

Übungsblatt 3

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 6.–9. 11. 2018
Bearbeitung des Moodle-MC-Tests bis 5. 11. 2018, 23:59 Uhr
Abgabe der schriftlichen Lösungen am 13. 11. 2018 bis 15:10 Uhr
im Hörsaal vor der Vorlesung

Essentielle Begriffe: Relation, reflexiv, irreflexiv, symmetrisch, asymmetrisch, antisymmetrisch, transitiv, Äquivalenzrelation und -klassen, Repräsentantensystem, Funktion, injektiv, Ordnung

Abzugeben sind 4 Blätter jeweils mit den Aufgaben: 16; 17; 20; 21

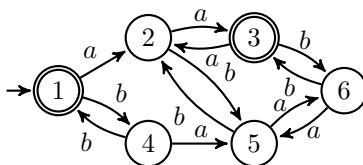
Sollten Sie jeweils mehr als ein Blatt benötigen, heften Sie diese bitte zusammen.

Aufgabe 16 Gegeben sei nebenstehender DFA.

5 Punkte

Geben Sie möglichst einfache reguläre Ausdrücke für die folgenden Sprachen an.

- (a) $L_{1,2}^0, L_{2,1}^6, L_{2,5}^4$, (mündlich)
(b) $L_{2,3}^5$ und $L_{1,3}^5$. (5 Punkte)



Aufgabe 17

mündlich

Beschreiben Sie umgangssprachlich die folgenden Relationen auf der Menge aller Menschen. Dabei bezeichne R_1 die Relation „ist verheiratet mit“, R_2 die Relation „ist Mutter von“ und R_3 die Relation „ist Kind von“.

- (a) $R_1 \circ R_2$,
(b) $R_2 \circ R_1$,
(c) $R_2 \circ R_3$,
(d) $R_3 \circ R_2$,
(e) $R_2 \circ R_1 \circ R_3$.

Aufgabe 18 Sei R eine Relation auf A . Beweisen Sie:

9 Punkte

- (a) $R^2 \subseteq R \Leftrightarrow R$ transitiv $\Leftrightarrow R^i \subseteq R$ für alle $i \geq 1$. (mündlich)
(b) $h_{\text{reff}}(R) = R \cup Id_A, R^+ = \bigcup_{i \geq 1} R^i$. (mündlich)
(c) $R^* = R^+ \cup R^0, R^+ = R \circ R^*$. (mündlich, optional)
(d) R ist symmetrisch $\Rightarrow R^*$ ist symmetrisch. (2 Punkte)
(e) $h_{\text{sym}}(R) = R \cup R^T$. (4 Punkte)
(f) $h_{\text{äq}}(R) = (R \cup R^T)^*$. (3 Punkte)

Aufgabe 19 Sei $R = \{(\diamond, 2), (\heartsuit, 3), (\spadesuit, 4)\} \subseteq A \times B$ und $\|A \times B\| = 6$. **mündlich**

- (a) Geben Sie $B \times A$ an und begründen Sie Ihre Antwort.
- (b) Welche der Relationen R , R^T , $(A \times B) \setminus R$ und $R \setminus \{(\diamond, 4)\}$ sind Funktionen? Welche der Funktionen sind zusätzlich injektiv?
- (c) Welche Eigenschaften (reflexiv, irreflexiv, symmetrisch, asymmetrisch, antisymmetrisch, transitiv) hat R als Relation auf $A \cup B$?
- (d) Wie viele Elemente muss man zu R hinzufügen, um eine lineare Striktordnung auf $A \cup B$ zu erhalten?

Aufgabe 20 Sei $V = \{1, \dots, 5\}$ und R folgende Relation auf V **8 Punkte**

$$R = \{(1, 1), (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (5, 4)\}$$

- (a) Welche Eigenschaften (reflexiv, irreflexiv, symmetrisch, asymmetrisch, antisymmetrisch, transitiv) hat diese Relation? *(3 Punkte)*
- (b) Veranschaulichen Sie die Relationen R , R^T , R^3 , R^+ , $h_{\text{äq}}(R)$ jeweils durch einen Digraphen. *(3 Punkte)*

Geben Sie jeweils eine kleinstmögliche Relation auf V an, die

- (c) reflexiv und symmetrisch, aber nicht transitiv *(1 Punkt)*
- (d) symmetrisch und transitiv, aber nicht reflexiv *(1 Punkt)*

ist und beweisen Sie, dass Ihre Relationen kleinstmöglich sind.

Aufgabe 21 Auf $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ seien folgende Relationen definiert: **8+4 Punkte**

- (a) $xRy : \Leftrightarrow x + 2y$ ist durch 3 teilbar, *(mündlich)*
- (b) $xSy : \Leftrightarrow |x - y| \leq 7$, *(mündlich)*
- (c) $xTy : \Leftrightarrow x \cdot y$ ist gerade, *(4 Punkte)*
- (d) $xUy : \Leftrightarrow x + y$ ist gerade, *(4 Punkte)*
- (e) $xYy : \Leftrightarrow x \cdot y$ ist eine Quadratzahl. *(4 Zusatzpunkte)*

Welche dieser Relationen sind Äquivalenzrelationen? Begründen Sie. Geben Sie gegebenenfalls die Äquivalenzklassen und ein Repräsentantensystem an.