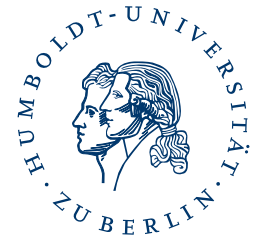
Einführung in die Theoretische Informatik

Johannes Köbler



Institut für Informatik
Humboldt-Universität zu Berlin

WS 2018/19

Aktuelle Infos unter

- https://hu.berlin/ethi18

bzw.

- https://www.informatik.hu-berlin.de/de/forschung/gebiete/algorithmenII/Lehre/ws18/einftheo

Übungen

Anmeldung

- bei Agnes (möglichst bald)
- und bei Moodle (wg. Punktevergabe und Zuordnung zu Übungsgruppen)
- Mails von Agnes und von Moodle werden standardmäßig an den CMS-Account gesendet (bitte regelmäßig checken)

Ausgabe der Aufgabenblätter

- in der VL sowie bei Moodle und auf der VL-Webseite

Rückgabe

- in den Übungsgruppen

Übungen

Bearbeitung der Aufgaben

- in Gruppen von zwei bis drei Teilnehmern
- Teilnehmer müssen nicht in der gleichen Übungsgruppe sein
- bitte jede Aufgabe auf einem separaten Blatt bearbeiten, da diese getrennt abzugeben sind
- bitte auf jedem Blatt Folgendes angeben:
  - die Namen und CMS-Benutzernamen der Gruppenteilnehmer
  - den Namen der Abgabegruppe aus Moodle (z.B. AG123)
  - den Übungstermin, an dem Sie die korrigierten Blätter zurückerhalten möchten

Schein, Klausur, Skript

Scheinkriterien

- Lösen von $\geq 50\%$ der schriftlichen Aufgaben
- Lösen von $\geq 50\%$ der Multiple-Choice Aufgaben in Moodle

Klausur

- **Termin: 28.02.2019, 12 Uhr**
- **Nachklausur: 02.04.2019, 9 Uhr**

Skript

- wird wöchentlich ins Netz gestellt

Gibt es zum organisatorischen Ablauf noch Fragen?

Inhalt der Vorlesung

Themen dieser VL:

- **Welche Rechenmodelle eignen sich zur Lösung welcher algorithmischen Problemstellungen?** **Automatentheorie**
- **Welche algorithmischen Probleme sind überhaupt lösbar?** **Berechenbarkeitstheorie**
- **Welcher Aufwand ist zur Lösung eines geg. algorithmischen Problems nötig?** **Komplexitätstheorie**

Themen der VL Algorithmen und Datenstrukturen:

- Wie lassen sich praktisch relevante Problemstellungen möglichst effizient lösen? Algorithmik

Themen der VL Logik in der Informatik:

- Mathem. Grundlagen der Informatik, Beweise führen, Modellierung Aussagenlogik, Prädikatenlogik

Lernziele

- Überblick über die wichtigsten Rechenmodelle (Automaten) wie z.B.
  - endliche Automaten
  - Kellerautomaten
  - Turingmaschinen
  - Registermaschinen
  - Schaltkreise
- Charakterisierung der Klassen aller mit diesen Rechenmodellen lösbaren Probleme durch
  - unterschiedliche Typen von formalen Grammatiken
  - Abschlusseigenschaften unter geeigneten Sprachoperationen
  - Reduzierbarkeit auf typische Probleme (Vollständigkeit)
- Erkennen von Grenzen der Berechenbarkeit
- Klassifikation wichtiger algorithmischer Probleme nach ihrer Komplexität

Maschinenmodelle

- Rechenmaschinen spielen in der Informatik eine zentrale Rolle
- Es gibt viele unterschiedliche math. Modelle für Rechenmaschinen
- Diese können sich in ihrer Berechnungskraft unterscheiden
- Die Turingmaschine (TM) ist ein universales Berechnungsmodell, da sie alle anderen bekannten Rechenmodelle simulieren kann
- Wir betrachten zunächst Einschränkungen des TM-Modells, die vielfältige praktische Anwendungen haben, wie z.B.
  - endliche Automaten (DFA, NFA)
  - Kellerautomaten (PDA, DPDA) etc.

