Vorlesungsskript

Graphalgorithmen

Wintersemester 2018/19

Prof. Dr. Johannes Köbler
Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Komplexität und Kryptografie

17. Oktober 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Graphentheoretische Grundlagen

Definition 1.1. *Ein **(ungerichteter) Graph** ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei*

V - *eine endliche Menge von **Knoten/Ecken** und*

E - *die Menge der **Kanten** ist.*

Hierbei gilt

$$E \subseteq \binom{V}{2} = \Big\{\{u, v\} \subseteq V \mid u \neq v\Big\}.$$

Sei $v \in V$ ein Knoten.

*a) Die **Nachbarschaft** von v ist $N_G(v) = \{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}$.*

*b) Der **Grad** von v ist $\deg_G(v) = |N_G(v)|$.*

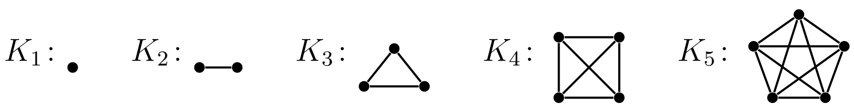
*c) Der **Minimalgrad** von G ist $\delta(G) = \min_{v\in V} \deg_G(v)$ und der **Maximalgrad** von G ist $\Delta(G) = \max_{v\in V} \deg_G(v)$.*

*d) Jeder Knoten $u \in V$ vom Grad ≤ 1 heißt **Blatt** und die übrigen Knoten (vom Grad ≥ 2) heißen **innere Knoten** von G.*

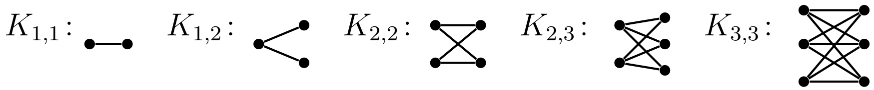
Falls G aus dem Kontext ersichtlich ist, schreiben wir auch einfach $N(v)$, $\deg(v)$, δ usw.

Beispiel 1.2.

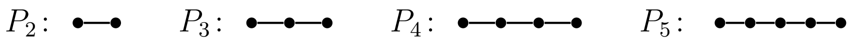
- *Der **vollständige Graph** (V, E) auf n Knoten, d.h. $|V| = n$ und $E = \binom{V}{2}$, wird mit K_n und der **leere Graph** $(V, \emptyset)$ auf n Knoten wird mit E_n bezeichnet.*



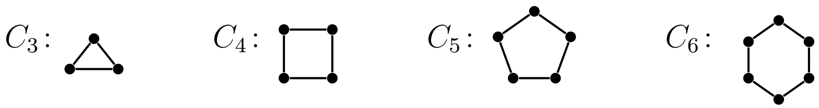
- *Der **vollständige bipartite Graph** (A, B, E) auf $a + b$ Knoten, d.h. $A \cap B = \emptyset$, $|A| = a$, $|B| = b$ und $E = \{\{u, v\} \mid u \in A, v \in B\}$ wird mit $\boldsymbol{K_{a,b}}$ bezeichnet.*



- *Der **Pfad** mit n Knoten wird mit P_n bezeichnet.*



- *Der **Kreis** mit n Knoten wird mit C_n bezeichnet.*



Definition 1.3. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph.*

*a) Eine Knotenmenge $U \subseteq V$ heißt **unabhängig** oder **stabil**, wenn es keine Kante von G mit beiden Endpunkten in U gibt, d.h. es gilt $E \cap \binom{U}{2} = \emptyset$. Die **Stabilitätszahl** ist*

$$\alpha(G) = \max\{|U| \mid U \text{ ist stabile Menge in } G\}.$$

*b) Eine Knotenmenge $U \subseteq V$ heißt **Clique**, wenn jede Kante mit beiden Endpunkten in U in E ist, d.h. es gilt $\binom{U}{2} \subseteq E$. Die **Cliquenzahl** ist*

