Übungsblatt 1

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 1. November 2018

Aufgabe 1 ***mündlich***

Zeigen Sie, dass sich die chromatische Zahl $\chi(G)$ im Allgemeinen nicht in Abhängigkeit von der Cliquenzahl $\omega(G)$ begrenzen lässt.

Hinweis: Konstruieren Sie zu einem beliebigen Graphen G mit $m \geq 1$ Kanten wie folgt einen Graphen H mit $\omega(H) = \omega(G)$ und $\chi(H) = \chi(G) + 1$: Fügen Sie zu H für jeden Knoten u in G einen Doppelgänger u' mit $N_H(u') = N_G(u)$ und dann noch einen weiteren Knoten x hinzu.

Aufgabe 2 ***mündlich***

(a) Finden Sie zusammenhängende Graphen, bei deren Eingabe der Algorithmus `greedy-color` möglichst vielen Knoten die Farbe $\Delta(G)+1$ gibt.

(b) Modifizieren Sie `greedy-color` so, dass er für jeden zusammenhängenden Graphen G eine $(\Delta(G) + 1)$-Färbung c berechnet, die höchstens einem Knoten u eine Farbe $c(u) > \deg(u)$ gibt.

Aufgabe 3 ***mündlich***

Wieviele Kanten hat ein ebener Graph mit n Knoten, wenn jedes seiner Gebiete von d Kanten begrenzt ist?

Aufgabe 4 ***mündlich***

Wie lässt sich für einen gegebenen ebenen Graphen $G = (V, E, R)$ das zugehörige Rotationssystem π_R berechnen?

Aufgabe 5 ***mündlich***

Sei $G = (V, E)$ ein *maximal planarer* Graph (d.h. G ist planar und $G \cup e$ ist für jede Kante $e \in \binom{V}{2} \setminus E$ nicht planar) und sei H eine ebene Realisierung von G. Zeigen Sie:

(a) Falls G $n \geq 3$ Knoten hat, wird jedes Gebiet g von H von $d(g) = 3$ Kanten umrandet und somit ist $m = 3n - 6$.

(b) Falls $n \geq 4$ ist, hat jeder Knoten $u \in V$ einen Grad $\deg(u) \geq 3$ und mindestens 4 Knoten haben einen Grad ≤ 5. *Hinweis:* Zeigen Sie, dass $\sum_{u \in V}(6 - \deg(u)) = 12$ ist.

(c) Falls $n \geq 3$ ist, gibt es für jedes Gebiet g von H eine Einbettung von G in die Ebene, in der g das äußere Gebiet ist und jedes andere Gebiet g' ein Dreieck bildet. *Hinweis:* Führen Sie Induktion über n und benutzen Sie, dass jedes überschneidungsfreie Polygon P mit höchstens 5 Eckpunkten einen Punkt A in seinem Innern enthält, von dem aus jeder Punkt B in P sichtbar ist (d.h. die Strecke $[AB]$ verläuft innerhalb von P; Problem der Museumswächter).

(d) Jeder planare Graph ist geradlinig in die Ebene einbettbar.

Aufgabe 6 ***mündlich***

Zwei Graphen G und H heißen *homeomorph*, falls Unterteilungen G' von G und H' von H existieren mit $G' \cong H'$.

(a) Geben Sie einen Graphen an, der K_5 zwar als Minor, aber keinen zu K_5 homeomorphen Teilgraphen enthält.

(b) Geben Sie einen Graphen an, der nicht planar und nicht zu K_5 oder $K_{3,3}$ kontrahierbar ist.

(c) Zeigen Sie: Jeder Minor H von G mit $\Delta(H) \leq 3$ ist auch ein topologischer Minor von G.

Aufgabe 7 ***10 Punkte***

(a) Finden Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der für einen gegebenen planaren Graphen G eine 5-Färbung berechnet. (*Hinweis:* Orientieren Sie sich an dem Beweis des 5-Farben-Satzes; siehe VL)

(b) Wieviele Farben benutzt Ihr Algorithmus, falls $\omega(G) \leq 2$ ist?