Übungsblatt 6

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 10. Januar 2019

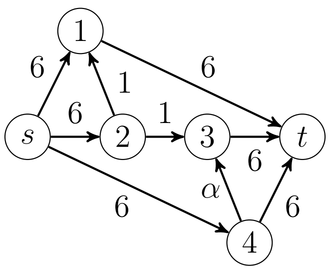
Aufgabe 28 ***mündlich***

(a) Passen Sie den Algorithmus von Ford-Fulkerson für den Fall an, dass das Netzwerk nicht nur eine Quelle und eine Senke enthält.

(b) Zeigen Sie, dass der Algorithmus von Ford-Fulkerson auch auf Netzwerken mit Kapazitäten in $\mathbb{Q}^+$ korrekt arbeitet. Welche Laufzeitschranke ergibt sich in diesem Fall?

(c) Arbeitet der Algorithmus von Ford-Fulkerson auch auf Netzwerken mit reellen Kapazitäten $c(e) \geq 0$ korrekt?

Hinweis: Betrachten Sie die Zunahmepfade $P_1 = (s, 2, 3, t)$, $P_2 = (s, 4, 3, 2, 1, t)$, $P_3 = (s, 2, 3, 4, t)$, $P_4 = P_2$, $P_5 = (s, 1, 2, 3, t)$ und $P_i = P_{i-4}$ für $i \geq 6$ für nebenstehendes Netzwerk, wobei die Kapazität $\alpha \in \mathbb{R}^+$ die Gleichung $\alpha^2 + \alpha = 1$ erfüllt.



Aufgabe 29 ***mündlich***

Schätzen Sie die Anzahl k der Iterationen für den Ford-Fulkerson-Algorithmus ab, wenn in jedem Schleifendurchlauf ein Zunahmepfad P_i gewählt wird, der den aktuellen Fluss f_i um einen maximalen Wert $\Delta_i = |f_{i+1}| - |f_i|$ erhöht.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\Delta_i > (|f_k| - |f_i|)/(m + 1)$ ist, und folgern Sie $|f_k| - |f_{i+1}| < (|f_k| - |f_i|)/(1 + 1/m)$. Folgern Sie weiterhin $1 \leq |f_k| - |f_{k-1}| \leq |f_k|/(1 + 1/m)^{k-1}$ und verwenden Sie die Ungleichung $\ln x \leq x - 1$.

Aufgabe 30 ***mündlich***

Sei f ein maximaler Fluss in einem Netzwerk N. Aus N wird ein neues Netzwerk N' konstruiert, indem alle Kanten gespiegelt und die Rollen von s und t vertauscht werden. Welchen Wert hat ein maximaler Fluss f' in N'? Wie lässt sich ein solcher Fluss f' aus f gewinnen?

Aufgabe 31 ***mündlich***

(a) Beweisen Sie die Kantenversion des Satzes von Menger für Digraphen $G = (V, E)$: In G ist die maximale Anzahl kantendisjunkter Wege von s nach t gleich der Größe einer minimalen Kantenmenge $E' \subseteq E$, die t von s trennt (d.h. es gibt keinen Weg von s nach t in $(V, E - E')$).

(b) Beweisen Sie die Knotenversion des Satzes von Menger für Digraphen $G = (V, E)$: Im Fall $(s, t) \notin E$ ist die maximale Anzahl von *knotendisjunkten* s-t-Pfaden (d.h. je 2 solche Pfade haben außer s und t keinen gemeinsamen Knoten) in G gleich der minimalen Größe einer Knotenmenge V', die *t in G von s trennt* (d.h. $V' \subseteq V \setminus \{s, t\}$ und es gibt keinen Weg von s nach t in $G - V'$).

Hinweis: Beweisen Sie ein Min-Cut-Max-Flow-Theorem für Netzwerke mit Kapazitätsschranken auf den Knoten.

(c) Beweisen Sie entsprechende Sätze für Graphen.

Aufgabe 32 Gegeben ist folgendes Netzwerk N. ***10 Punkte***

(a) Bestimmen Sie mit Edmonds-Karp einen maximalen Fluss in N.

(b) Geben Sie einen s-t-Schnitt S mit minimaler Kapazität $c(S)$ an.

(c) Fassen Sie die Kantenbeschriftungen als Mindestkapazitäten auf und geben Sie einen (minimalen) Fluss f sowie einen (maximalen) s-t-Schnitt S mit $c_{\min}(S) = |f|$ an.