Einführung in die Theoretische Informatik

Johannes Köbler

Institut für Informatik
Humboldt-Universität zu Berlin

WS 2017/18

Entscheidbare und semi-entscheidbare Sprachen

Definition

- Eine NTM M hält bei Eingabe x (kurz: $M(x) = \downarrow$ oder $M(x)\downarrow$), falls alle Rechnungen von $M(x)$ eine endliche Länge haben.
- Falls $M(x)$ nicht hält, schreiben wir auch kurz $M(x) = \uparrow$ oder $M(x)\uparrow$.
- Eine DTM M entscheidet eine Eingabe x, falls $M(x)$ hält oder eine Konfiguration mit einem Endzustand erreicht.
- Eine Sprache heißt entscheidbar, falls sie von einer DTM M erkannt wird, die alle Eingaben entscheidet. Die zugehörige Sprachklasse ist

$$\mathsf{REC} = \{L(M) \mid M \text{ ist eine DTM, die alle Eingaben entscheidet}\}$$

- Jede von einer DTM akzeptierte Sprache heißt semi-entscheidbar.

Bemerkung

- Eine DTM M entscheidet zwar immer alle Eingaben $x \in L(M)$, aber eventuell nicht alle $x \in \overline{L(M)}$. Daher heißt $L(M)$ semi-entscheidbar.
- Später werden wir sehen, dass $\mathsf{RE} = \{L(M) \mid M \text{ ist eine DTM}\}$ ist.

Berechnung von Funktionen

Definition

- Eine k-DTM $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ berechnet eine Funktion $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$, falls M bei jeder Eingabe $x \in \Sigma^*$ in einer Konfiguration

$$K = (q, u_1, a_1, v_1, \ldots, u_k, a_k, v_k) \text{ mit } u_k = f(x)$$

  hält (d.h. $K_x \vdash^* K$ und K hat keine Folgekonfiguration).
- Hierfür sagen wir auch, M gibt bei Eingabe x das Wort $f(x)$ aus und schreiben $M(x) = f(x)$.
- f heißt Turing-berechenbar (oder einfach berechenbar), falls es eine k-DTM M mit $M(x) = f(x)$ für alle $x \in \Sigma^*$ gibt.
- Aus historischen Gründen werden berechenbare Funktionen auch rekursiv (engl. *recursive*) genannt.

Berechenbarkeit von charakteristischen Funktionen

Definition

Für eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ ist die charakteristische Funktion $\chi_A : \Sigma^* \to \{0, 1\}$ wie folgt definiert:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Bemerkung

- In den Übungen wird gezeigt, dass eine Sprache A genau dann entscheidbar ist, wenn χ_A berechenbar (also rekursiv) ist.
- Dass CSL echt in REC enthalten ist, wird ebenfalls in den Übungen gezeigt.
- Beispiele für interessante semi-entscheidbare Sprachen, die nicht entscheidbar sind, werden wir noch kennenlernen.
- Somit gilt $\mathrm{REG} \subsetneq \mathrm{DCFL} \subsetneq \mathrm{CFL} \subsetneq \mathrm{DCSL} \subseteq \mathrm{CSL} \subsetneq \mathrm{REC} \subsetneq \mathrm{RE}$.

Berechenbarkeit von partiellen Funktionen

Definition

- Eine partielle Funktion hat die Form $f : \Sigma^* \to \Gamma^* \cup \{\uparrow\}$.
- Für $f(x) = \uparrow$ sagen wir auch $f(x)$ ist undefiniert.
- Der Definitionsbereich (engl. *domain*) von f ist

  $$dom(f) = \{x \in \Sigma^* \mid f(x) \neq \uparrow\}.$$

- Das Bild (engl. *image*) von f ist

  $$img(f) = \{f(x) \mid x \in dom(f)\}.$$

- f heißt total, falls $dom(f) = \Sigma^*$ ist.
- Eine partielle Funktion f heißt berechenbar, falls es eine k-DTM M mit $M(x) = f(x)$ für alle $x \in \Sigma^*$ gibt (d.h. $M(x)$ gibt für alle $x \in dom(f)$ das Wort $f(x)$ aus und hält im Fall $x \notin dom(f)$ nicht).

