Übungsblatt 10

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 7. Februar 2019

Aufgabe 50 ***mündlich***

(a) Zeigen Sie, dass es zu jedem OSC S in einem Graphen G eine Knotenüberdeckung U mit $|U| \leq 2\mathit{weight}(S)$ gibt. Ist diese Schranke scharf?

(b) Entwerfen Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der in einem gegebenen Graphen G eine Knotenüberdeckung findet, die höchstens doppelt so groß wie eine minimale Knotenüberdeckung ist.

Aufgabe 51 ***mündlich***

Modifizieren Sie den Algorithmus von Edmonds so, dass er für einen gegebenem Graphen G und ein gegebenes Matching M in G ein Matching M' mit $M \subseteq M'$ berechnet, das maximale Größe unter allen solchen Matchings hat.

Aufgabe 52 Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $k \in \mathbb{N}$. ***mündlich***

Zeigen Sie, dass $tw(G) \leq k$ genau dann gilt, wenn ein k-Baum H existiert, der G als Teilgraphen enthält.

Aufgabe 53 ***mündlich***

Zeigen Sie, dass ein Graph $G = (V, E)$ genau dann ein k-Baum ist, wenn

(i) G zusammenhängend ist,
(ii) G eine k-Clique aber keine $(k + 2)$-Clique enthält und
(iii) jeder minimale Separator von G eine k-Clique ist.

Aufgabe 54 ***mündlich***

Zeigen Sie $\chi(G) \leq tw(G) + 1$, indem Sie einen Linearzeitalgorithmus angeben, der für eine gegebene Baumzerlegung (T, X) eines Graphen G eine $\big(w(T, X) + 1\big)$-Färbung von G berechnet.

Aufgabe 55 ***mündlich***

Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine perfekte Eliminationsordnung eines Graphen $G = (V, E)$ und sei $H = (V, F)$ die sich daraus ergebende Orientierung von G, d.h. $(v_i, v_j) \in F \Leftrightarrow \{v_i, v_j\} \in E \wedge i < j$. Zeigen Sie, dass H kreisfrei ist und dass jede topologische Sortierung von H ebenfalls eine perfekte Eliminationsordnung von G ist.

Aufgabe 56 ***10 Punkte***

Für ein Matching M in einem Graphen $G = (V, E)$ bezeichne $\mathit{free}(M) = n - 2\|M\|$ die Anzahl der freien Knoten bzgl. M. Für eine Teilmenge $A \subseteq V$ bezeichne $\mathit{odd}(G - A)$ die Anzahl der Zusammenhangskomponenten in $G - A$ mit einer ungeraden Knotenzahl. Zeigen Sie:

(a) Für jedes Matching M in G und jede Teilmenge $A \subseteq V$ gilt $\mathit{free}(M) \geq \mathit{odd}(G - A) - \|A\|$.

(b) Ein Matching M ist genau dann maximal, wenn es eine Teilmenge $A \subseteq V$ mit $\mathit{free}(M) = \mathit{odd}(G - A) - \|A\|$ gibt. Wir nennen eine solche Menge A ein *Zertifikat* für (die Optimalität von) M. (*Hinweis:* Konstruieren Sie A mithilfe eines OSC mit Gewicht $\mathit{weight}(S) = \|M\|$.)

(c) Modifizieren Sie den Algorithmus von Edmonds so, dass er nicht nur ein maximales Matching M, sondern auch ein Zertifikat für M ausgibt. Wie verarbeitet Ihr Algorithmus die Eingabe $G = (V, E)$ mit $V = \{1, \ldots, 12\}$ und $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{4, 7\}, \{5, 6\}, \{5, 12\}, \{6, 7\}, \{7, 8\}, \{7, 11\}, \{8, 9\}, \{8, 10\}, \{9, 10\}\}$?

(d) Entwerfen Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der für einen gegebenen Graphen $G = (V, E)$ und zwei Mengen $M \subseteq E$, $A \subseteq V$ überprüft, ob A ein Zertifikat für das maximale Matching M ist.