Probeklausur

Hinweise zur Klausur:

- Klausurtermin: 28. 2. 2019 um 12 Uhr (Einlass) in RUD26 0'110 und 0'115.
- Nachklausurtermin: 2. 4. 2019 um 9 Uhr (Einlass) in RUD26 0'110 und 0'115 (die Nachklausur kann ohne Teilnahme an der ersten Klausur geschrieben werden).
- Anmeldung in Agnes nur mit Übungsschein (d.h. 190 schriftliche Punkte + 65 MC-Test-Punkte oder alter ÜS) bis 21.2.2019 (Klausur) bzw. 26.3.2019 (Nachklausur).
- Die Bearbeitungszeit wird 120 Minuten betragen.
- Bitte bringen Sie Ihren Studenten- und einen gültigen **amtlichen** Lichtbildausweis (Personalausweis, Reisepass oder Führerschein) mit, ein Foto auf der CampusCard genügt **nicht**.
- Als Hilfsmittel sind eigene Notizen (auch gedruckt) und Skript erlaubt. Bücher und elektronische Geräte (Taschenrechner, Handy etc.) sind **nicht** zugelassen.
- Am 25.2.2019 ab 10 Uhr findet in RUD26 0'307 eine Fragestunde statt.

Aufgabe 1 Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$. ***22 Punkte***

(a) Sei $L_1 = L((c(a|b)^*b)^*)$.

 (i) Welche der Wörter $\varepsilon, abc, cbcabab, cbbabccb$ gehören zu L_1?

 (ii) Geben Sie einen NFA M für L_1 mit 2 oder 3 Zuständen an.

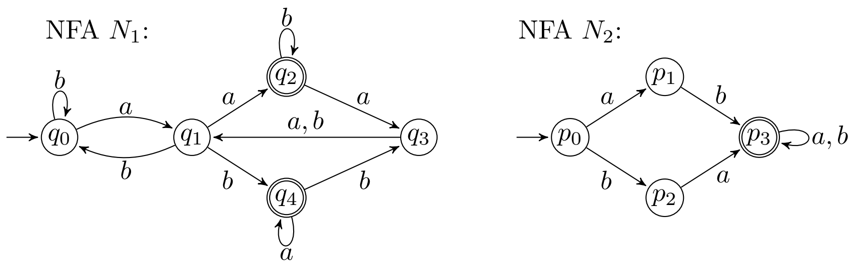
 (iii) Geben Sie einen Minimal-DFA für L_1 an. Begründen Sie seine Minimalität.

 (iv) Geben Sie den Index der Nerode-Relation $\sim_{L_1}$ an (mit Begründung). Geben Sie ein Repräsentantensystem für $\sim_{L_1}$ an.

(b) Sind die folgenden Sprachen regulär? Begründen Sie.

 (i) $L_2 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}^*$ (ii) $L_3 = L_1 \cap L_2$

Aufgabe 2 Betrachten Sie die NFAs N_1 und N_2. ***12 Punkte***



(a) Konstruieren Sie einen NFA für die Sprache $L(N_1)L(N_2)$.

(b) Konsturieren Sie einen NFA für die Sprache $L(N_1)^*$.

Aufgabe 3 Betrachten Sie die Sprache $L = L(G)$ für die Grammatik ***24 Punkte***

$$G = (\{S\}, \{a,b,c\}, P, S) \text{ mit } P: \quad S \to aS,\ aScS,\ b \quad .$$

(a) Geben Sie zwei verschiedene Rechtsableitungen für das Wort *aabcb* an.

(b) Wandeln Sie G nach dem Vorlesungsverfahren in einen PDA für L um.

(c) Geben Sie eine Grammatik G' mit $L(G')$=L in Chomsky-Normalform an.

(d) Geben Sie für jede der folgenden Eigenschaften ein Wort $w \in L$ an, das die jeweilige Eigenschaft erfüllt, oder begründen Sie, warum ein solches Wort w in L nicht vorkommt.

(i) $\#_b(w) \geq \#_a(w)$

(ii) $\#_a(w) < \#_c(w)$

(e) Geben Sie entweder einen regulären Ausdruck für L an oder beweisen Sie, dass es keinen geben kann.