Falls M die partielle Fkt. f berechnet, gilt also $\{x \in \Sigma^* \mid M(x)\downarrow\} = dom(f)$. Daher bezeichnen wir diese Menge auch mit $dom(M)$.

Berechenbarkeit von Funktionen

Wir fassen die (partiellen) berechenbaren Funktionen in folgenden Klassen zusammen:

$$\mathrm{FREC} = \{f \mid f \text{ ist eine berechenbare (totale) Funktion}\},$$

$$\mathrm{FREC}_p = \{f \mid f \text{ ist eine berechenbare partielle Funktion}\}.$$

Dann gilt $\mathrm{FREC} \subsetneq \mathrm{FREC}_p$.

Berechenbarkeit von Funktionen

Beispiel

- Bezeichne x^+ den lexikografischen Nachfolger von $x \in \Sigma^*$.
- Für $\Sigma = \{0,1\}$ ergeben sich beispielsweise folgende Werte:

x	ε	0	1	00	01	10	11	000	$\cdots$
x^+	0	1	00	01	10	11	000	001	$\cdots$

- Betrachte die auf Σ^* definierten partiellen Funktionen f_1, f_2, f_3, f_4 mit

$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = x, \quad f_3(x) = x^+ \qquad \text{und} \qquad f_4(x) = \begin{cases} \uparrow, & x = \varepsilon, \\ y, & x = y^+. \end{cases}$$

- Da f_1, f_2, f_3, f_4 berechenbar sind, gehören die totalen Funktionen f_1, f_2, f_3 zu FREC und die partielle Funktion f_4 zu FREC_p.
- Da f_4 keine totale Funktion ist, gehört f_4 nicht zu FREC. ◁

Partielle charakteristische Funktionen

Definition

Sei $A \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache.

- Die partielle charakteristische Funktion $\hat{\chi}_A$ von A ist

$$\hat{\chi}_A(x) \quad = \begin{cases} 1, & x \in A \\ \uparrow, & x \notin A \end{cases}$$

- A heißt rekursiv aufzählbar, falls $A = \varnothing$ oder das Bild $img(f)$ einer berechenbaren Funktion $f : \Gamma^* \to \Sigma^*$ ist.

Charakterisierung der rekursiv aufzählbaren Sprachen

Satz

Folgende Eigenschaften sind für eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ äquivalent:

1. A ist semi-entscheidbar (d.h. A wird von einer DTM akzeptiert),
2. A wird von einer 1-DTM akzeptiert,
3. A ist vom Typ 0,
4. A wird von einer NTM akzeptiert,
5. A ist rek. aufzählbar (d.h. $A = \varnothing$ oder $A = img(f)$ für eine Fkt. $f \in \text{FREC}$),
6. $\hat{\chi}_A$ ist berechenbar (d.h. $\hat{\chi}_A \in \text{FREC}_p$),
7. es gibt eine DTM M mit $A = dom(M)$.

Beweis

Die Implikationen 2 $\Rightarrow$ 3 $\Rightarrow$ 4 werden in den Übungen gezeigt.
Hier zeigen wir 1 $\Rightarrow$ 2 und 4 $\Rightarrow$ 5 $\Rightarrow$ 6 $\Rightarrow$ 7 $\Rightarrow$ 1.

