Einführung in die Theoretische Informatik

Johannes Köbler

Institut für Informatik
Humboldt-Universität zu Berlin

WS 2018/19

Entscheidbare und semi-entscheidbare Sprachen

Definition

- Eine NTM M hält bei Eingabe x (kurz: $M(x) = \downarrow$ oder $M(x)\downarrow$), falls alle Rechnungen von $M(x)$ nach endlich vielen Schritten halten.
- Falls $M(x)$ nicht hält, schreiben wir auch kurz $M(x) = \uparrow$ oder $M(x)\uparrow$.
- Eine DTM M entscheidet eine Eingabe x, falls $M(x)$ hält oder eine Konfiguration mit einem Endzustand erreicht.
- Eine Sprache heißt entscheidbar, falls sie von einer DTM M erkannt wird, die alle Eingaben entscheidet. Die zugehörige Sprachklasse ist

$$\mathsf{REC} = \{L(M) \mid M \text{ ist eine DTM, die alle Eingaben entscheidet}\}$$

- Jede von einer DTM akzeptierte Sprache heißt semi-entscheidbar.

Bemerkung

- Eine DTM M entscheidet zwar immer alle Eingaben $x \in L(M)$, aber eventuell nicht alle $x \in \overline{L(M)}$. Daher heißt $L(M)$ semi-entscheidbar.
- Später werden wir sehen, dass $\mathsf{RE} = \{L(M) \mid M \text{ ist eine DTM}\}$ ist.

Berechnung von Funktionen

Definition

- Eine k-DTM $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ berechnet eine Funktion $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$, falls M bei jeder Eingabe $x \in \Sigma^*$ in einer Konfiguration

$$K = (q, u_1, a_1, v_1, \ldots, u_k, a_k, v_k) \text{ mit } u_k = f(x)$$

  hält (d.h. $K_x \vdash^* K$ und K hat keine Folgekonfiguration).
- Hierfür sagen wir auch, M gibt bei Eingabe x das Wort $f(x)$ aus und schreiben $M(x) = f(x)$.
- f heißt Turing-berechenbar (oder einfach berechenbar), falls es eine k-DTM M mit $M(x) = f(x)$ für alle $x \in \Sigma^*$ gibt.
- Aus historischen Gründen werden berechenbare Funktionen auch rekursiv (engl. *recursive*) genannt.