Übungsblatt 8

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 17. Januar 2019

Aufgabe 37 ***mündlich***

Sei f ein maximaler Fluss in einem Netzwerk N. Sei $u \neq s, t$ ein Knoten in N und sei $f(u) = \sum_{v \in V} \max\{0, f(u,v)\}$ der Fluss durch den Knoten u. Überlegen Sie sich einen möglichst effizienten Algorithmus, der aus f einen Fluss g im Netzwerk $N - u$ (d.h. der Knoten u wird aus N entfernt) der Größe $|g| \geq |f| - f(u)$ berechnet.

Aufgabe 38 Sei $N = (V, E, s, t, c)$ ein Netzwerk. ***mündlich***

Aus dem Min-Cut-Max-Flow-Theorem folgt, dass ein Fluss f in N genau dann maximal ist, wenn es einen s-t-Schnitt S gibt, so dass f für jeden s-t-Pfad P in N mindestens eine Kante in $P \cap E^+(S)$ sättigt: $\exists$ s-t-Schnitt S $\forall$ s-t-Pfade P $\exists e \in P \cap E^+(S) : f(e) = c(e)$. Geben Sie eine entsprechende Charakterisierung für blockierende Flüsse g in N an. (*Hinweis:* Verändern Sie die Reihenfolge der Quantifizierungen.)

Aufgabe 39 ***mündlich***

Weisen Sie eine möglichst gute untere Laufzeitschranke für den Edmonds-Karp-Algorithmus nach, indem Sie beliebig große Netzwerke angeben, bei deren Eingabe der Algorithmus lange rechnet.

Aufgabe 40 ***mündlich***

Zeigen Sie, dass sich der Abstand $d_{i+1}(s,t)$ zwischen s und t im Restnetzwerk $N_{f_{i+1}}$ gegenüber $d_i(s,t)$ nicht unbedingt vergrößert, wenn auf den aktuellen Fluss f_i ein blockierender Fluss g_i des gesamten Restnetzwerks N_{f_i} anstelle des Schichtnetzwerkes N'_{f_i} addiert wird.

Aufgabe 41 ***mündlich***

Beweisen Sie den Heiratssatz: Ein bipartiter Graph $G = (U, W, E)$ besitzt genau dann ein Matching, das keinen Knoten in U frei lässt, wenn $\|N(A)\| \geq \|A\|$ für jede Teilmenge $A \subseteq U$ gilt.

Hinweis: Benutzen Sie das Min-Cut-Max-Flow-Theorem.

Aufgabe 42 ***mündlich***

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Sei $U \subseteq V$ eine unabhängige Knotenmenge, so dass $\deg(u) \geq \deg(v)$ für alle Knoten $u \in U$ und $v \in N(U)$ gilt. Zeigen Sie, dass G ein Matching M hat, das keinen Knoten in U frei lässt.

Hinweis: Betrachten Sie den bipartiten Graphen $G' = (U, W, E')$, der aus G durch Entfernen aller Kanten zwischen 2 Knoten in $W = V \setminus U$ entsteht, und verwenden Sie den Heiratssatz.

Aufgabe 43 ***10 Punkte***

Gegeben sind k Arbeiter $A_1, \ldots, A_k$ und ℓ Maschinen $M_1, \ldots, M_\ell$ sowie eine Menge $E \subseteq \{1, \ldots, k\} \times \{1, \ldots, \ell\}$ von Jobs.

(a) Zeigen Sie, dass jeder bipartite Graph $G = (V_1, V_2, E)$ ein Matching M besitzt, in dem kein Knoten u vom Grad $\deg(u) = \Delta(G)$ frei bleibt.

Hinweis: Konstruieren Sie M aus 2 Matchings M_i ($i = 1, 2$), die keinen Knoten $u \in V_i$ vom Grad $\deg(u) = \Delta(G)$ frei lassen. Bei der Konstruktion von M_i können Sie Aufgabe 42 verwenden.

(b) Bestimmen Sie die Zeit, die zur Erledigung aller Jobs in E benötigt wird, falls jeder Job $(i, j) \in E$ in einer Zeiteinheit und zwar nur von Arbeiter A_i an Maschine M_j erledigt werden kann und jeder Arbeiter und jede Maschine in jeder Zeiteinheit maximal einen Job übernehmen kann.

Hinweis: Teilaufgabe (a).

(c) Finden Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der einen Zeitplan zur Erledigung aller Jobs in minimaler Zeit erstellt.