Simulation einer k-DTM durch eine 1-DTM

Beweis von ❶ ⇒ ❷: $\{L(M) \mid M \text{ ist eine DTM}\} \subseteq \{L(M) \mid M \text{ ist eine 1-DTM}\}$

- Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ eine k-DTM mit $L(M) = A$.
- Wir konstruieren eine 1-DTM $M' = (Z', \Sigma, \Gamma', \delta', z_0, E)$ für A.
- M' simuliert M, indem sie jede Konfiguration K von M der Form

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
\hline
\cdots & a & b & c & d & \cdots \\
\hline
 & & & \uparrow & & \\
 & & \vdots & & & \\
\hline
\cdots & e & f & g & h & \cdots \\
\hline
 & \uparrow & & & & \\
\end{array}
$$

durch eine Konfiguration K' folgender Form nachbildet:

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
\hline
\cdots & \begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ \hat{e} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ f \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \hat{c} \\ \vdots \\ g \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} d \\ \vdots \\ h \end{pmatrix} & \cdots \\
\hline
\end{array}
$$

Simulation einer k-DTM durch eine 1-DTM

Beweis von ❶ ⇒ ❷: $\{L(M) \mid M \text{ ist eine DTM}\} \subseteq \{L(M) \mid M \text{ ist eine 1-DTM}\}$

- Das heißt, M' arbeitet mit dem Alphabet

$$\Gamma' = \Gamma \cup (\Gamma \cup \{\hat{a} \mid a \in \Gamma\})^k$$

- und erzeugt bei Eingabe $x = x_1 \dots x_n \in \Sigma^*$ zuerst die der Startkonfiguration

$$K_x = (q_0, \varepsilon, x_1, x_2 \dots x_n, \varepsilon, \sqcup, \varepsilon, \dots, \varepsilon, \sqcup, \varepsilon)$$

  von M bei Eingabe x entsprechende Konfiguration

$$K'_x = q'_0 \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{\sqcup} \\ \vdots \\ \hat{\sqcup} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ \sqcup \\ \vdots \\ \sqcup \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} x_n \\ \sqcup \\ \vdots \\ \sqcup \end{pmatrix}.$$

Simulation einer k-DTM durch eine 1-DTM

Beweis von ❶ $\Rightarrow$ ❷: $\{L(M) | M \text{ ist eine DTM}\} \subseteq \{L(M) | M \text{ ist eine 1-DTM}\}$

- Dann simuliert M' jeweils einen Schritt von M durch folgende Sequenz von Rechenschritten:
  - Zuerst geht M' solange nach rechts, bis sie alle mit ˆ markierten Zeichen (z.B. $\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_k$) gefunden hat.
  - Diese Zeichen speichert M' in ihrem Zustand.
  - Anschließend geht M' wieder nach links und realisiert dabei die durch $\delta(q, a_1, \ldots, a_k)$ vorgegebene Anweisung von M.
  - Dabei speichert M' den aktuellen Zustand q von M ebenfalls in ihrem Zustand.
- Sobald M in einen Endzustand übergeht, wechselt M' ebenfalls in einen Endzustand und hält.
- Somit gilt $L(M') = L(M)$. □

Charakterisierung der rekursiv aufzählbaren Sprachen

Beweis von ❹ ⇒ ❺: $\{L(M) \mid M \text{ ist eine NTM}\} \subseteq \{A \mid A \text{ ist rek. aufzählbar}\}$

- Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ eine k-NTM und sei $A = L(M) \neq \varnothing$.
- Sei $\tilde{\Gamma}$ das Alphabet $Z \cup \Gamma \cup \{\#\}$.
- Wir kodieren eine Konfiguration $K = (q, u_1, a_1, v_1, \ldots, u_k, a_k, v_k)$ durch das Wort

  $$code(K) = \#q\#u_1\#a_1\#v_1\#\ldots\#u_k\#a_k\#v_k\#$$

  und eine Rechnung $K_0 \vdash \cdots \vdash K_t$ durch $code(K_0)\ldots code(K_t)$.
- Dann lassen sich die Wörter von A durch folgende Funktion $f : \tilde{\Gamma}^* \to \Sigma^*$ aufzählen (dabei ist x_0 ein beliebiges Wort in A):

  $$f(w) = \begin{cases} x, & w \text{ kodiert eine akz. Rechnung } K_0 \vdash \cdots \vdash K_t \text{ von } \\ & M(x), \text{ d.h. } K_0 = K_x \text{ und } K_t \in E \times (\Gamma^* \times \Gamma \times \Gamma^*)^k \\ x_0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Da f berechenbar ist, ist $A = img(f)$ rekursiv aufzählbar. □

