Übungsblatt 9

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 24. Januar 2019

Aufgabe 44 ***mündlich***

Seien $A = \{A_1, \ldots, A_k\}$ und $B = \{B_1, \ldots, B_k\}$ Partitionen einer n-elementigen Menge V. Entwerfen Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, testet ob eine k-elementige Teilmenge $R \subseteq V$ existiert, die sowohl ein Repräsentantensystem für A als auch für B ist und im Fall der Existenz diese auch berechnet.

Aufgabe 45 Sei $G = (V, E)$ ein Graph. ***mündlich***

(a) Zeigen Sie, dass $\kappa(G) \le 2m/n$ (Durchschnittsgrad) ist.

(b) Finden Sie einen Algorithmus, der $\kappa(G)$ in Zeit $O(\sqrt{n^5}m)$ berechnet.

Hinweis: Benutzen Sie den Algorithmus von Dinitz, um für alle Paare $\{x, y\} \notin E$ einen kleinsten x-y-Separator zu berechnen.

(c) Verbessern Sie die Laufzeit auf $O(\sqrt{n}m^2)$.

Hinweis: Zeigen Sie, dass es genügt, $\mathcal{O}(\kappa(G)n)$ Knotenpaare zu betrachten.

Aufgabe 46 ***mündlich***

Zeigen Sie, dass ein Baum höchstens ein perfektes Matching hat.

Aufgabe 47 ***mündlich***

Entwerfen Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der ein maximales Matching für einen gegebenen Baum berechnet.

Aufgabe 48 ***mündlich***

Ein Teilgraph W eines Graphen $G = (V, E)$ heißt *Spannwald*, falls er alle Knoten von G enthält und ein Wald (also kreisfrei) ist. Entwerfen Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der für einen gegebenen Graphen G und ein gegebenenes Matching M maximaler Größe einen Spannwald W mit möglichst wenigen Kanten bestimmt, der nicht mehr isolierte Knoten als G hat.

Aufgabe 49 ***10 Punkte***

(a) Die k Arbeitsgruppen eines Betriebs veranstalten ein Geschäftsessen. Um den Informationsaustausch zwischen den einzelnen Gruppen zu fördern, sollen die a_i Mitglieder jeder Arbeitsgruppe i so auf die r zur Verfügung stehenden Tische verteilt werden, dass an jedem Tisch maximal ein Mitarbeiter aus jeder Gruppe sitzt. Finden Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der eine solche Sitzordnung berechnet (bzw. nachweist, dass es keine gibt), falls Tisch j maximal b_j Plätze hat.

Hinweis: Reduzieren Sie auf ein maximales Flussproblem.

(b) Zeigen Sie, dass das Matchingproblem für einen gegebenen bipartiten Graphen G mit Matchingzahl μ mithilfe des Algorithmus von Dinitz in Zeit $O(m\sqrt{\mu})$ gelöst werden kann.

(c) Wie groß ist die Anzahl $\alpha(n)$ aller maximalen Matchings und die Anzahl $\beta(n)$ aller Matchings im vollständigen Graphen K_n mit n Knoten?