Einführung in die Theoretische Informatik

Johannes Köbler

Institut für Informatik
Humboldt-Universität zu Berlin

WS 2018/19

Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \mathrm{CFL}$

Beispiel

- Betrachte den PDA $M = (\{p, q\}, \{a, b\}, \{A, \#\}, \delta, p, \#)$ mit den Anweisungen

$$\begin{array}{llllll} \delta: p\varepsilon\# \to q & (1) & pa\# \to pA & (2) & paA \to pAA & (3) \\ pbA \to q & (4) & qbA \to q & (5) & & \end{array}$$

- Der zugehörige PDA $M' = (\{z\}, \{a, b\}, \Gamma', \delta', z, S)$ mit nur einem Zustand hat dann das Kelleralphabet

$$\Gamma' = \{S, X_{p\#p}, X_{p\#q}, X_{q\#p}, X_{q\#q}, X_{pAp}, X_{pAq}, X_{qAp}, X_{qAq}\}$$

Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \mathrm{CFL}$

Beispiel (Fortsetzung)

- Zudem enthält M' neben den beiden Anweisungen $\cancel{z\varepsilon S \to zX_{p\#p} \ (0)}$ und $z\varepsilon S \to zX_{p\#q}$ $(0')$ die folgenden Anweisungen:

Anweisung von M		k	$p_2, \ldots, p_{k+1}$	Anweisungen von M'	
$p\varepsilon\# \to q$	(1)	0	-	$z\varepsilon X_{p\#q} \to z$	$(1')$
$pa\# \to pA$	(2)	1	p	$\cancel{zaX_{p\#p} \to zX_{pAp}}$	$\cancel{(2')}$
			q	$zaX_{p\#q} \to zX_{pAq}$	$(2'')$
$paA \to pAA$	(3)	2	p, p	$zaX_{pAp} \to zX_{pAp}X_{pAp}$	$(3')$
			p, q	$zaX_{pAq} \to zX_{pAp}X_{pAq}$	$(3'')$
			q, p	$\cancel{zaX_{pAp} \to zX_{pAq}X_{qAp}}$	$\cancel{(3''')}$
			q, q	$zaX_{pAq} \to zX_{pAq}X_{qAq}$	$(3'''')$
$pbA \to q$	(4)	0	-	$zbX_{pAq} \to z$	$(4')$
$qbA \to q$	(5)	0	-	$zbX_{qAq} \to z$	$(5')$

Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \mathrm{CFL}$

Beispiel (Schluss)

- Der (akzeptierenden) Rechnung

Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \text{CFL}$

Beispiel (Schluss)

- Der (akzeptierenden) Rechnung

  $(p, aabb, \#)$

$$\boxed{\#}$$

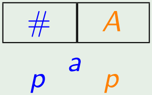
$$p$$

Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \mathrm{CFL}$

Beispiel (Schluss)

- Der (akzeptierenden) Rechnung

$$(p, aabb, \#) \underset{(2)}{\vdash} (p, abb, A)$$

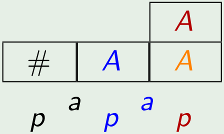


Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \text{CFL}$

Beispiel (Schluss)

- Der (akzeptierenden) Rechnung

$$(p, aabb, \#) \underset{(2)}{\vdash} (p, abb, A) \underset{(3)}{\vdash} (p, bb, AA)$$

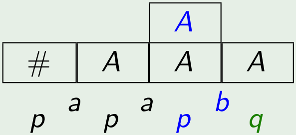


Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \mathrm{CFL}$

Beispiel (Schluss)

- Der (akzeptierenden) Rechnung

$$(p, aabb, \#) \underset{(2)}{\vdash} (p, abb, A) \underset{(3)}{\vdash} (p, bb, AA) \underset{(4)}{\vdash} (q, b, A)$$

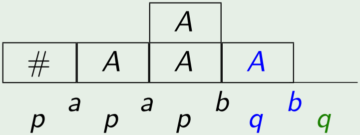


Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \mathrm{CFL}$

Beispiel (Schluss)