Der Algorithmenbegriff

- Der Begriff Algorithmus geht auf den persischen Gelehrten Muhammed Al Chwarizmi (8./9. Jhd.) zurück
- Ältester bekannter nicht-trivialer Algorithmus: Euklidischer Algorithmus zur Berechnung des ggT (300 v. Chr.)
- Von einem Algorithmus wird erwartet, dass er bei jeder zulässigen Problemeingabe nach endlich vielen Rechenschritten eine korrekte Ausgabe liefert
- Eine wichtige Rolle spielen Entscheidungsprobleme, bei denen jede Eingabe nur mit ja oder nein beantwortet wird
- Die (maximale) Anzahl der Rechenschritte bei allen möglichen Eingaben ist nicht beschränkt, d.h. mit wachsender Eingabelänge kann auch die Rechenzeit beliebig anwachsen
- Die Beschreibung eines Algorithmus muss jedoch endlich sein
- Problemeingaben können Zahlen, Formeln, Graphen etc. sein
- Diese werden über einem Eingabealphabet Σ kodiert

Alphabet, Wort, Sprache

Definition

- Ein Alphabet ist eine geordnete endliche Menge

  $$\Sigma = \{a_1, \ldots, a_m\}, \ m \geq 1$$

  von Zeichen a_i
- Eine Folge $x = x_1 \ldots x_n \in \Sigma^n$ von Zeichen heißt Wort
- Die Länge von $x = x_1 \ldots x_n \in \Sigma^n$ ist n und wird mit $|x|$ bezeichnet
- Die Menge aller Wörter über Σ ist

  $$\Sigma^* = \bigcup_{n \geq 0} \Sigma^n$$

- Das (einzige) Wort der Länge $n = 0$ ist das leere Wort, welches wir mit ε bezeichnen, d.h. $\Sigma^0 = \{\varepsilon\}$
- Jede Teilmenge $L \subseteq \Sigma^*$ heißt Sprache über dem Alphabet Σ

Beispiele für Sprachen

Beispiel

- Sprachen über Σ sind beispielsweise $\varnothing, \Sigma^*, \Sigma$ und $\{\varepsilon\}$
- $\varnothing$ enthält keine Wörter und heißt leere Sprache
- Σ^* enthält dagegen alle Wörter über Σ
- Σ enthält alle Wörter über Σ der Länge 1
- $\{\varepsilon\}$ enthält nur das leere Wort, ist also einelementig
- Sprachen, die genau ein Wort enthalten, werden auch als Singletonsprachen bezeichnet
- in der Informatik spielen Programmiersprachen eine wichtige Rolle

Operationen auf Sprachen

- Da Sprachen Mengen sind, können wir sie bzgl. Inklusion vergleichen
- Zum Beispiel gilt $\varnothing \subseteq \{\varepsilon\} \subseteq \Sigma^*$
- Wir können Sprachen auch vereinigen, schneiden und komplementieren
- Seien A und B Sprachen über Σ. Dann ist
  - $A \cap B = \{x \in \Sigma^* \mid x \in A \wedge x \in B\}$ der Schnitt von A und B,
  - $A \cup B = \{x \in \Sigma^* \mid x \in A \vee x \in B\}$ die Vereinigung von A und B, und
  - $\overline{A} = \{x \in \Sigma^* \mid x \notin A\}$ das Komplement von A

Konkatenation von Wörtern

Definition

Seien $x = x_1 \dots x_n$ und $y = y_1 \dots y_m$ Wörter. Dann wird das Wort

$$x \circ y = x_1 \dots x_n y_1 \dots y_m$$

als Konkatenation von x und y bezeichnet. Für $x \circ y$ schreiben wir auch einfach xy.

Beispiel

- Für $x = aba$ und $y = abab$ erhalten wir $xy = abaabab$ und $yx = abababa$
- Die Konkatenation ist also nicht kommutativ
- Allerdings ist $\circ$ assoziativ, d.h. es gilt $x(yz) = (xy)z$
  Daher können wir hierfür auch einfach xyz schreiben
- Es gibt auch ein neutrales Element, da $x\varepsilon = \varepsilon x = x$ ist
- Eine algebraische Struktur $(M, \square, e)$ mit einer assoziativen Operation $\square : M \times M \to M$ und einem neutralen Element e heißt Monoid
- $(\Sigma^*, \circ, \varepsilon)$ ist also ein Monoid

Spezielle Sprachoperationen

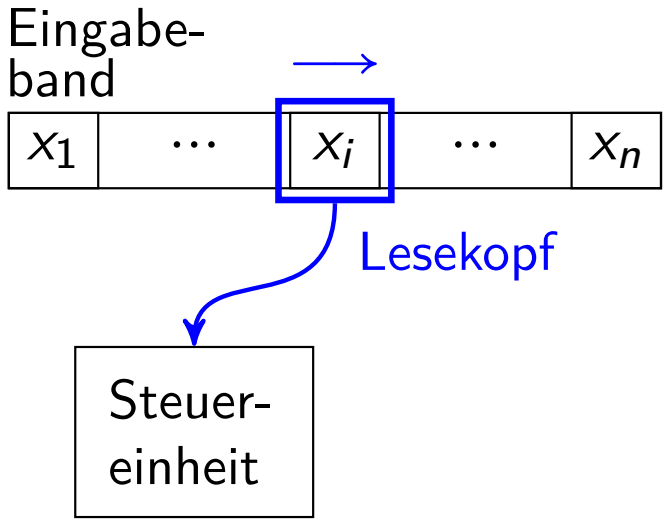
Neben den Mengenoperationen Schnitt, Vereinigung und Komplement gibt es auch spezielle Sprachoperationen

