Einführung in die Theoretische Informatik

Johannes Köbler

Institut für Informatik
Humboldt-Universität zu Berlin

WS 2018/19

Kontextsensitive Sprachen

Definition

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik.

1. G heißt vom Typ 3 oder regulär, falls für alle Regeln $u \to v$ gilt:

   $u \in V$ und $v \in \Sigma V \cup \Sigma \cup \{\varepsilon\}$

   (d.h. alle Regeln haben die Form $A \to aB$, $A \to a$ oder $A \to \varepsilon$)

2. G heißt vom Typ 2 oder kontextfrei, falls für alle Regeln $u \to v$ gilt:

   $u \in V$ (d.h. alle Regeln haben die Form $A \to \alpha$)

3. G heißt vom Typ 1 oder kontextsensitiv, falls für alle Regeln $u \to v$ gilt:

   $|v| \geq |u|$ (mit Ausnahme der ε-Sonderregel, s. unten)

4. Jede Grammatik ist automatisch vom Typ 0

Die ε-Sonderregel

In einer kontextsensitiven Grammatik ist auch die Regel $S \to \varepsilon$ zulässig, falls das Startsymbol S nicht auf der rechten Seite einer Regel vorkommt

CFL ist echt in CSL enthalten

Bemerkung

- Wie wir gesehen haben, ist CFL in CSL enthalten
- Zudem ist die Sprache $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ nicht kontextfrei
- L kann jedoch von einer kontextsensitiven Grammatik erzeugt werden (siehe nächste Folie)
- Daher ist CFL echt in CSL enthalten

Eine kontextsensitive Grammatik für $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$

Beispiel

- Betrachte die kontextsensitive Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, B\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$ und den Regeln

$$P\colon\ S \to aSBc, abc\ (1,2) \quad cB \to Bc\ (3) \quad bB \to bb\ (4)$$

- In G lässt sich beispielsweise das Wort $w = aabbcc$ ableiten:

$$\underline{S} \underset{(1)}{\Rightarrow} a\underline{S}Bc \underset{(2)}{\Rightarrow} aab\underline{cB}c \underset{(3)}{\Rightarrow} aa\underline{bB}cc \underset{(4)}{\Rightarrow} aabbcc$$

- Allgemein gilt für alle $n \geq 1$:

$$\underline{S} \underset{(1)}{\Rightarrow}^{n-1} a^{n-1}\underline{S}(Bc)^{n-1} \underset{(2)}{\Rightarrow} a^{n-1}ab\underline{c(Bc)^{n-1}}$$
$$\underset{(3)}{\Rightarrow}^{\binom{n}{2}} a^n \underline{bB^{n-1}}c^n \underset{(4)}{\Rightarrow}^{n-1} a^n b^n c^n$$

- Also gilt $a^n b^n c^n \in L(G)$ für alle $n \geq 1$

Eine kontextsensitive Grammatik für $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$

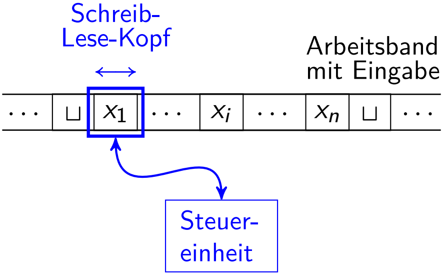
Beispiel (Schluss)

- Betrachte die kontextsensitive Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, B\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$ und den Regeln

$$P\colon S \to aSBc, abc \ (1,2) \quad cB \to Bc \ (3) \quad bB \to bb \ (4)$$

- Umgekehrt folgt durch Induktion über die Ableitungslänge m, dass jede Satzform $\alpha \in (V \cup \Sigma)^*$ mit $S \Rightarrow^m \alpha$ die folgenden Bedingungen erfüllt:
  - $\#_a(\alpha) = \#_b(\alpha) + \#_B(\alpha) = \#_c(\alpha)$
  - links von a und links von S kommen nur a's vor
  - links von b kommen nur a's oder b's vor
- Daraus ergibt sich, dass in G nur Wörter $w \in \Sigma^*$ der Form $w = a^n b^n c^n$ ableitbar sind, d.h. $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\} \in \mathrm{CSL}$ $\triangleleft$