Aufgabe 4 ***22 Punkte***

(a) Betrachten Sie die Sprache $L = L(G)$ für die Grammatik

$$\begin{array}{lllllll} G & = & (\{A,B,C,S\}, \{a,b,c\}, P, S) & & & & \\ \text{mit} & P: & S \to AB, AC & (1),(2) & & A \to a & (4) \\ & & C \to SB & (3) & & B \to b & (5) \end{array}$$

(i) Geben Sie eine Links- und eine Rechtsableitung für das Wort *aabb* in G an.

(ii) Entscheiden Sie mit dem CYK-Algorithmus, ob das Wort *aaabb* in L ist.

(b) Sei $M = (\{q\}, \{a,b\}, \{A,B,\#\}, \delta, q, \#)$ der PDA mit den Anweisungen

$$\begin{array}{llllll} \delta: & qa\# \to qA\# & (1) & & qb\# \to qB\# & (2) \\ & qaA \to qAA & (3) & & qaB \to q & (4) \\ & qbA \to q & (5) & & qbB \to qBB & (6) \\ & q\varepsilon\# \to q & (7) & & & \end{array}$$

(i) Geben Sie eine akzeptierende Rechnung von M bei Eingabe *abbaab* an.

(ii) Geben Sie eine explizite Beschreibung von $L(M)$ an.

(iii) Geben Sie an, ob M deterministisch ist. Begründen Sie.

(iv) Geben Sie einen DPDA M' mit $L(M') = L(M)$ an.

Hinweis: Es genügt, einen neuen Endzustand e hinzuzufügen und einige Anweisungen entsprechend anzupassen. Bei Anweisungen, die Sie unverändert übernehmen, genügt es, lediglich deren Nummern aufzuzählen. Geben Sie das Tupel für den DPDA M' aber komplett an.

Aufgabe 5 ***15 Punkte***

Geben Sie für jede der folgenden Sprachen an, ob sie (1) in REC, (2) in $\mathsf{RE} \setminus \mathsf{REC}$, oder (3) nicht einmal in RE liegt. Begründen Sie.

(a) $L_1 = \left\{w \in \{0,1\}^* \mid \text{die DTM } M_w \text{ schreibt bei Eingabe } \varepsilon \text{ nur Blanks}\right\}$

(b) $L_2 = L_{\mathcal{F}}$ für $\mathcal{F} = \left\{f \in \mathsf{FREC}_p \mid \exists w \in \{0,1\}^*, \text{ sodass } f(w) = w\right\}$

(c) $L_3 = \left\{v\#w \mid v, w \in \{0,1\}^*,\ M_v \text{ und } M_w \text{ halten bei denselben Eingaben}\right\}$

Aufgabe 6 Betrachten Sie auf $C = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ die Relationen ***20 Punkte***

$$S = \{(1,1),(2,2),(2,3),(3,4)\} \quad \text{und}$$

$$T = \{(1,2),(3,2),(2,4),(5,4),(4,6),(4,7)\}^* \quad .$$

(a) Stellen Sie (C, S^2) und (C, S^+) graphisch dar.

(b) Begründen Sie, warum (C, T) eine Ordnung ist.

(c) Geben Sie das Hasse-Diagram von (C, T) sowie zwei obere Schranken von $\{2,5\}$ in (C, T) an.

(d) Liegt folgendes Problem in P oder ist es NP-hart? Begründen Sie.

TRANS-REL

Gegeben: Eine Relationalstruktur (A, R).

Gefragt: Ist R transitiv?

(e) Liegt folgendes Problem in P oder ist es NP-hart? Begründen Sie.

SEMKON-REST

Gegeben: Eine Relationalstruktur (A, R) sowie $k \in \mathbb{N}$.

Gefragt: Gibt es ein $B \subseteq A$, $\|B\| = k$, sodass R_B semikonnex auf B ist?

Aufgabe 7 Sei $G_1 = (\{S,T,U\},\{a\},P,S)$ die Grammatik ***24 Punkte***

mit P:

$$S \to \varepsilon, TUT \qquad TU \to UTT, TTU \qquad TTT \to UUU$$
$$TT \to aa \qquad U \to aaa$$

(a) Geben Sie alle Satzformen $\alpha \in \{S,T,U,a\}^*$ der Länge höchstens 4 an, die sich in G_1 in höchstens 5 Schritten aus S ableiten lassen.