- Der (akzeptierenden) Rechnung

$$(p, aabb, \#) \underset{(2)}{\vdash} (p, abb, A) \underset{(3)}{\vdash} (p, bb, AA) \underset{(4)}{\vdash} ({\color{blue}q}, {\color{blue}b}, {\color{blue}A}) \underset{\color{blue}(5)}{\vdash} ({\color{green}q}, \varepsilon, \varepsilon)$$

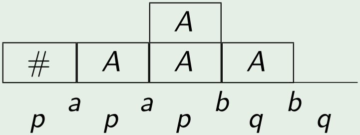


Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \mathsf{CFL}$

Beispiel (Schluss)

- Der (akzeptierenden) Rechnung

$$(p, aabb, \#) \underset{(2)}{\vdash} (p, abb, A) \underset{(3)}{\vdash} (p, bb, AA) \underset{(4)}{\vdash} (q, b, A) \underset{(5)}{\vdash} (q, \varepsilon, \varepsilon)$$



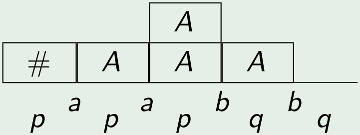
von M entspricht dann folgende Rechnung von M':

Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \text{CFL}$

Beispiel (Schluss)

- Der (akzeptierenden) Rechnung

$$(p, aabb, \#) \underset{(2)}{\vdash} (p, abb, A) \underset{(3)}{\vdash} (p, bb, AA) \underset{(4)}{\vdash} (q, b, A) \underset{(5)}{\vdash} (q, \varepsilon, \varepsilon)$$



von M entspricht dann folgende Rechnung von M':

$$(z, aabb, S)$$

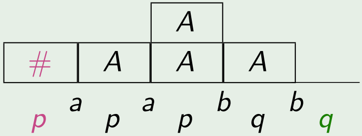
$$\boxed{S}$$

Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \mathrm{CFL}$

Beispiel (Schluss)

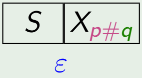
- Der (akzeptierenden) Rechnung

$$(p, aabb, \#) \underset{(2)}{\vdash} (p, abb, A) \underset{(3)}{\vdash} (p, bb, AA) \underset{(4)}{\vdash} (q, b, A) \underset{(5)}{\vdash} (q, \varepsilon, \varepsilon)$$



von M entspricht dann folgende Rechnung von M':

$$(z, aabb, S) \underset{(0')}{\vdash} (z, aabb, X_{p\#q})$$

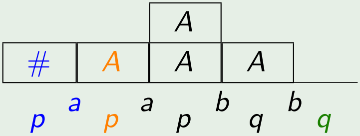


Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \mathrm{CFL}$

Beispiel (Schluss)

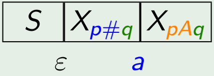
- Der (akzeptierenden) Rechnung

$$(p, aabb, \#) \underset{(2)}{\vdash} (p, abb, A) \underset{(3)}{\vdash} (p, bb, AA) \underset{(4)}{\vdash} (q, b, A) \underset{(5)}{\vdash} (q, \varepsilon, \varepsilon)$$



von M entspricht dann folgende Rechnung von M':

$$(z, aabb, S) \underset{(0')}{\vdash} (z, aabb, X_{p\#q}) \underset{(2'')}{\vdash} (z, abb, X_{pAq})$$

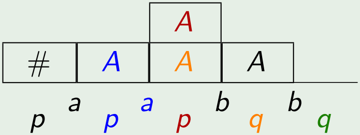


Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \mathrm{CFL}$

Beispiel (Schluss)