Die Turingmaschine



- Um ein geeignetes Maschinenmodell für die kontextsensitiven Sprachen zu finden, führen wir zunächst das Rechenmodell der nichtdeterministischen Turingmaschine (NTM) ein
- Eine NTM erhält ihre Eingabe auf einem nach links und rechts unbegrenzten Band, das in Felder unterteilt ist; zudem kann sie weitere Bänder benutzen, die zu Beginn der Rechnung komplett leer sind
- In jedem Rechenschritt kann sie die aktuell besuchten Bandfelder lesen, die gelesenen Zeichen überschreiben und den Schreib-Lese-Kopf auf jedem Band um maximal ein Feld nach links oder rechts bewegen

Definition

- Sei $k \geq 1$. Eine nichtdeterministische k-Band-Turingmaschine (k-NTM oder einfach NTM) wird durch ein 6-Tupel $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ beschrieben. Dabei ist
  - Z eine endliche Menge von Zuständen
  - Σ das Eingabealphabet (mit $\sqcup \notin \Sigma$; $\sqcup$ heißt Leerzeichen oder Blank)
  - Γ das Arbeitsalphabet (mit $\Sigma \cup \{\sqcup\} \subseteq \Gamma$)
  - δ: $Z \times \Gamma^k \to \mathcal{P}(Z \times \Gamma^k \times \{L, R, N\}^k)$ die Überführungsfunktion
  - q_0 der Startzustand und
  - $E \subseteq Z$ die Menge der Endzustände
- Eine k-NTM M heißt deterministisch (kurz: M ist eine k-DTM oder einfach DTM), falls für alle $(q, a_1, \dots a_k) \in Z \times \Gamma^k$ gilt:

  $$\|\delta(q, a_1, \dots a_k)\| \leq 1$$

Das Rechenmodell der Turingmaschine

- Für $(q, b_1, \dots, b_k, D_1, \dots, D_k) \in \delta(p, a_1, \dots a_k)$ schreiben wir auch

$$(p, a_1, \dots, a_k) \to (q, b_1, \dots, b_k, D_1, \dots, D_k)$$

- Eine solche Anweisung ist ausführbar, falls
  - p der aktuelle Zustand von M ist und
  - sich für $i = 1, \dots, k$ der Kopf des i-ten Bandes auf einem mit a_i beschrifteten Feld befindet
- Bei ihrer Ausführung
  - geht M vom Zustand p in den Zustand q über
  - ersetzt auf Band $i = 1, \dots, k$ das Symbol a_i durch b_i und
  - bewegt den Kopf auf Band $i = 1, \dots, k$ gemäß D_i
(L: ein Feld nach links, R: ein Feld nach rechts, N: keine Bewegung)

- Eine Konfiguration ist ein $(3k+1)$-Tupel

$$K = (q, u_1, a_1, v_1, \dots, u_k, a_k, v_k) \in Z \times (\Gamma^* \times \Gamma \times \Gamma^*)^k$$

  und besagt, dass
  - q der momentane Zustand ist und
  - das i-te Band mit $\dots \sqcup u_i a_i v_i \sqcup \dots$ beschriftet ist, wobei sich der Kopf auf dem Zeichen a_i befindet
- Im Fall $k = 1$ notieren wir eine Konfiguration $K = (q, u, a, v)$ auch in der Form $K = uqav$

- Seien $K = (p, u_1, a_1, v_1, \ldots, u_k, a_k, v_k)$ und $K' = (q, u'_1, a'_1, v'_1, \ldots, u'_k, a'_k, v'_k)$ Konfigurationen
- K' heißt Folgekonfiguration von K (kurz $K \vdash K'$), falls eine Anweisung $(p, a_1, \ldots, a_k) \to (q, b_1, \ldots, b_k, D_1, \ldots, D_k)$ existiert, so dass für $i = 1, \ldots, k$ gilt:

$D_i = \mathrm{N}$	$D_i = \mathrm{R}$	$D_i = \mathrm{L}$
K: $u_i \; \boxed{a_i} \; v_i$	K: $u_i \; \boxed{a_i} \; v_i$	K: $u_i \; \boxed{a_i} \; v_i$
K': $u_i \; \boxed{b_i} \; v_i$	K': $u_i \; b_i \; \boxed{a'_i} \; v'_i$	K': $u'_i \; \boxed{a'_i} \; b_i \; v_i$
$u'_i = u_i$	$u'_i = u_i b_i$	$u'_i a'_i = \begin{cases} u_i, & u_i \neq \varepsilon \\ \sqcup, & \text{sonst} \end{cases}$
$a'_i = b_i$	$a'_i v'_i = \begin{cases} v_i, & v_i \neq \varepsilon \\ \sqcup, & \text{sonst} \end{cases}$	$v'_i = b_i v_i$
$v'_i = v_i$		

Das Rechenmodell der Turingmaschine

- Die Startkonfiguration von M bei Eingabe $x = x_1 \dots x_n \in \Sigma^*$ ist

$$K_x = \begin{cases} (q_0, \varepsilon, x_1, x_2 \dots x_n, \varepsilon, \sqcup, \varepsilon, \dots, \varepsilon, \sqcup, \varepsilon), & x \neq \varepsilon, \\ (q_0, \varepsilon, \sqcup, \varepsilon, \dots, \varepsilon \sqcup, \varepsilon), & x = \varepsilon \end{cases}$$

- Eine Rechnung von M bei Eingabe x ist eine (endliche oder unendliche) Folge von Konfigurationen $K_0, K_1, K_2 \dots$ mit $K_0 = K_x$ und $K_0 \vdash K_1 \vdash K_2 \dots$
- Die von M akzeptierte oder erkannte Sprache ist

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists\, K \in E \times (\Gamma^* \times \Gamma \times \Gamma^*)^k : K_x \vdash^* K\}$$

- Ein Wort x wird also genau dann von M akzeptiert (kurz: $M(x)$ akzeptiert), wenn es eine Rechnung von M bei Eingabe x gibt, bei der ein Endzustand erreicht wird

Das Rechenmodell der Turingmaschine

Beispiel

Betrachte die 1-DTM $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ mit $Z = \{q_0, \ldots q_4\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \Sigma \cup \{A, B, \sqcup\}$, $E = \{q_4\}$ und den Anweisungen

δ:	$q_0 a \to q_1 AR$	(1)	Beginn der Schleife: Falls ein a gelesen wird, ersetze es durch A und ...
	$q_1 a \to q_1 aR$	(2)	... lies a's und B's bis ein b kommt (falls kein b
	$q_1 B \to q_1 BR$	(3)	kommt, halte ohne zu akzeptieren), ersetze
	$q_1 b \to q_2 BL$	(4)	das b durch ein B und ...
	$q_2 a \to q_2 aL$	(5)	... bewege den Kopf wieder nach links bis
	$q_2 B \to q_2 BL$	(6)	auf das Feld hinter dem letzten A und
	$q_2 A \to q_0 AR$	(7)	gehe zum Beginn der Schleife
	$q_0 B \to q_3 BR$	(8)	Falls zu Beginn der Schleife ein B gelesen wird,
	$q_3 B \to q_3 BR$	(9)	teste, ob alle Eingabezeichen gelesen wurden
	$q_3 \sqcup \to q_4 \sqcup N$	(10)	(wenn ja, dann akzeptiere)

Beispiel (Fortsetzung)

Betrachte die 1-DTM $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ mit $Z = \{q_0, \dots q_4\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \Sigma \cup \{A, B, \sqcup\}$, $E = \{q_4\}$ und den Anweisungen

$$\begin{array}{llllllll}
\delta\colon q_0 a \to q_1 AR & (1) & q_1 a \to q_1 aR & (2) & q_2 a \to q_2 aL & (5) & q_0 B \to q_3 BR & (8) \\
 & & q_1 B \to q_1 BR & (3) & q_2 B \to q_2 BL & (6) & q_3 B \to q_3 BR & (9) \\
 & & q_1 b \to q_2 BL & (4) & q_2 A \to q_0 AR & (7) & q_3 \sqcup \to q_4 \sqcup N & (10)
\end{array}$$