Definition

- Das Produkt (Verkettung, Konkatenation) der Sprachen A und B ist
$$AB = \{xy \mid x \in A, y \in B\}$$
- Ist $A = \{x\}$ eine Singletonsprache, so schreiben wir für $\{x\}B$ auch einfach xB
- Die n-fache Potenz A^n einer Sprache A ist induktiv definiert durch
$$A^n = \begin{cases} \{\varepsilon\}, & n = 0, \\ A^{n-1}A, & n > 0 \end{cases}$$
- Die Sternhülle von A ist $A^* = \bigcup_{n \geq 0} A^n$
- Die Plushülle von A ist $A^+ = \bigcup_{n \geq 1} A^n = AA^*$

Algorithmische Erkennung von Sprachen

- Ein einfaches Rechenmodell zum Erkennen von Sprachen ist der endliche Automat:



- Ein endlicher Automat
  - nimmt zu jedem Zeitpunkt genau einen von endlich vielen Zuständen an
  - macht bei Eingaben der Länge n genau n Rechenschritte und
  - liest in jedem Schritt genau ein Eingabezeichen

Formale Definition eines endlichen Automaten

Definition

- Ein endlicher Automat (kurz: DFA; *Deterministic Finite Automaton*) wird durch ein 5-Tupel $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ beschrieben, wobei
  - $Z \neq \emptyset$ eine endliche Menge von Zuständen
  - Σ das Eingabealphabet,
  - $\delta : Z \times \Sigma \to Z$ die Überführungsfunktion
  - $q_0 \in Z$ der Startzustand und
  - $E \subseteq Z$ die Menge der Endzustände ist
- Die von M akzeptierte oder erkannte Sprache ist

$$L(M) = \left\{ x_1 \dots x_n \in \Sigma^* \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{es gibt } q_1, \dots, q_{n-1} \in Z, q_n \in E \text{ mit} \\ \delta(q_i, x_{i+1}) = q_{i+1} \text{ für } i = 0, \dots, n-1 \end{array} \right\}$$

- Eine Zustandsfolge $q_0, q_1, \dots, q_n$ heißt Rechnung von $M(x_1 \dots x_n)$, falls $\delta(q_i, x_{i+1}) = q_{i+1}$ für $i = 0, \dots, n-1$ gilt
- Sie heißt akzeptierend, falls $q_n \in E$ ist, und andernfalls verwerfend

Die Klasse der regulären Sprachen

Frage

Welche Sprachen lassen sich durch endliche Automaten erkennen und welche nicht?

Definition

Eine von einem DFA akzeptierte Sprache wird als regulär bezeichnet. Die zugehörige Sprachklasse ist

$$\mathrm{REG} = \{L(M) \mid M \text{ ist ein DFA}\}$$

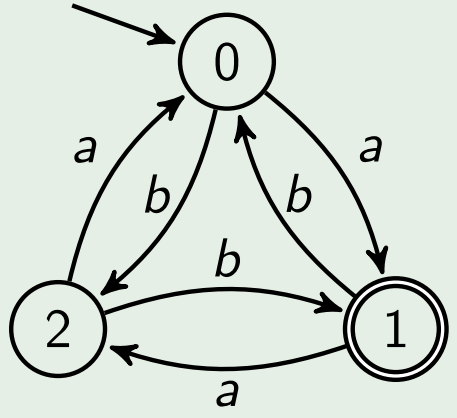
DFAs beherrschen Modulare Arithmetik

Beispiel

Sei $M_3 = (Z, \Sigma, \delta, 0, E)$ ein DFA mit $Z = \{0, 1, 2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $E = \{1\}$ und der Überführungsfunktion

δ	0	1	2
a	1	2	0
b	2	0	1

Graphische Darstellung:



Endzustände werden durch einen doppelten Kreis und der Startzustand wird durch einen Pfeil gekennzeichnet ◁

Frage: Welche Wörter akzeptiert M_3?

- Ist $w_1 = aba \in L(M_3)$? Ja (akzeptierende Rechnung: $0, 1, 0, 1$)
- Ist $w_2 = abba \in L(M_3)$? Nein (verwerfende Rechnung: $0, 1, 0, 2, 0$)

DFAs beherrschen Modulare Arithmetik

Behauptung

Die von M_3 erkannte Sprache ist

$$L(M_3) = \{x \in \{a,b\}^* \mid \#_a(x) - \#_b(x) \equiv_3 1\}, \quad \text{wobei}$$

- $\#_a(x)$ die Anzahl der Vorkommen von a in x bezeichnet und
- $i \equiv_m j$ (in Worten: i ist kongruent zu j modulo m) bedeutet, dass $i - j$ durch m teilbar ist

Beweis der Behauptung durch Induktion über die Länge von x

Wir betrachten zunächst das Erreichbarkeitsproblem für DFAs