Charakterisierung der rekursiv aufzählbaren Sprachen

Beweis von 5 ⇒ 6: $\{A \mid A \text{ ist rek. aufzählbar}\} \subseteq \{A \mid \hat{\chi}_A \in \mathrm{FREC}_p\}$

- Sei M eine DTM, die eine Fkt. $f : \Gamma^* \to \Sigma^*$ mit $A = img(f)$ berechnet.
- Dann wird $\hat{\chi}_A$ von der DTM M' berechnet, die bei Eingabe x
  - der Reihe nach für alle $w \in \Gamma^*$ das Wort $f(w)$ berechnet und
  - den Wert 1 ausgibt, sobald $f(w) = x$ ist. □

Beweis von 6 ⇒ 7: $\{A \mid \hat{\chi}_A \in \mathrm{FREC}_p\} \subseteq \{dom(M) \mid M \text{ ist eine DTM}\}$

- Sei M eine DTM, die $\hat{\chi}_A$ berechnet.
- Da $dom(\hat{\chi}_A) = A$ ist, folgt $A = dom(M)$. □

Beweis von 7 ⇒ 1: $\{dom(M) \mid M \text{ ist eine DTM}\} \subseteq \{L(M) \mid M \text{ ist eine DTM}\}$

- Sei $A = dom(M)$ für eine DTM M.
- Dann gilt $A = L(M')$ für die DTM M', die M simuliert und nur dann in einen Endzustand übergeht, wenn M hält. □

Charakterisierung der entscheidbaren Sprachen

Satz

Folgende Eigenschaften sind äquivalent:

1. A ist entscheidbar (d.h. A wird von einer DTM akzeptiert, die alle Eingaben entscheidet),
2. die charakteristische Funktion χ_A von A ist berechenbar,
3. A wird von einer 1-DTM akzeptiert, die bei allen Eingaben hält,
4. A wird von einer NTM akzeptiert, die bei allen Eingaben hält,
5. A und $\bar{A}$ sind semi-entscheidbar.

Beweis

Die Äquivalenz der Bedingungen 1 bis 4 wird in den Übungen gezeigt. Hier zeigen wir nur die Äquivalenz dieser vier Bedingungen zu 5.

Charakterisierung der entscheidbaren Sprachen

Beweis von ❶ ⇒ ❺: REC ⊆ RE ∩ co-RE

- Falls A entscheidbar ist, ist mit χ_A auch $\chi_{\bar{A}}$ berechenbar, d.h. A und $\bar{A}$ sind entscheidbar und damit auch semi-entscheidbar.

Beweis von ❺ ⇒ ❶: RE ∩ co-RE ⊆ REC

- Seien M_A und $M_{\bar{A}}$ DTMs, die die partiellen charakteristischen Funktionen $\hat{\chi}_A$ und $\hat{\chi}_{\bar{A}}$ berechnen.
- Betrachte folgende DTM M, die bei Eingabe x für $t = 0, 1, 2, \ldots$ die beiden DTMs M_A und $M_{\bar{A}}$ bei Eingabe x für t Schritte simuliert und
  - in einem Endzustand hält, falls $M_A(x)$ nach t Schritten hält,
  - in einem Nichtendzustand hält, falls $M_{\bar{A}}(x)$ nach t Schritten hält.
- Da jede Eingabe x entweder in $dom(\hat{\chi}_A) = A$ oder in $dom(\hat{\chi}_{\bar{A}}) = \bar{A}$ enthalten ist, hält M bei allen Eingaben.
- Da zudem $L(M) = A$ ist, folgt $A \in$ REC. □