- Dann akzeptiert M die Eingabe $aabb$ wie folgt:

$$\begin{array}{lllllllll}
q_0 aabb & \underset{(1)}{\vdash} & Aq_1 abb & \underset{(2)}{\vdash} & Aaq_1 bb & \underset{(4)}{\vdash} & Aq_2 aBb & \underset{(5)}{\vdash} & q_2 AaBb \\
 & \underset{(7)}{\vdash} & Aq_0 aBb & \underset{(1)}{\vdash} & AAq_1 Bb & \underset{(3)}{\vdash} & AABq_1 b & \underset{(4)}{\vdash} & AAq_2 BB \\
 & \underset{(6)}{\vdash} & Aq_2 ABB & \underset{(7)}{\vdash} & AAq_0 BB & \underset{(8)}{\vdash} & AABq_3 B & \underset{(9)}{\vdash} & AABBq_3 \sqcup \\
 & \underset{(10)}{\vdash} & AABBq_4 \sqcup & & & & & &
\end{array}$$

- Ähnlich lässt sich für ein beliebiges $n \geq 1$ zeigen, dass $a^n b^n \in L(M)$ ist

Beispiel (Schluss)

$$\delta\colon\ q_0 a \to q_1 AR\ (1)\quad \begin{array}{llllll} q_1 a \to q_1 aR & (2) & q_2 a \to q_2 aL & (5) & q_0 B \to q_3 BR & (8) \\ q_1 B \to q_1 BR & (3) & q_2 B \to q_2 BL & (6) & q_3 B \to q_3 BR & (9) \\ q_1 b \to q_2 BL & (4) & q_2 A \to q_0 AR & (7) & q_3 \sqcup \to q_4 \sqcup N & (10) \end{array}$$

- Andererseits führen die Eingaben aba, abb und aab auf die Rechnungen

$$q_0 aba \underset{(1)}{\vdash} Aq_1 ba \underset{(4)}{\vdash} q_2 ABa \underset{(7)}{\vdash} Aq_0 Ba \underset{(8)}{\vdash} ABq_3 a \quad \text{und}$$

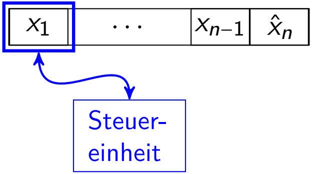
$$q_0 abb \underset{(1)}{\vdash} Aq_1 bb \underset{(4)}{\vdash} q_2 ABb \underset{(7)}{\vdash} Aq_0 Bb \underset{(8)}{\vdash} ABq_3 b \quad \text{und}$$

$$q_0 aab \underset{(1)}{\vdash} Aq_1 ab \underset{(2)}{\vdash} Aaq_1 b \underset{(4)}{\vdash} Aq_2 aB \underset{(5)}{\vdash} q_2 AaB \underset{(7)}{\vdash} Aq_0 aB \underset{(1)}{\vdash} AAq_1 B \underset{(8)}{\vdash} AABq_1 \sqcup$$

- Da diese nicht fortsetzbar sind und M deterministisch ist, kann M nicht den Endzustand q_4 erreichen, d.h. $aba, abb, aab \notin L(M)$
- Tatsächlich lässt sich zeigen, dass $L(M) = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ ist ◁

Ein Maschinenmodell für CSL

- In den Übungen werden wir eine 1-DTM M' für die Sprache $L' = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ konstruieren
- Wie M besucht auch M' außer den Eingabefeldern nur das erste Blank hinter der Eingabe
- Dies ist notwendig, damit M' das Ende der Eingabe erkennen kann
- Falls wir jedoch das letzte Zeichen der Eingabe x markieren, muss der Eingabebereich im Fall $|x| \geq 1$ für diesen Zweck nicht mehr verlassen werden:



- NTMs und DTMs mit dieser Eigenschaft werden auch als LBAs bzw. DLBAs bezeichnet

Linear beschränkte Automaten

Definition

- Für ein Alphabet Σ sei $\hat{\Sigma} = \Sigma \cup \{\hat{a} \mid a \in \Sigma\}$
- Für $x = x_1 \dots x_n \in \Sigma^*$ sei $\hat{x} = x_1 \dots x_{n-1}\hat{x}_n$
- Eine 1-NTM $M = (Z, \hat{\Sigma}, \Gamma, \delta, q_0, E)$ heißt LBA, falls gilt:

  $$\forall x \in \Sigma^+ : K_{\hat{x}} \vdash^* uqav \;\Rightarrow\; |uav| \le |x|$$

