# Übungsblatt 2

***Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 8. November 2019***

**Aufgabe 8** ***mündlich***

Zeigen Sie für einen zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ mit $n \geq 3$ Knoten.

(a) $G$ ist genau dann 2-zusammenhängend, wenn je 2 Knoten von $G$ auf einem gemeinsamen Kreis liegen.

*Hinweis:* Benutzen Sie den Satz von Menger: $G$ ist genau dann *$k$-zusammenhängend*, wenn je zwei Knoten $u, v$ in $G$ durch mindestens $k$ knotendisjunkte Pfade verbunden sind (d.h. je 2 solche Pfade haben außer $u$ und $v$ keinen gemeinsamen Knoten).

(b) Sei die Relation $\sim$ auf $E$ definiert durch $e \sim e'$, falls $e = e'$ ist oder $e$ und $e'$ auf einem gemeinsamen Kreis liegen. Dann ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation.

(c) Seien $E_1, \ldots, E_k$ die Äquivalenzklassen von $\sim$ und $V_i = V(E_i)$ die zugehörigen Knotenmengen. Dann gilt $\|V_i \cap V_j\| \leq 1$ für alle $i \neq j$.

*Bemerkung:* Die Teilgraphen $G[V_i]$ heißen *Blöcke* und die Knoten $u \in V_i \cap V_j$, $i \neq j$, heißen *Artikulationen* oder *Schnittknoten* von $G$.

(d) Jeder Block $B_i$ von $G$ ist 2-zusammenhängend und $G$ ist genau dann 2-zusammenhängend, wenn $G$ nur aus einem Block $B_1$ besteht.

(e) Sei $B$ der Graph, dessen Knotenmenge aus allen Blöcken und Artikulationen von $G$ besteht und in dem jeder Block zu allen darin enthaltenen Artikulationen adjazent ist. Dann ist $B$ ein Baum ($B$ heißt der *BC-Baum (block cut tree)* von $G$).

**Aufgabe 9** ***mündlich***

Ein planarer Graph $G = (V, E)$ heißt *eindeutig einbettbar*, wenn für je zwei ebene Realisierungen $H = (V, E, R)$ und $H' = (V, E, S)$ von $G$ $R \in \{S, S^R\}$ gilt (d.h. $R = S$ oder $R$ entsteht aus $S$ durch Spiegelung aller Ränder).

(a) Finden Sie einen planaren Graphen mit möglichst wenigen Knoten (bzw. Kanten, Gebieten), der nicht eindeutig einbettbar ist.

(b) Sei $H$ eine ebene Realisierung eines planaren Graphen $G$. Zeigen Sie, dass $\kappa(G) \leq 2$ ist, falls es in $H$ ein Gebiet gibt, dessen Rand einen Kreis mit mindestens 2 Brücken in $G$ bildet.

(c) Seien $H$ und $H'$ ebene Realisierungen eines planaren Graphen $G$. Zeigen Sie, dass es für jedes Gebiet $g$ in $H$, dessen Rand einen Kreis mit höchstens einer Brücke in $G$ bildet, ein Gebiet $g'$ in $H'$ gibt, das den gleichen Kreis als Rand hat.

(d) Zeigen Sie, dass alle 3-zusammenhängenden planaren Graphen $G$ eindeutig einbettbar sind (Satz von Whitney).

**Aufgabe 10** ***10 Punkte***

Ein Graph $G$ heißt *outerplanar*, falls $G$ eine ebene Realisierung hat, in der alle Knoten an das äußere Gebiet grenzen. Zeigen Sie:

(a) $G$ ist genau dann outerplanar, wenn $G$ weder den $K_{2,3}$ noch den $K_4$ als Minor enthält. (*Hinweis:* Betrachten Sie den Graphen $G'$, der aus $G$ durch Hinzufügen eines weiteren Knotens entsteht, welcher mit allen Knoten von $G$ verbunden wird.)

(b) Für jeden outerplanaren Graphen $G$ gilt $\delta(G) \leq 2$.

(c) Finden Sie einen effizienten Algorithmus, der für jeden Eingabegraphen $G$ entweder eine $\chi(G)$-Färbung oder einen topologischen Minor $H$ von $G$ mit $\delta(H) > 2$ (als Zertifikat, dass $G$ nicht outerplanar ist) ausgibt.

*Hinweis:* Zeigen Sie, dass in jedem outerplanaren Graphen $\delta \leq 2$ ist, und passen Sie den Algorithmus aus Aufgabe 7 entsprechend an.