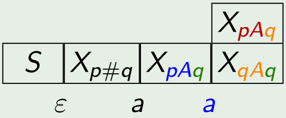
- Der (akzeptierenden) Rechnung

$$(p, aabb, \#) \underset{(2)}{\vdash} (p, abb, A) \underset{(3)}{\vdash} (p, bb, AA) \underset{(4)}{\vdash} (q, b, A) \underset{(5)}{\vdash} (q, \varepsilon, \varepsilon)$$



von M entspricht dann folgende Rechnung von M':

$$(z, aabb, S) \underset{(0')}{\vdash} (z, aabb, X_{p\#q}) \underset{(2'')}{\vdash} (z, abb, X_{pAq})$$
$$\underset{(3'''')}{\vdash} (z, bb, X_{pAq}X_{qAq})$$

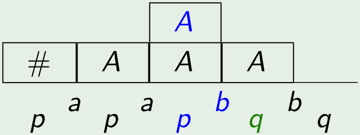


Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \mathrm{CFL}$

Beispiel (Schluss)

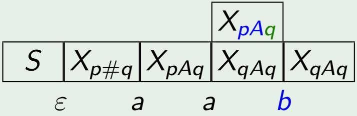
- Der (akzeptierenden) Rechnung

$$(p, aabb, \#) \underset{(2)}{\vdash} (p, abb, A) \underset{(3)}{\vdash} (p, bb, AA) \underset{(4)}{\vdash} (q, b, A) \underset{(5)}{\vdash} (q, \varepsilon, \varepsilon)$$



von M entspricht dann folgende Rechnung von M':

$$(z, aabb, S) \underset{(0')}{\vdash} (z, aabb, X_{p\#q}) \underset{(2'')}{\vdash} (z, abb, X_{pAq})$$
$$\underset{(3'''')}{\vdash} (z, bb, X_{pAq}X_{qAq}) \underset{(4')}{\vdash} (z, b, X_{qAq})$$

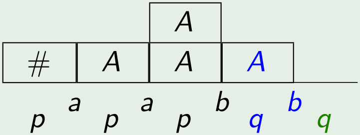


Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \mathrm{CFL}$

Beispiel (Schluss)

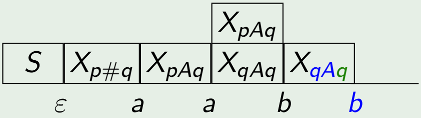
- Der (akzeptierenden) Rechnung

$$(p, aabb, \#) \underset{(2)}{\vdash} (p, abb, A) \underset{(3)}{\vdash} (p, bb, AA) \underset{(4)}{\vdash} (q, b, A) \underset{(5)}{\vdash} (q, \varepsilon, \varepsilon)$$



von M entspricht dann folgende Rechnung von M':

$$(z, aabb, S) \underset{(0')}{\vdash} (z, aabb, X_{p\#q}) \underset{(2'')}{\vdash} (z, abb, X_{pAq})$$
$$\underset{(3'''')}{\vdash} (z, bb, X_{pAq}X_{qAq}) \underset{(4')}{\vdash} (z, b, X_{qAq}) \underset{(5')}{\vdash} (z, \varepsilon, \varepsilon)$$



Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \mathsf{CFL}$

Beispiel (Schluss)

- Der (akzeptierenden) Rechnung

$$(p, aabb, \#) \underset{(2)}{\vdash} (p, abb, A) \underset{(3)}{\vdash} (p, bb, AA) \underset{(4)}{\vdash} (q, b, A) \underset{(5)}{\vdash} (q, \varepsilon, \varepsilon)$$

		A	
$\#$	A	A	A

$p \quad a \quad p \quad a \quad p \quad b \quad q \quad b \quad q$

von M entspricht dann folgende Rechnung von M':

$$(z, aabb, S) \underset{(0')}{\vdash} (z, aabb, X_{p\#q}) \underset{(2'')}{\vdash} (z, abb, X_{pAq})$$

$$\underset{(3'''')}{\vdash} (z, bb, X_{pAq}X_{qAq}) \underset{(4')}{\vdash} (z, b, X_{qAq}) \underset{(5')}{\vdash} (z, \varepsilon, \varepsilon)$$

			X_{pAq}	
S	$X_{p\#q}$	X_{pAq}	X_{qAq}	X_{qAq}

$\varepsilon \quad a \quad a \quad b \quad b$

$\triangleleft$