Übungsblatt 4

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 29. November 2018

Aufgabe 16 ***mündlich***

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *k-faktorisierbar*, wenn sich seine Kantenmenge so in $l \geq 0$ Teilmengen $E = E_1 \cup \dots \cup E_l$ partitionieren lässt, dass die Graphen $G_i = (V, E_i)$ für $i = 1, \dots, l$ k-regulär sind (d.h. jeder Knoten $v \in V$ hat in G_i den Grad k).

(a) Geben Sie einen regulären Graphen an, der ein perfektes Matching besitzt, aber nicht 1-faktorisierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass ein regulärer Graph G genau dann 1-faktorisierbar ist, wenn $\chi'(G) = \Delta(G)$ ist.

Aufgabe 17 Sei $1 \leq k \leq n$. ***mündlich***

(a) Bestimmen Sie alle Graphen G mit n Knoten und $\chi(G) = k$, die eine bzgl. Inklusion maximale Kantenmenge haben.

(b) Bestimmen Sie alle Graphen G mit n Knoten und $\chi(G) = k$, die eine maximale Anzahl von Kanten haben. Sei $e_k(n)$ diese Anzahl.

(c) Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} e_k(n)/\binom{n}{2} = 1 - 1/k$ gilt.

Aufgabe 18 ***mündlich***

Bezeichne $P_G(x)$ die Anzahl der x-Färbungen eines Graphen $G = (V, E)$. Zeigen Sie:

(a) Für jede Kante $e = \{u, v\} \in E$ gilt $P_G(x) = P_{G-e}(x) - P_{G_{uv}}(x)$.

(b) $P_G(x)$ ist ein Polynom vom Grad n in der Variablen x.

(c) Falls u k-simplizial in G ist, dann gilt $P_G(x) = (x - k)P_{G-u}(x)$.

(d) Bestimmen Sie $P_G(x)$ für $G = E_n, K_n, C_n, P_n$ und jeden Baum T.

Aufgabe 19 Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Zeigen Sie: ***mündlich***

(a) `GraphSearch`(V, E) gibt eine Suchordnung von G aus.

(b) `BFS`(V, E) gibt eine BFS-Ordnung von G aus.

(c) `DFS`(V, E) gibt eine DFS-Ordnung von G aus.

(d) Sei `DFS'` die Modifikation von `DFS`, die die append-Operation erst nach der pop-Operation durchführt und $L = (u_n, \dots, u_1)$ eine von `DFS'`(V, E) ausgegeben Ordnung. Dann ist die umgekehrte Ordnung $L' = (u_1, \dots, u_n)$ eine DFS-Ordnung von G.

Aufgabe 20 Sei $G = (V, E)$ ein Multigraph. Zeigen Sie: ***10 Punkte***

(a) $\chi'(G) \leq (3/2)\Delta(G)$.

Hinweis: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis: Sei H ein Multigraph mit $q = \chi'(H) > (3/2)\Delta(H)$ und $\chi'(H - e) = q - 1$ für alle Kanten e von H. Sie dürfen zudem folgende Erweiterung des Satzes von Vizing auf Multigraphen nutzen, um eine $(q-1)$-Kantenfärbung von $H - e$ auf H zu erweitern:
$\chi'(G) \leq \Delta(G) + v(G)$, wobei $v(G)$ die maximale Vielfachheit (Anzahl der Vorkommen) einer Kante ist.

(b) E lässt sich in $k = \chi'(G)$ Matchings $M_1, \dots, M_k$ von G zerlegen, so dass $\|M_i\| - \|M_j\| \in \{-1, 0, 1\}$ für alle i, j gilt.

(c) Zwischen n Stationen sollen mehrere Datenpakete versendet werden. Jede Station kann pro Zeiteinheit höchstens ein Paket senden oder empfangen (aber nicht beides gleichzeitig). Finden Sie einen effizienten Algorithmus, der einen Zeitplan für den Versand aller Datenpakete berechnet, falls Station i insgesamt p_{ij} Pakete an Station j senden möchte. Dabei soll die Gesamtdauer die minimal nötige Zeit um höchstens $\max_{i,j} p_{ij}$ Zeiteinheiten überschreiten und die Anzahl von gleichzeitig aktiven Datenleitungen minimiert werden.

(d) Wie lässt sich in (d) eine zeitoptimale Lösung effizient bestimmen, wenn Datenpakete nur zwischen Stationen i und j mit ungleicher Parität $i \not\equiv_2 j$ versendet werden?