- Die von einem LBA M akzeptierte oder erkannte Sprache ist

  $$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid M(\hat{x}) \text{ akzeptiert}\}$$

- Ein deterministischer LBA wird auch als DLBA bezeichnet
- Die Klasse der deterministisch kontextsensitiven Sprachen ist DCSL $= \{L(M) \mid M \text{ ist ein DLBA}\}$

Bemerkung

Jede k-NTM, die bei Eingaben der Länge n höchstens linear viele (also $cn + c$ für eine Konstante c) Bandfelder benutzt, kann von einem LBA simuliert werden; LBA steht also für linear beschränkter Automat

Linear beschränkte Automaten

Beispiel

- Es ist nicht schwer, die 1-DTM $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ mit der Überführungsfunktion

$$\delta\colon\ \begin{array}{llllllll} q_0 a \to q_1 AR & (1) & q_1 a \to q_1 aR & (2) & q_2 a \to q_2 aL & (5) & q_0 B \to q_3 BR & (8) \\ & & q_1 B \to q_1 BR & (3) & q_2 B \to q_2 BL & (6) & q_3 B \to q_3 BR & (9) \\ & & q_1 b \to q_2 BL & (4) & q_2 A \to q_0 AR & (7) & q_3 \sqcup \to q_4 \sqcup N & (10) \end{array}$$

  in einen DLBA $M' = (Z,\ \hat{\Sigma},\ \Gamma',\ \delta',\ q_0,\ E)$ für die Sprache $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ umzuwandeln
- Ersetze hierzu
  - $\Sigma = \{a, b\}$ durch $\hat{\Sigma} = \{a, b, \hat{a}, \hat{b}\}$ und
  - $\Gamma = \Sigma \cup \{A, B, \sqcup\}$ durch $\Gamma' = \hat{\Sigma} \cup \{A, B, \hat{B}, \sqcup\}$
- Füge zudem
  - die Anweisungen $q_1 \hat{b} \to q_2 \hat{B} L$ $(4a)$ und $q_0 \hat{B} \to q_4 \hat{B} N$ $(8a)$ hinzu und
  - ersetze die Anweisung $q_3 \sqcup \to q_4 \sqcup N$ (10) durch $q_3 \hat{B} \to q_4 \hat{B} N$ $(10')$

Beispiel (Fortsetzung)

- Damit erhalten wir folgende Überführungsfunktion für den DLBA M':

$$
\begin{array}{llll@{\qquad}ll@{\qquad}ll}
\delta': & q_0 a \to q_1 AR & (1) & q_1 \hat{b} \to q_2 \hat{B} L & (4a) & q_0 B \to q_3 BR & (8) \\
& q_1 a \to q_1 aR & (2) & q_2 a \to q_2 aL & (5) & q_0 \hat{B} \to q_4 \hat{B} N & (8a) \\
& q_1 B \to q_1 BR & (3) & q_2 B \to q_2 BL & (6) & q_3 B \to q_3 BR & (9) \\
& q_1 b \to q_2 BL & (4) & q_2 A \to q_0 AR & (7) & q_3 \hat{B} \to q_4 \hat{B} N & (10')
\end{array}
$$

- Dieser akzeptiert die beiden Eingaben $a\hat{b}$ und $aab\hat{b}$ wie folgt:

$$
q_0 a\hat{b} \underset{(1)}{\vdash} Aq_1\hat{b} \underset{(4a)}{\vdash} q_2 A\hat{B} \underset{(7)}{\vdash} Aq_0\hat{B} \underset{(8a)}{\vdash} Aq_4\hat{B}
$$

