Da $n \geq 3$ ist, ist jedes Gebiet g von $d(g) \geq 3$ Kanten umgeben. Daher ist $2m = i = \sum_g d(g) \geq 3r$ bzw. $r \leq 2m/3$. Eulers Formel liefert

$$m = n + r - 2 \leq n + 2m/3 - 2,$$

was $(1 - 2/3)m \leq n - 2$ und somit $m \leq 3n - 6$ impliziert.
Wenn G dreiecksfrei ist, ist jedes Gebiet von $d(g) \geq 4$ Kanten umgeben. Daher ist $2m = i = \sum_g d(g) \geq 4r$ bzw. $r \leq m/2$. Eulers Formel liefert daher $m = n + r - 2 \leq n + m/2 - 2$, was $m/2 \leq n - 2$ und somit $m \leq 2n - 4$ impliziert. ■

Korollar 2.12. *Die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ sind nicht planar.*

Beweis. Wegen $n(K_5) = 5$, also $3n(K_5) - 6 = 9$, und wegen $m(K_5) = \binom{5}{2} = 10$ gilt $m(K_5) \not\leq 3n(K_5) - 6$.
Wegen $n(K_{3,3}) = 6$, also $2n(K_{3,3}) - 4 = 8$, und wegen $m(K_{3,3}) = 3 \cdot 3 = 9$ gilt $m(K_{3,3}) \not\leq 2n(K_{3,3}) - 4$. ■

Als weitere interessante Folgerung aus der Polyederformel können wir zeigen, dass jeder planare Graph einen Knoten v vom Grad $\deg(v) \leq 5$ hat.

Korollar 2.13. *Jeder planare Graph hat einen Minimalgrad $\delta \leq 5$.*

Beweis. Für $n \leq 6$ ist die Behauptung klar. Für $n > 6$ impliziert die Annahme $\delta \geq 6$ die Ungleichung

$$m = \tfrac{1}{2} \sum_{u \in V} \deg(u) \geq \tfrac{1}{2} \sum_{u \in V} 6 = 3n,$$

was im Widerspruch zu $m \leq 3n - 6$ steht. ■

Definition 2.14. *Seien $G = (V, E)$ und H Graphen und seien $u, v \in V$.*

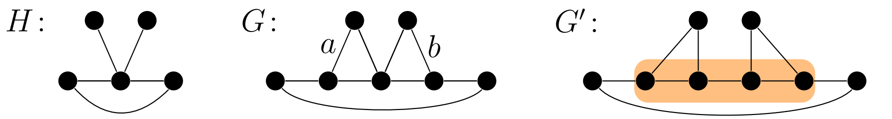
- *Durch* ***Fusion*** *von u und v entsteht aus G der Graph $G_{uv} = (V - \{v\}, E')$ mit*

  $$E' = \{e \in E \mid v \notin e\} \cup \{\{u, v'\} \mid \{v, v'\} \in E - \{u, v\}\}.$$

  Ist $e = \{u, v\}$ eine Kante von G (also $e \in E$), so sagen wir auch, G_{uv} entsteht aus G durch ***Kontraktion*** *der Kante e. Hat zudem v den Grad 2 mit $N_G(v) = \{u, w\}$, so sagen wir auch, G_{uv} entsteht aus G durch* ***Überbrückung*** *des Knotens v bzw. G aus G_{uv} durch* ***Unterteilung*** *der Kante $\{u, w\}$.*

- *G heißt zu H* **kontrahierbar**, *falls H aus einer isomorphen Kopie von G durch wiederholte Kontraktionen gewonnen werden kann.*
- *G heißt* **Unterteilung** *von H, falls G aus einer isomorphen Kopie von H durch wiederholte Unterteilungen gewonnen werden kann.*
- *H heißt* **Minor** *von G, wenn ein Teilgraph von G zu H kontrahierbar ist, und* **topologischer Minor**, *wenn ein Teilgraph von G eine Unterteilung von H ist.*
- *G heißt* **H-frei**, *falls H kein Minor von G ist. Für eine Menge $\mathcal{H}$ von Graphen heißt G* **$\mathcal{H}$-frei**, *falls G für alle $H \in \mathcal{H}$ H-frei ist.*