$$\omega(G) = \max\{|U| \mid U \text{ ist Clique in } G\}.$$

*c) Ein Graph $G' = (V', E')$ heißt **Sub-/Teil-/Untergraph** von G, falls $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$ ist. Im Fall $V' = V$ wird G' auch ein **(auf)spannender** Teilgraph von G genannt und wir schreiben für G' auch $G - E''$ (bzw. $G = G' \cup E''$), wobei $E'' = E - E'$ die Menge der aus G entfernten Kanten ist. Im Fall $E'' = \{e\}$ schreiben wir für G' auch einfach $G - e$ (bzw. $G = G' \cup e$).*

d) *Ein k-regulärer spannender Teilgraph von G wird auch als **k-Faktor** von G bezeichnet. Ein d-regulärer Graph G heißt **k-faktorisierbar**, wenn sich G in $l = d/k$ kantendisjunkte k-Faktoren $G_1, \dots, G_l$ zerlegen lässt.*

e) *Ein Subgraph $G' = (V', E')$ heißt **(durch V') induziert**, falls $E' = E \cap \binom{V'}{2}$ ist. Für G' schreiben wir dann auch $G[V']$ oder $G - V''$, wobei $V'' = V - V'$ die Menge der aus G entfernten Knoten ist. Ist $V'' = \{v\}$, so schreiben wir für G' auch einfach $G - v$ und im Fall $V' = \{v_1, \dots, v_k\}$ auch $G[v_1, \dots, v_k]$.*

f) *Ein **Weg** ist eine Folge von (nicht notwendig verschiedenen) Knoten $v_0, \dots, v_\ell$ mit $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ für $i = 0, \dots, \ell - 1$. Die **Länge** des Weges ist die Anzahl der durchlaufenen Kanten, also ℓ. Im Fall $\ell = 0$ heißt der Weg **trivial**. Ein Weg $(v_0, \dots, v_\ell)$ heißt auch **v_0-v_ℓ-Weg**.*

g) *Ein Graph $G = (V, E)$ heißt **zusammenhängend**, falls es für alle Paare $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ einen u-v-Weg gibt.*

h) *Ein **Zyklus** ist ein u-v-Weg der Länge $\ell \geq 2$ mit $u = v$.*

i) *Ein u-v-Weg heißt **einfach** oder **u-v-Pfad**, falls alle durchlaufenen Knoten verschieden sind.*

j) *Ein **Kreis** ist ein Zyklus $(v_1 \dots, v_\ell, v_1)$ der Länge $\ell \geq 3$, für den $v_1, \dots, v_\ell$ paarweise verschieden sind.*

k) *Ein Graph heißt **kreisfrei**, **azyklisch** oder **Wald**, falls er keinen Kreis enthält. Ein **Baum** ist ein zusammenhängender Wald.*

Es ist leicht zu sehen, dass die Relation

$$Z = \{(u, v) \in V \times V \mid \text{ es gibt in } G \text{ einen } u\text{-}v\text{-Weg}\}$$

eine Äquivalenzrelation ist. Die durch die Äquivalenzklassen von Z induzierten Teilgraphen heißen die ***Zusammenhangskomponenten*** (engl. *connected components*) oder einfach Komponenten von G.

Definition 1.4. *Ein **gerichteter Graph** oder **Digraph** ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei*

*V - eine endliche Menge von **Knoten/Ecken** und*

*E - die Menge der **Kanten** ist.*

Hierbei gilt

$$E \subseteq V \times V = \Big\{(u, v) \mid u, v \in V\Big\},$$

wobei E auch Schlingen (u, u) enthalten kann. Sei $v \in V$ ein Knoten.