$$
\begin{aligned}
q_0 aab\hat{b} &\underset{(1)}{\vdash} Aq_1 ab\hat{b} \underset{(2)}{\vdash} Aaq_1 b\hat{b} \underset{(4)}{\vdash} Aq_2 aB\hat{b} \underset{(5)}{\vdash} q_2 AaB\hat{b} \\
&\underset{(7)}{\vdash} Aq_0 aB\hat{b} \underset{(1)}{\vdash} AAq_1 B\hat{b} \underset{(3)}{\vdash} AABq_1\hat{b} \underset{(4a)}{\vdash} AAq_2 B\hat{B} \\
&\underset{(6)}{\vdash} Aq_2 AB\hat{B} \underset{(7)}{\vdash} AAq_0 B\hat{B} \underset{(8)}{\vdash} AABq_3\hat{B} \underset{(10')}{\vdash} AABq_4\hat{B}
\end{aligned}
$$

◁

Das LBA-Problem

Bemerkung

- Der DLBA M' für die Sprache $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ aus obigem Beispiel lässt sich leicht in einen DLBA für die kontextsensitive Sprache $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ transformieren (siehe Übungen)
- Die Sprache $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ liegt also in DCSL $\setminus$ CFL
- Bis heute ungelöst ist die Frage, ob die Klasse DCSL eine echte Teilklasse von CSL ist oder nicht
- Diese Fragestellung ist als LBA-Problem bekannt

Charakterisierung von CSL mittels LBAs

Als nächstes zeigen wir, dass LBAs genau die kontextsensitiven Sprachen erkennen.

Satz

$\mathrm{CSL} = \{L(M) \mid M \text{ ist ein LBA}\}$.

Beweis von CSL $\subseteq \{L(M) \mid M$ ist ein LBA$\}$

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine kontextsensitive Grammatik. Dann wird $L(G)$ von folgendem LBA M akzeptiert (o.B.d.A. sei $\varepsilon \notin L(G)$):

Arbeitsweise von M bei Eingabe $\hat{x} = x_1 \ldots x_{n-1}\hat{x}_n$ mit $n > 0$:

1 Markiere das erste Eingabezeichen x_1 mittels $\tilde{x}_1$ (bzw. $\hat{x}_1$ mittels $\tilde{\hat{x}}_1$)
2 Wähle (nichtdeterministisch) eine Regel $\alpha \to \beta$ aus P
3 Wähle ein beliebiges Vorkommen von β auf dem Band
    (falls β nicht vorkommt, halte ohne zu akzeptieren)
4 Ersetze die ersten $|\alpha|$ Zeichen von β durch α
5 Falls das erste (oder letzte) Zeichen von β markiert war,
    markiere auch das erste (letzte) Zeichen von α
6 Verschiebe die Zeichen rechts von β um $|\beta| - |\alpha|$ Positionen nach
    links und überschreibe die frei werdenden Felder mit Blanks
7 Falls auf dem Band das (doppelt markierte) Startsymbol erscheint,
    halte in einem Endzustand
8 Gehe zurück zu Schritt 2

Beweis von $\mathrm{CSL} \subseteq \{L(M) \mid M \text{ ist ein LBA}\}$

- Da M sukzessive ein Teilwort β des aktuellen Bandinhalts durch ein Wort α mit $|\alpha| \leq |\beta|$ ersetzt, ist M tatsächlich ein LBA
- Zudem akzeptiert M eine Eingabe x genau dann, falls es gelingt, eine Ableitung $S \Rightarrow^* x$ in G zu finden (in umgekehrter Reihenfolge von rechts nach links)
- Da sich genau für die Wörter $x \in L(G)$ eine solche Ableitung finden lässt, folgt $L(M) = L(G)$ $\square$

Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein LBA}\} \subseteq \mathrm{CSL}$

- Sei $M = (Z, \hat{\Sigma}, \Gamma, \delta, q_0, E)$ ein LBA (o.B.d.A. sei $\varepsilon \notin L(M)$).
- Betrachte die kontextsensitive Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

$$V = \{S, A\} \cup (Z\Gamma \cup \Gamma) \times \Sigma = \{S, A, (qd, a), (d, a) \mid q \in Z, d \in \Gamma, a \in \Sigma\},$$

die für alle $a, b \in \Sigma$ und $c, c', d \in \Gamma$ folgende Regeln enthält:

P:				
	$S \to A(\hat{a}, a), (q_0\hat{a}, a)$		(S)	„Startregeln“
	$A \to A(a, a), (q_0 a, a)$		(A)	„A-Regeln“
	$(c, a) \to a$		(F)	„Finale Regeln“
	$(qc, a) \to a,$	falls $q \in E$	(E)	„E-Regeln“
	$(qc, a) \to (q'c', a),$	falls $qc \to_M q'c'N$	(N)	„N-Regeln“
	$(qc, a)(d, b) \to (c', a)(q'd, b),$	falls $qc \to_M q'c'R$	(R)	„R-Regeln“
	$(d, a)(qc, b) \to (q'd, a)(c', b),$	falls $qc \to_M q'c'L$	(L)	„L-Regeln“

Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein LBA}\} \subseteq \mathrm{CSL}$

Beispiel

- Betrachte den LBA $M = (Z, \hat{\Sigma}, \Gamma, \delta, q_0, E)$ mit $Z = \{q_0, \ldots q_4\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{a, b, \hat{a}, \hat{b}, A, B, \hat{B}, \sqcup\}$ und $E = \{q_4\}$, sowie

$$
\begin{array}{lllll}
\delta\colon & q_0 a \to q_1 AR & q_1 b \to q_2 BL & q_2 A \to q_0 AR & q_0 \hat{B} \to q_4 \hat{B} N \\
 & q_1 a \to q_1 aR & q_1 \hat{b} \to q_2 \hat{B} L & q_2 B \to q_2 BL & q_3 B \to q_3 BR \\
 & q_1 B \to q_1 BR & q_2 a \to q_2 aL & q_0 B \to q_3 BR & q_3 \hat{B} \to q_4 \hat{B} N
\end{array}
$$

- Die zugehörige kontextsensitive Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ hat dann die Variablenmenge

$$
\begin{aligned}
V &= \{S, A\} \cup (Z\Gamma \cup \Gamma) \times \Sigma \\
&= \{S, A, (q_i c, a), (q_i c, b), (c, a), (c, b) \mid 0 \le i \le 4, c \in \Gamma\}
\end{aligned}
$$

- Die Regelmenge P von G enthält folgende Start- und A-Regeln:

$$
\begin{array}{ll}
S \to A(\hat{a}, a),\ A(\hat{b}, b),\ (q_0 \hat{a}, a),\ (q_0 \hat{b}, b) & (S_1\text{-}S_4) \\
A \to A(a, a),\ A(b, b),\ (q_0 a, a),\ (q_0 b, b) & (A_1\text{-}A_4)
\end{array}
$$

Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein LBA}\} \subseteq \mathrm{CSL}$

Beispiel (Fortsetzung)

- Zudem enthält P wegen $E = \{q_4\}$ für jedes $c \in \Gamma$ die F- und E-Regeln

$$(c, a) \to a, \ (c, b) \to b \qquad (F_1\text{-}F_{16})$$
$$(q_4 c, a) \to a, \ (q_4 c, b) \to b \qquad (E_1\text{-}E_{16})$$

- Daneben enthält P beispielsweise noch folgende Regeln:
  - Wegen der Anweisung $q_3\hat{B} \to q_4\hat{B}N$ die beiden N-Regeln

    $$(q_3\hat{B}, a) \to (q_4\hat{B}, a) \text{ und } (q_3\hat{B}, b) \to (q_4\hat{B}, b)$$

  - Wegen der Anweisung $q_1 b \to q_2 BL$ für jedes $d \in \Gamma$ die 4 L-Regeln

    $$(d, a)(q_1 b, a) \to (q_2 d, a)(B, a) \quad (d, a)(q_1 b, b) \to (q_2 d, a)(B, b)$$
    $$(d, b)(q_1 b, a) \to (q_2 d, b)(B, a) \quad (d, b)(q_1 b, b) \to (q_2 d, b)(B, b)$$

  - Wegen der Anweisung $q_0 a \to q_1 AR$ für jedes $d \in \Gamma$ die 4 R-Regeln

    $$(q_0 a, a)(d, a) \to (A, a)(q_1 d, a) \quad (q_0 a, a)(d, b) \to (A, a)(q_1 d, b)$$
    $$(q_0 a, b)(d, a) \to (A, b)(q_1 d, a) \quad (q_0 a, b)(d, b) \to (A, b)(q_1 d, b) \quad \triangleleft$$

Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein LBA}\} \subseteq \mathrm{CSL}$

- Sei $M = (Z, \hat{\Sigma}, \Gamma, \delta, q_0, E)$ ein LBA (o.B.d.A. sei $\varepsilon \notin L(M)$).
- Betrachte die kontextsensitive Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

$$V = \{S, A\} \cup (Z\Gamma \cup \Gamma) \times \Sigma = \{S, A, (qd, a), (d, a) \mid q \in Z, d \in \Gamma, a \in \Sigma\},$$

die für alle $a, b \in \Sigma$ und $c, c', d \in \Gamma$ folgende Regeln enthält:

P:	$S \to A(\hat{a}, a), (q_0\hat{a}, a)$		(S)	„Startregeln“
	$A \to A(a, a), (q_0 a, a)$		(A)	„A-Regeln“
	$(c, a) \to a$		(F)	„Finale Regeln“
	$(qc, a) \to a,$	falls $q \in E$	(E)	„E-Regeln“
	$(qc, a) \to (q'c', a),$	falls $qc \to_M q'c'N$	(N)	„N-Regeln“
	$(qc, a)(d, b) \to (c', a)(q'd, b),$	falls $qc \to_M q'c'R$	(R)	„R-Regeln“
	$(d, a)(qc, b) \to (q'd, a)(c', b),$	falls $qc \to_M q'c'L$	(L)	„L-Regeln“

Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein LBA}\} \subseteq \mathrm{CSL}$

- Durch Induktion über m lässt sich nun leicht für alle $a_1, \ldots, a_n \in \Gamma$ und $q \in Z$ die folgende Äquivalenz beweisen:

$$q_0 x_1 \ldots x_{n-1} \hat{x}_n \vdash^m a_1 \ldots a_{i-1} q a_i \ldots a_n \text{ gdw.}$$

$$(q_0 x_1, x_1) \ldots (\hat{x}_n, x_n) \underset{(N,R,L)}{\Rightarrow}^m (a_1, x_1) \ldots (q a_i, x_i) \ldots (a_n, x_n)$$

- Ist also $q_0 x_1 \ldots x_{n-1} \hat{x}_n \vdash^m a_1 \ldots a_{i-1} q a_i \ldots a_n$ eine akzeptierende Rechnung von $M(x_1 \ldots x_{n-1} \hat{x}_n)$ mit $q \in E$, so folgt

$$S \underset{(S)}{\Rightarrow} A(\hat{x}_n, x_n) \underset{(A)}{\Rightarrow}^{n-1} (q_0 x_1, x_1)(x_2, x_2) \ldots (x_{n-1}, x_{n-1})(\hat{x}_n, x_n)$$

$$\underset{(N,L,R)}{\Rightarrow}^m (a_1, x_1) \ldots (a_{i-1}, x_{i-1})(q a_i, x_i) \ldots (a_n, x_n) \underset{(F,E)}{\Rightarrow}^n x_1 \ldots x_n$$

- Die Inklusion $L(G) \subseteq L(M)$ folgt analog $\square$

Bemerkung

Eine einfache Modifikation des Beweises zeigt, dass 1-NTMs genau die Sprachen vom Typ 0 akzeptieren (siehe Übungen).

Zusammenfassung der Abschlusseigenschaften

	Vereinigung	Schnitt	Komplement	Produkt	Sternhülle
REG	ja	ja	ja	ja	ja
DCFL	nein	nein	ja	nein	nein
CFL	ja	nein	nein	ja	ja
DCSL	ja	ja	ja	ja	ja
CSL	ja	ja	ja	ja	ja
RE	ja	ja	nein	ja	ja

- In der VL Komplexitätstheorie wird gezeigt, dass die Klasse CSL unter Komplementbildung abgeschlossen ist
- Im nächsten Kapitel werden wir sehen, dass die Klasse RE nicht unter Komplementbildung abgeschlossen ist
- Die übrigen Abschlusseigenschaften der Klassen DCSL, CSL und RE in obiger Tabelle werden in den Übungen bewiesen