Beispiel 2.15. *Betrachte folgende Graphen:*



G ist keine Unterteilung von H, da G Knoten vom Grad 3 hat, aber H nicht. Entfernen wir jedoch die beiden Kanten a und b aus G, so ist der resultierende Teilgraph eine Unterteilung von H, d.h. H ist ein topologischer Minor von G. H ist aber kein topologischer Minor von G', da H einen Knoten vom Grad 4 hat und G' nur Knoten vom Grad ≤ 3. Da durch Kontraktion der drei umrandeten Kanten ein zu H isomorpher Graph entsteht, ist H aber ein Minor von G'. $\triangleleft$

Es ist klar, dass die Klasse $\mathcal{K}$ der planaren Graphen zwar unter Unterteilung und (topologischer) Minorenbildung abgeschlossen ist (d.h. wenn $G \in \mathcal{K}$ und H ein Minor oder eine Unterteilung von G ist, dann folgt $H \in \mathcal{K}$), aber nicht unter Fusion.

Nach Definition lässt sich jeder (topologische) Minor H von G aus einem zu G isomorphen Graphen durch wiederholte Anwendung folgender Operationen gewinnen:

- Entfernen einer Kante oder eines Knotens,
- Kontraktion einer Kante (bzw. Überbrückung eines Knotens).

Da die Kontraktionen (bzw. Überbrückungen) o.B.d.A. auch zuletzt ausgeführt werden können, gilt hiervon auch die Umkehrung. Zudem ist leicht zu sehen, dass G und H genau dann (topologische) Minoren voneinander sind, wenn sie isomorph sind.

Satz 2.16 (Kempe 1878, Heawood 1890)**.**
Jeder planare Graph ist 5-färbbar.

Beweis. Wir beweisen den Satz durch Induktion über n.

$n = 1$: Klar.

$n - 1 \rightsquigarrow n$: Da G planar ist, existiert ein Knoten u mit $\deg(u) \leq 5$. Im Fall $\deg(u) \leq 4$ entfernen wir u aus G. Andernfalls hat u zwei Nachbarn v und w, die nicht durch eine Kante verbunden sind (andernfalls wäre K_5 ein Teilgraph von G). In diesem Fall entfernen wir alle mit u inzidenten Kanten außer $\{u, v\}$ und $\{u, w\}$ und kontrahieren diese beiden Kanten zum Knoten v.

In beiden Fällen ist der resultierende Graph G' ein Minor von G und daher planar. Da G' zudem höchstens $n - 1$ Knoten hat, existiert nach IV eine 5-Färbung c' für G'. Da wir im 2. Fall dem Knoten w die Farbe $c'(v)$ geben können, haben die Nachbarn von u höchstens 4 verschiedene Farben und wir können G 5-färben. ■

Kuratowski konnte 1930 beweisen, dass jeder nichtplanare Graph G den $K_{3,3}$ oder den K_5 als topologischen Minor enthält. Für den Beweis benötigen wir noch folgende Notationen.

Definition 2.17. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph.*

- *G heißt **zusammenhängend**, falls es für alle Paare $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ einen u-v-Weg gibt.*
- *Die durch die Äquivalenzklassen $V_i \subseteq V$ der Relation*

$$Z = \{(u, v) \in V \times V \mid \text{ es gibt in } G \text{ einen } u\text{-}v\text{-Weg}\}$$

  *induzierten Teilgraphen $G[V_i]$ heißen **Zusammenhangskomponenten** (engl.* connected components*) oder einfach **Komponenten** von G.*
- *Eine Menge $S \subseteq V$ heißt **Separator** in G, wenn es zwei Knoten $u, v \in V \setminus S$ gibt, zwischen denen in $G - S$ kein u-v-Weg existiert. Ist $|S| = k$, so nennen wir S auch einen **k-Separator** zwischen u und v oder auch einen **u-v-Separator** der Größe k. Ein 1-Separator wird auch **Artikulation** oder **Schnittknoten** von G genannt.*
- *Ein Graph G heißt **k-zusammenhängend**, $0 \leq k \leq n - 1$, falls G keinen $(k - 1)$-Separator hat. Die größte Zahl k, für die G k-zusammenhängend ist, heißt **Zusammenhangszahl** von G und wird mit $\kappa(G)$ bezeichnet.*

Ein Graph G mit $n \geq 2$ Knoten ist also genau dann zusammenhängend, wenn $\kappa(G) \geq 1$ ist.