Übungsblatt 13

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 29. 1.– 1. 2. 2019
Bearbeitung des Moodle-MC-Tests bis 28. 1. 2019, 23:59 Uhr
Abgabe der schriftlichen Lösungen am 5. 2. 2019 bis 15:10 Uhr
im Hörsaal vor der Vorlesung

Essentielle Begriffe: Satz von Rice, PCP, (GOTO-Programm, P,NP)

Abzugeben sind 4 Blätter jeweils mit den Aufgaben: 75;77;78;79

Aufgabe 75 ***12 Punkte***

Bestimmen Sie, welche der folgenden Sprachen entscheidbar, semi-entscheidbar, oder nicht semi-entscheidbar sind. Begründen Sie.

(a) $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{es gibt ein } w' \in \{0,1\}^* \text{ mit } M_w(w') = 0\}$ *(mündlich)*

(b) $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{es gibt ein } w' \in \{0,1\}^* \text{ mit } M_{w'}(w) = 0\}$ *(mündlich)*

(c) $L_3 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \overline{L(M_w)} \text{ ist semi-entscheidbar}\}$ *(mündlich)*

(d) $L_4 = \left\{w \in \{0,1\}^* \,\middle|\, M_w(w) \text{ führt immer die Kopfbewegung } R \text{ aus}\right\}$ *(mündlich)*

(e) $L_5 = \left\{w \in \{0,1\}^* \,\middle|\, M_w(w) \text{ führt nie die Kopfbewegung } N \text{ aus}\right\}$ *(mündlich)*

(f) $L_6 = \{w \in \{0,1\}^* \mid L(M_w) \text{ ist rekursiv aufzählbar}\}$ *(3 Punkte)*

(g) $L_7 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{es gibt ein } w' \neq w \text{ mit } L(M_w) = L(M_{w'})\}$ *(3 Punkte)*

(h) $L_8 = \left\{w \in \{0,1\}^* \,\middle|\, M_w(w) = w\right\}$ *(3 Punkte)*

(i) $L_9 = \left\{w \in \{0,1\}^* \,\middle|\, L(M_w) \in \mathsf{REG}\right\}$ *(3 Punkte)*

Aufgabe 76 ***mündlich***

Für eine Sprachklasse $\mathcal{S}$ sei $L_{\mathcal{S}} = \left\{w \in \{0,1\}^* \,\middle|\, L(M_w) \in \mathcal{S}\right\}$. Beweisen sie folgende Variante des Satzes von Rice: $L_{\mathcal{S}}$ ist unentscheidbar, außer wenn $L_{\mathcal{S}} \in \left\{\varnothing, \{0,1\}^*\right\}$.

Aufgabe 77 ***5 Punkte***

(a) Entscheiden Sie die beiden folgenden PCP_Γ-Instanzen mit $\Gamma = \{a, b\}$:

$$I_1 = \begin{pmatrix} a & ba & abb & bab \\ ab & ab & bb & abb \end{pmatrix} \qquad I_2 = \begin{pmatrix} aaaa & aa \\ aaa & aaaaa \end{pmatrix}$$

Geben Sie im positiven Fall eine PCP-Lösung an und beweisen Sie im negativen Fall, dass keine PCP-Lösung existiert. *(mündlich)*

(b) Zeigen Sie, dass PCP_Σ über unären Alphabet Σ entscheidbar ist. *(5 Punkte)*

Aufgabe 78 Gegeben sei die 2-DTM $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \varnothing)$ ***8 Punkte***
mit $Z = \{q_0, q_1, q_0', q_1', q_2\}$, $\Sigma = \{a\}$, $\Gamma = \{a, \not{c}, \sqcup\}$ und

$$\delta: \begin{array}{llll} q_0 a\sqcup \to q_1 \not{c}\sqcup RN, & q_0 \not{c}\sqcup \to q_0 \not{c}\sqcup RN, & q_1 a\sqcup \to q_0' a\sqcup RN, & q_1 \not{c}\sqcup \to q_1 \not{c}\sqcup RN, \\ q_0' a\sqcup \to q_1' \not{c}\sqcup RN, & q_0' \not{c}\sqcup \to q_0' \not{c}\sqcup RN, & q_1' a\sqcup \to q_0' a\sqcup RN, & q_1' \not{c}\sqcup \to q_1' \not{c}\sqcup RN, \\ q_0' \sqcup\sqcup \to q_2 \sqcup a LR, & q_1' \sqcup\sqcup \to q_2 \sqcup a LR, & q_2 a\sqcup \to q_2 a\sqcup LN, & q_2 \not{c}\sqcup \to q_2 \not{c}\sqcup LN, \\ q_2 \sqcup\sqcup \to q_0 \sqcup\sqcup RN & & & \end{array}$$

(a) Beschreiben Sie die Rechnung von M bei Eingabe a^7. *(mündlich)*

(b) Sei g die von M berechnete Funktion. Geben Sie die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g(a^n) = a^{f(n)}$ an. Begründen Sie. *(mündlich)*

Bemerkung: Später werden wir f als numerische Repräsentation von g bezeichnen und es gilt: $f(n) = num_{\{a\}}\big(g(str_{\{a\}}(n))\big)$.

(c) Geben Sie für f ein GOTO-Programm mit Korrektheitsbegründung an, das nur die Register r_0 bis r_3 nutzt und maximal 16 Anweisungen enthält. *(8 Punkte)*

Aufgabe 79 Zeigen Sie: ***5+20 Punkte***

(a) NP ist unter $\cup$, $\cap$, Produkt und Sternhülle abgeschlossen. *(1+1+1+2 P.)*

(b) Auch P ist unter diesen Operationen abgeschlossen. *(1+1+1+6 ZP.)*

Hinweis: Benutzen Sie dynamische Programmierung (ähnlich dem CYK-Algorithmus), um zu zeigen, dass P unter Sternhülle abgeschlossen ist.

Ein Homomorphismus heißt *ε-frei*, falls $h(w) \neq \varepsilon$ für alle $w \neq \varepsilon$ gilt.

(c) NP ist unter ε-freien Homomorphismen abgeschlossen. *(3 ZP.)*

(d) NP ist nicht unter beliebigen Homomorphismen abgeschlossen. *(4 ZP.)*

(e) P ist nicht unter ε-freien Homomorphismen abgeschlossen, falls $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$. *(4 ZP.)*

Hinweis: Betrachten Sie für d) und e) Sprachen der Form

$$\big\{w\#x\#K_x'\#\ldots\#K_l' \,\big|\, K_x, \ldots, K_l \text{ ist eine akz. Rechn. von } M_w(x)\big\}.$$

Dabei sind die $K_i' \in \{a,b\}^*$, d.h. die Konfigurationen K_i werden mit a,b statt 0,1 als Ziffern codiert, während wie üblich $w, x \in \{0,1\}^*$ gilt.