Einführung in die Theoretische Informatik

Johannes Köbler

Institut für Informatik
Humboldt-Universität zu Berlin

WS 2018/19

Zeitkomplexität von Turingmaschinen

Die Laufzeit einer NTM M bei Eingabe x ist die maximale Anzahl an Rechenschritten, die $M(x)$ ausführt.

Definition

- Die Laufzeit einer NTM M bei Eingabe x ist definiert als

  $$time_M(x) = \sup\{t \geq 0 \mid \exists K : K_x \vdash^t K\},$$

  wobei $\sup \mathbb{N} = \infty$ ist
- Sei $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine monoton wachsende Funktion
- Dann ist M $t(n)$-zeitbeschränkt, falls für alle Eingaben x gilt:

  $$time_M(x) \leq t(|x|)$$

Die Zeitschranke $t(n)$ beschränkt also die Laufzeit bei allen Eingaben der Länge n (worst-case Komplexität).

Zeitkomplexitätsklassen

Wir fassen alle Sprachen und Funktionen, die in einer vorgegebenen Zeitschranke $t(n)$ entscheidbar bzw. berechenbar sind, in folgenden Komplexitätsklassen zusammen.

Definition

- Die in deterministischer Zeit $t(n)$ entscheidbaren Sprachen bilden die Sprachklasse

$$\mathrm{DTIME}(t(n)) = \{L(M) \mid M \text{ ist eine } t(n)\text{-zeitbeschränkte DTM}\}$$

- Die in nichtdeterministischer Zeit $t(n)$ entscheidbaren Sprachen bilden die Sprachklasse

$$\mathrm{NTIME}(t(n)) = \{L(M) \mid M \text{ ist eine } t(n)\text{-zeitbeschränkte NTM}\}$$

- Die in deterministischer Zeit $t(n)$ berechenbaren Funktionen bilden die Funktionenklasse

$$\mathrm{FTIME}(t(n)) = \left\{ f \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{es gibt eine } t(n)\text{-zeitbeschränkte} \\ \text{DTM } M\text{, die } f \text{ berechnet} \end{array} \right\}$$

Die wichtigsten Zeitkomplexitätsklassen

- Die wichtigsten deterministischen Zeitkomplexitätsklassen sind

$$
\begin{aligned}
\mathrm{LINTIME} &= \bigcup_{c\geq 1} \mathrm{DTIME}(cn+c) && \text{„Linearzeit“}\\
\mathrm{P} &= \bigcup_{c\geq 1} \mathrm{DTIME}(n^c+c) && \text{„Polynomialzeit“}\\
\mathrm{E} &= \bigcup_{c\geq 1} \mathrm{DTIME}(2^{cn+c}) && \text{„Lineare Exponentialzeit“}\\
\mathrm{EXP} &= \bigcup_{c\geq 1} \mathrm{DTIME}(2^{n^c+c}) && \text{„Exponentialzeit“}
\end{aligned}
$$

- Die nichtdeterministischen Klassen NLINTIME, NP, NE, NEXP und die Funktionenklassen FLINTIME, FP, FE, FEXP sind analog definiert
- Für eine Klasse $\mathcal{F}$ von Funktionen sei $\mathrm{DTIME}(\mathcal{F}) = \bigcup_{t\in\mathcal{F}} \mathrm{DTIME}(t(n))$ (die Klassen $\mathrm{NTIME}(\mathcal{F})$ und $\mathrm{FTIME}(\mathcal{F})$ sind analog definiert)

Asymptotische Laufzeit und Landau-Notation

Definition

Seien f und g Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}^+ \cup \{0\} = [0, \infty)$.

- Wir schreiben $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$, falls es Zahlen n_0 und c gibt mit

  $$\forall n \geq n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n)$$

  Bedeutung: „f wächst nicht wesentlich schneller als g"

- Formal bezeichnet der Term $\mathcal{O}(g(n))$ die Klasse aller Funktionen f, die obige Bedingung erfüllen, d.h.

  $$\mathcal{O}(g(n)) = \{f : \mathbb{N} \to [0, \infty) \mid \exists n_0, c \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n)\}$$

- Die Gleichung $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ drückt also in Wahrheit eine Element-Beziehung $f \in \mathcal{O}(g(n))$ aus

- O-Terme können auch auf der linken Seite vorkommen. In diesem Fall wird eine Inklusionsbeziehung ausgedrückt

- So steht $n^2 + \mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(n^2)$ für die Aussage

  $$\{n^2 + f \mid f \in \mathcal{O}(n)\} \subseteq \mathcal{O}(n^2)$$

Asymptotische Laufzeit und Landau-Notation

Beispiel

- $7\log(n) + n^3 = \mathcal{O}(n^3)$ ist richtig
- $7\log(n)n^3 = \mathcal{O}(n^3)$ ist falsch
- $2^{n+\mathcal{O}(1)} = \mathcal{O}(2^n)$ ist richtig
- $2^{\mathcal{O}(n)} = \mathcal{O}(2^n)$ ist falsch (siehe Übungen)

Mit der O-Notation lassen sich die wichtigsten deterministischen Zeitkomplexitätsklassen wie folgt charakterisieren:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{LINTIME} &= \mathsf{DTIME}(\mathcal{O}(n)) && \text{„Linearzeit“} \\
\mathsf{P} &= \mathsf{DTIME}(n^{\mathcal{O}(1)}) && \text{„Polynomialzeit“} \\
\mathsf{E} &= \mathsf{DTIME}(2^{\mathcal{O}(n)}) && \text{„Lineare Exponentialzeit“} \\
\mathsf{EXP} &= \mathsf{DTIME}(2^{n^{\mathcal{O}(1)}}) && \text{„Exponentialzeit“}
\end{aligned}
$$