a) *Die **Nachfolgermenge** von v ist $N^+(v) = \{u \in V \mid (v, u) \in E\}$.*

b) *Die **Vorgängermenge** von v ist $N^-(v) = \{u \in V \mid (u, v) \in E\}$.*

c) *Die **Nachbarmenge** von v ist $N(v) = N^+(v) \cup N^-(v)$.*

d) *Der **Ausgangsgrad** von v ist $\deg^+(v) = |N^+(v)|$ und der **Eingangsgrad** von v ist $\deg^-(v) = |N^-(v)|$. Der **Grad** von v ist $\deg(v) = \deg^+(v) + \deg^-(v)$.*

e) *Ein **(gerichteter) v_0-v_ℓ-Weg** ist eine Folge von Knoten $v_0, \dots, v_\ell$ mit $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für $i = 0, \dots, \ell - 1$.*

f) *Ein **(gerichteter) Zyklus** ist ein gerichteter u-v-Weg der Länge $\ell \geq 1$ mit $u = v$.*

g) *Ein gerichteter Weg heißt **einfach** oder **(gerichteter) Pfad**, falls alle durchlaufenen Knoten verschieden sind.*

h) *Ein **(gerichteter) Kreis** in G ist ein gerichteter Zyklus $(v_1 \dots, v_\ell, v_1)$ der Länge $\ell \geq 1$, für den $v_1, \dots, v_\ell$ paarweise verschieden sind.*

i) *G heißt **kreisfrei** oder **azyklisch**, wenn es in G keinen gerichteten Kreis gibt.*

j) *G heißt **stark zusammenhängend**, wenn es in G für jedes Knotenpaar $u \neq v \in V$ sowohl einen u-v-Pfad als auch einen v-u-Pfad gibt.*

Die ***Adjazenzmatrix*** eines Graphen bzw. Digraphen $G = (V, E)$ mit (geordneter) Knotenmenge $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ ist die $(n \times n)$-Matrix

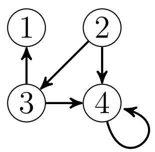
$A = (a_{ij})$ mit den Einträgen

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{bzw.} \qquad a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

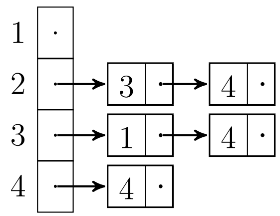
Für ungerichtete Graphen ist die Adjazenzmatrix symmetrisch mit $a_{ii} = 0$ für $i = 1, \ldots, n$.

Bei der ***Adjazenzlisten-Darstellung*** wird für jeden Knoten v_i eine Liste mit seinen Nachbarn verwaltet. Im gerichteten Fall verwaltet man entweder nur die Liste der Nachfolger oder zusätzlich eine weitere für die Vorgänger. Falls die Anzahl der Knoten statisch ist, organisiert man die Adjazenzlisten in einem Feld, d.h. das Feldelement mit Index i verweist auf die Adjazenzliste von Knoten v_i. Falls sich die Anzahl der Knoten dynamisch ändert, so werden die Adjazenzlisten typischerweise ebenfalls in einer doppelt verketteten Liste verwaltet.

Beispiel 1.5.
Betrachte den gerichteten Graphen $G = (V, E)$ *mit* $V = \{1, 2, 3, 4\}$ *und* $E = \{(2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4), (4, 4)\}$. *Dieser hat folgende Adjazenzmatrix- und Adjazenzlisten-Darstellung:*



	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	0	0	1	1
3	1	0	0	1
4	0	0	0	1



◁

2 Färben von Graphen

Definition 2.1. *Sei* $G = (V, E)$ *ein Graph und sei* $k \in \mathbb{N}$.

a) Eine Abbildung $f \colon V \to \mathbb{N}$ *heißt* ***Färbung*** *von* G, *wenn* $f(u) \neq f(v)$ *für alle* $\{u, v\} \in E$ *gilt.*

b) G *heißt* ***k-färbbar****, falls eine Färbung* $f \colon V \to \{1, \ldots, k\}$ *existiert.*

c) Die ***chromatische Zahl*** *ist*

$$\chi(G) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ ist } k\text{-färbbar}\}.$$

Beispiel 2.2.

$$\chi(E_n) = 1,\ \chi(K_{n,m}) = 2,\ \chi(K_n) = n,$$

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & n \text{ gerade} \\ 3, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ein wichtiges Entscheidungsproblem ist, ob ein gegebener Graph k-färbbar ist. Dieses Problem ist für jedes feste $k \geq 3$ schwierig.