(b) Ist $aaaa \in L(G_1)$? Begründen Sie kurz, warum es genügt, a) zu lösen, um diese Frage zu beantworten.

(c) Gibt es eine unentscheidbare Sprache A und eine reguläre Sprache B, deren Schnitt $A \cap B$ kontextfrei aber nicht regulär ist? Geben Sie solche Sprachen an und begründen Sie, warum Sie in den genannten Klassen (nicht) enthalten sind bzw. begründen Sie, warum es solche Sprachen nicht geben kann.

(d) Ist folgendes Problem WORD4 entscheidbar? Begründen Sie.

Gegeben: Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$

Gefragt: Ist in G ein Wort $x \in \Sigma^*$ der Länge ≥ 4 ableitbar?

(e) Ist folgendes Problem FORM4 entscheidbar? Begründen Sie.

Gegeben: Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$

Gefragt: Ist in G eine Satzform $x \in (\Sigma \cup V)^*$ der Länge ≥ 4 ableitbar?

Aufgabe 8 Betrachten Sie das Problem ALLEVENCYCLE: ***12 Punkte***

Gegeben: Ein Graph $G = (V, E)$.

Gefragt: Existiert in G ein Kreis, auf dem genau die Knoten von G mit geradem Grad liegen?

(a) Geben Sie Graphen $G_1 \in$ ALLEVENCYCLE und $G_1' \notin$ ALLEVENCYCLE mit jeweils genau 6 Knoten an.

(b) Sei $G_2 = (\{1,2,3,4,5\}, \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{4,5\}, \{5,1\}\})$. Erweitern Sie G_2 durch Hinzufügen von Knoten und Kanten zu einem Graphen G_2', in dem die Knoten 1 bis 5 geraden Grad und die neuen Knoten ungeraden Grad sowie alle hinzugefügten Kanten mindestens einen neuen Knoten als Endpunkt haben.

(c) Beschreiben Sie eine Polynomialzeitreduktionsfunktion f von HAMCYCLE auf ALLEVENCYCLE. Zeigen Sie die Korrektheit von f, d.h. dass für alle Graphen G gilt: $G \in$ HAMCYCLE $\Leftrightarrow f(G) \in$ ALLEVENCYCLE.

Aufgabe 9 ***7 Punkte***

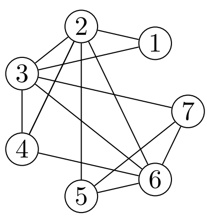
Geben Sie Graphen G_i, $i \in \{1,2,3,4\}$ mit jeweils der Eigenschaft aus der Teilaufgabe an.

(a) G_1 und G_2 haben jeweils genau 7 Knoten und jeder Knoten hat Grad 2, aber G_1 und G_2 sind nicht isomorph.

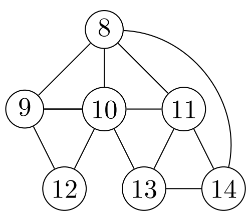
(b) G_3 ist ein Graph mit minimaler Kantenzahl, sodass G_3 mindestens eine Kante hat, zusammenhängend ist und keinen Hamiltonpfad besitzt.

(c) $G_4 = (V_4, E_4)$ hat genau 4 Knoten und sowohl G_4 als auch dessen Komplementärgraph $\overline{G_4}$ besitzen eine Eulerlinie.
Erinnerung: $\overline{G_4} = (V_4, \{\{u,v\} \mid u, v \in V_4, u \neq v, \{u,v\} \notin E_4\})$

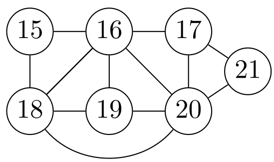
Aufgabe 10 Betrachten Sie folgende Graphen: ***12 Punkte***



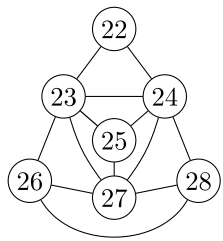
G_1



G_2



G_3



G_4

(a) Geben Sie für $1 \leq i \leq 4$ die Cliquenzahl $\omega(G_i)$ an. Begründen Sie.

(b) Für welche $1 \leq i < j \leq 4$ sind G_i und G_j isomorph? Begründen Sie.