

## Übungsblatt 9

*Besprechung der mündlichen Aufgaben am 18.–21. 12. 2018  
Bearbeitung des Moodle-MC-Tests bis 17. 12. 2018, 23:59 Uhr  
Abgabe der schriftlichen Lösungen am 8. 1. 2019 bis 15:10 Uhr  
im Hörsaal vor der Vorlesung*

**Essentielle Begriffe:** PDA, FS-PDA, DPDA

Abzugeben sind 4 Blätter jeweils mit den Aufgaben: 50; 51; 54; 55

### Aufgabe 50

**8 Punkte**

Betrachten Sie  $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$  aus **Aufgabe 44** mit  
 $P: S \rightarrow aB, bA, A \rightarrow a, aS, bAA, B \rightarrow b, bS, aBB.$

- Konstruieren Sie aus  $G$  einen PDA  $M$  mit dem Verfahren aus der Vorlesung. (6 Punkte)
- Geben Sie eine akzeptierende Rechnung von  $M$  für  $baab$  an. (2 Punkte)

### Aufgabe 51

**5 Punkte**

- Zeigen Sie, dass Kellerautomaten, die über Endzustände akzeptieren (FS-PDAs), genau dieselben Sprachen akzeptieren, wie PDAs (diese akzeptieren durch Leeren des Kellers). (mündlich)

*Bemerkung:* Dies impliziert  $DCFL \subseteq CFL$ .

- Zeigen Sie, deterministische Kellerautomaten, die durch Leeren des Kellers akzeptieren, genau die präfixfreien Sprachen in DCFL charakterisieren. (5 Punkte)

### Aufgabe 52

**mündlich**

Zeigen Sie, dass CFL und DCFL unter Schnitt und Mengendifferenz mit regulären Sprachen abgeschlossen sind. Beschreiben Sie dazu, wie aus einem beliebigen gegebenen FS-PDA  $M_A$  für  $A \in CFL$  und einem DFA  $M_B$  für  $B \in REG$  ein FS-PDA für  $A \cap B$  konstruiert werden kann. Passen Sie danach Ihre Konstruktion für  $A \setminus B$  an.

**Aufgabe 53** Gegeben sei die Sprache  $L = \{a^n b^m \mid n > m \geq 0\}$ .

**mündlich**

- Geben Sie einen PDA  $M$  mit genau zwei Zuständen für  $L$  an.
- Konstruieren Sie nach dem Verfahren aus der Vorlesung aus  $M$  einen äquivalenten PDA  $M'$  mit nur einem Zustand.
- Konstruieren Sie aus  $M'$  eine äquivalente kontextfreie Grammatik. Verwenden Sie das Verfahren aus der Vorlesung.

**Aufgabe 54** Gegeben sei der PDA  $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q, \#)$  **10+2 Punkte**  
 mit  $Z = \{p, q\}$ ,  $\Sigma = \{a, b, c\}$ ,  $\Gamma = \{A, B, \#\}$  und der Überföhrungsfunktion

$$\begin{array}{llll} \delta : qa\# \rightarrow qAA\# & (1) & qaA \rightarrow qAA & (2) & qbA \rightarrow p & (3) & p\epsilon\# \rightarrow p & (4) \\ pbA \rightarrow p & (5) & pb\# \rightarrow pB\# & (6) & pbB \rightarrow pBB & (7) & pcB \rightarrow p & (8) \end{array}$$

- (a) Konstruieren Sie zu  $M$  eine äquivalente kontextfreie Grammatik  $G$  nach den Verfahren aus der Vorlesung. Sie müssen nur  $G$  selbst angeben, nicht den zu  $M$  äquivalenten PDA mit nur einem Zustand. *(8 Punkte)*
- (b) Geben Sie eine akzeptierende Rechnung von  $M(abbbcc)$  und die zugehörige Ableitung in der Grammatik  $G$  an. *(2 Punkte)*
- (c) Geben Sie eine explizite Beschreibung für  $L(M)$  an. *(2 Zusatzpunkte)*

**Aufgabe 55** Betrachten Sie die Sprachen **7+2 Punkte**

$$\begin{aligned} L_1 &= \{a^n b^m c^m \mid n, m \geq 0\}, & L_2 &= \{a^n b^n c^m \mid n, m \geq 0\}, \\ L_3 &= \{a^i b^j c^k \mid i \neq j \text{ und } i, j, k \geq 1\} & \text{und} & L_4 = \{a^i b^j c^k \mid j \neq k \text{ und } i, j, k \geq 1\}. \end{aligned}$$

- (a) Geben Sie DPDAs für  $L_1$  und  $L_3$  an. *(mündlich)*  
*Bemerkung:* Analog zu einem DPDA für  $L_1$  kann man einen für  $L_2$  konstruieren. Der Abschluss von DCFL unter  $\cap$  ist daher nicht in CFL enthalten, da  $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\} \notin \text{CFL}$ .
- (b) Beschreiben Sie, wie sich aus DPDAs für  $L_3$  und  $L_4$  ein DPDA für  $L_3 \cup 0L_4$  konstruieren lässt. *(mündlich)*
- (c) Zeigen Sie mittels der Sprache  $(L_3 \cup 0L_4)^R$ , dass DCFL nicht unter Spiegelung abgeschlossen ist. *(mündlich)*  
*Hinweis:* Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass für jedes  $L \in \text{DCFL}$  über  $\Sigma$  auch die Sprache  $L_{-a} = \{x \in (\Sigma \setminus \{a\})^* \mid xa \in L\}$  in DCFL ist. (Der Beweis dafür ist recht anspruchsvoll, siehe **Extraaufgabe K4**).
- (d) Zeigen Sie, dass DCFL nicht unter Differenz abgeschlossen ist. *(3 Punkte)*  
*Hinweis:* Benutzen Sie, dass DCFL nicht unter Vereinigung abgeschlossen ist.
- (e) Zeigen Sie, dass die Sprachklasse DCFL auch nicht unter Sternhüllenbildung abgeschlossen ist. *(4 Punkte)*  
*Hinweis:* In der Vorlesung wurde gezeigt, dass DCFL nicht unter Produktbildung abgeschlossen ist, da  $\{\epsilon, 0\} \in \text{DCFL}$  und  $L = L_3 \cup 0L_4 \in \text{DCFL}$ , aber  $\{\epsilon, 0\}L \notin \text{DCFL}$ . Zeigen Sie  $L \cup \{0\} \in \text{DCFL}$  und  $(L \cup \{0\})^* \notin \text{DCFL}$ .
- (f) Zeigen Sie, dass DCFL nicht unter Homomorphismen (siehe **Extraaufgabe K1**) abgeschlossen ist. *(2 Zusatzpunkte)*