***k*-Färbbarkeit** (k-Coloring)**:**

Gegeben: Ein Graph G.
Gefragt: Ist G k-färbbar?

Satz 2.3. k-Coloring *ist für* $k \geq 3$ NP-*vollständig.*

Das folgende Lemma setzt die chromatische Zahl $\chi(G)$ in Beziehung zur Stabilitätszahl $\alpha(G)$.

Lemma 2.4. $n/\alpha(G) \leq \chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$.

Beweis. Sei G ein Graph und sei c eine $\chi(G)$-Färbung von G. Da dann die Mengen $S_i = \{u \in V \mid c(u) = i\}$, $i = 1, \ldots, \chi(G)$, stabil sind, folgt $|S_i| \le \alpha(G)$ und somit gilt

$$n = \sum_{i=1}^{\chi(G)} |S_i| \le \chi(G)\alpha(G).$$

Für den Beweis von $\chi(G) \le n - \alpha(G) + 1$ sei S eine stabile Menge in G mit $|S| = \alpha(G)$. Dann ist $G - S$ k-färbbar für ein $k \le n - |S|$. Da wir alle Knoten in S mit der Farbe $k + 1$ färben können, folgt $\chi(G) \le k + 1 \le n - \alpha(G) + 1$. ■

Beide Abschätzungen sind scharf, können andererseits aber auch beliebig schlecht werden.

Lemma 2.5. $\binom{\chi(G)}{2} \le m$ *und somit* $\chi(G) \le 1/2 + \sqrt{2m + 1/4}$.

Beweis. Zwischen je zwei Farbklassen einer optimalen Färbung muss es mindestens eine Kante geben. ■

Die chromatische Zahl steht auch in Beziehung zur Cliquenzahl $\omega(G)$ und zum Maximalgrad $\Delta(G)$:

Lemma 2.6. $\omega(G) \le \chi(G) \le \Delta(G) + 1$.

Beweis. Die erste Ungleichung folgt daraus, dass die Knoten einer maximal großen Clique unterschiedliche Farben erhalten müssen.

Um die zweite Ungleichung zu erhalten, betrachten wir folgenden Färbungsalgorithmus:

Algorithmus `greedy-color`

```
input ein Graph G = (V, E) mit V = {v_1, ..., v_n}
c(v_1) := 1
for i := 2 to n do
  F_i := {c(v_j) | j < i, v_j ∈ N(v_i)}
  c(v_i) := min{k ≥ 1 | k ∉ F_i}
```

Da für die Farbe $c(v_i)$ von v_i nur $|F_i| \le \Delta(G)$ Farben verboten sind, gilt $c(v_i) \le \Delta(G) + 1$. ■

2.1 Färben von planaren Graphen

Ein Graph G heißt ***planar***, wenn er so in die Ebene einbettbar ist, dass sich zwei verschiedene Kanten höchstens in ihren Endpunkten berühren. Dabei werden die Knoten von G als Punkte und die Kanten von G als Verbindungslinien (genauer: Jordankurven) zwischen den zugehörigen Endpunkten dargestellt, wobei sich die Verbindungslinien höchstens in ihren Endpunkten berühren dürfen.

Bereits im 19. Jahrhundert wurde die Frage aufgeworfen, wie viele Farben höchstens benötigt werden, um eine Landkarte so zu färben, dass aneinander grenzende Länder unterschiedliche Farben erhalten. Offensichtlich lässt sich eine Landkarte in einen planaren Graphen transformieren, indem man für jedes Land einen Knoten zeichnet und benachbarte Länder durch eine Kante verbindet. Länder, die sich nur in einem Punkt berühren, gelten dabei nicht als benachbart.