Kodierung (Gödelisierung) von Turingmaschinen

- Um Eigenschaften von TMs algorithmisch untersuchen zu können, müssen wir TMs als Teil der Eingabe kodieren.
- Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ eine 1-DTM mit
  - Zustandsmenge $Z = \{q_0, \ldots, q_m\}$ (o.B.d.A. sei $E = \{q_m\}$),
  - Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ und
  - Arbeitsalphabet $\Gamma = \{a_0, \ldots, a_l\}$, wobei wir o.B.d.A. $a_0 = \sqcup$, $a_1 = 0$ und $a_2 = 1$ annehmen.
- Dann können wir eine Anweisung $q_i a_j \to q_{i'} a_{j'} D$ durch das Wort

  $$\#bin(i)\#bin(j)\#bin(i')\#bin(j')\#b_D\#$$

  kodieren. Dabei ist $bin(n)$ die Binärdarstellung von n und

  $$b_D = \begin{cases} 0, & D = N \\ 1 & D = L \\ 10, & D = R \end{cases}$$

Kodierung von Turingmaschinen

- M lässt sich nun als ein Wort über dem Alphabet $\{0, 1, \#\}$ kodieren, indem wir die Anweisungen von M in kodierter Form auflisten.
- Kodieren wir die Zeichen $0, 1, \#$ binär (z.B. $0 \mapsto 00$, $1 \mapsto 01$, $\# \mapsto 10$), so gelangen wir zu einer Binärkodierung w_M von M.
- Die durch die Binärzahl $w_M = b_n \dots b_0$ repräsentierte natürliche Zahl $(w_M)_2 = \sum_{i=0}^{n} b_i 2^i$ wird auch die Gödel-Nummer von M genannt.
- M_w ist durch Angabe von w_M bzw. $(w_M)_2$ bis auf die Benennung ihrer Zustände und der Arbeitszeichen in $\Gamma \setminus \{\sqcup, 0, 1\}$ eindeutig bestimmt.
- Ganz analog lassen sich auch k-DTMs mit $k > 1$ (sowie NTMs, Konfigurationen oder Rechnungen von TMs) binär kodieren.
- Umgekehrt können wir jedem Binärstring $w \in \{0, 1\}^*$ eine DTM M_w wie folgt zuordnen (dabei ist M_0 eine beliebige, aber fest gewählte DTM):

$$M_w = \begin{cases} M, & \text{falls eine DTM } M \text{ mit } w_M = w \text{ existiert} \\ M_0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Unentscheidbarkeit des Halteproblems

Definition

- Das Halteproblem ist die Sprache

$$H = \left\{ w\#x \;\middle|\; \begin{array}{l} w, x \in \{0,1\}^* \text{ und} \\ \text{die DTM } M_w \text{ hält} \\ \text{bei Eingabe } x \end{array} \right\}$$

- Das spezielle Halteproblem ist

$$K = \left\{ w \in \{0,1\}^* \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{die DTM } M_w \\ \text{hält bei Eingabe } w \end{array} \right\}$$

χ_H	w_1	w_2	w_3	$\cdots$
w_1	0	1	0	$\cdots$
w_2	0	1	1	$\cdots$
w_3	1	1	0	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

χ_K				
w_1	0			
w_2		1		
w_3			0	
$\vdots$				$\ddots$

Satz

$K \in \mathrm{RE} \setminus \text{co-RE}$.

Semi-Entscheidbarkeit des speziellen Halteproblems

Beweis von $K \in \mathrm{RE}$

- Sei w_h die Kodierung einer DTM, die bei jeder Eingabe (sofort) hält und betrachte die Funktion $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ mit

$$f(x) = \begin{cases} w, & x \text{ ist die Binärkodierung einer haltenden Rechnung einer DTM } M_w \text{ bei Eingabe } w, \\ w_h, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Da f berechenbar und $img(f) = K$ ist, folgt $K \in \mathrm{RE}$. □

Bemerkung

Ganz ähnlich lässt sich $H \in \mathrm{RE}$ zeigen.

Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems

Beweisidee

- Sei $B = (b_{ij})$ die durch $b_{ij} = \chi_H(w_i\#w_j) \in \{0,1\}^*$ definierte Binärmatrix.
- Dann kann keine Zeile $b_{i1}b_{i2}\ldots$ von B mit der invertierten Diagonalen $\bar{b}_{11}\bar{b}_{22}\ldots$ von B übereinstimmen, da sonst $b_{ii} = \bar{b}_{ii}$ sein müsste.
- Da aber die i-te Zeile von B wegen

  $$b_{ij} = \chi_H(w_i\#w_j) = \chi_{dom(M_{w_i})}(w_j)$$

  die Sprache $dom(M_{w_i}) = \{w_j \in \{0,1\}^* \mid M_{w_i}(w_j)\downarrow\} \in \mathsf{RE}$ kodiert und
- die invertierte Diagonale wegen

  $$\bar{b}_{ii} = \chi_{\bar{H}(w_i\#w_i)} = \chi_{\bar{K}}(w_i)$$

  die Sprache $\bar{K}$ kodiert, folgt $\bar{K} \neq dom(M_{w_i})$ für alle $i \geq 1$.
- Dies impliziert $\bar{K} \notin \mathsf{RE}$, da die Zeilen von B wegen

  $$\{dom(M_{w_i}) \mid i \geq 1\} = \{A \subseteq \{0,1\}^* \mid A \in \mathsf{RE}\}$$

  alle semi-entscheidbaren Binärsprachen kodieren.

Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems

Beweis von $\bar{K} \notin \mathrm{RE}$

- Angenommen, die Sprache

  $$\bar{K} = \{w \mid M_w(w)\uparrow\} \qquad (*)$$

  wäre semi-entscheidbar.

- Dann existiert eine DTM M_{w_i} mit

  $$dom(M_{w_i}) = \bar{K} \qquad (**)$$

- Dies führt jedoch auf einen Widerspruch:

χ_H	w_1	w_2	w_3	$\cdots$
w_1	**0**	1	0	$\ldots$
w_2	0	**1**	1	$\ldots$
w_3	1	1	**0**	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

w_i	**1**	**0**	**1**	$\cdots$

$$w_i \in \bar{K} \underset{(*)}{\Leftrightarrow} M_{w_i}(w_i)\uparrow \Leftrightarrow w_i \notin dom(M_{w_i}) \underset{(**)}{\Leftrightarrow} w_i \notin \bar{K} \quad ↯$$

$\square$

Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems

Korollar

REC $\subsetneq$ RE.

Beweis

Klar, da $K \in \mathrm{RE} - \mathrm{REC}$. $\square$

Definition

Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt auf $B \subseteq \Gamma^*$ reduzierbar (kurz: $A \le B$), falls eine berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$ ex., so dass gilt:

$$\forall x \in \Sigma^* : x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

Beispiel

- Es gilt $K \le H$ mittels $f : w \mapsto w\#w$, da für alle $w \in \{0,1\}^*$ gilt:

  $$w \in K \quad \Leftrightarrow \quad M_w(w)\downarrow \quad \Leftrightarrow \quad w\#w \in H$$

- Es gilt sogar $A \le H$ für jede Binärsprache $A \in \mathrm{RE}$ mittels $f : x \mapsto w\#x$, wobei w die Kodierung einer DTM M_w mit $dom(M_w) = A$ ist:

  $$x \in A \quad \Leftrightarrow \quad M_w(x)\downarrow \quad \Leftrightarrow \quad w\#x \in H$$

$\triangleleft$

Der Vollständigkeitsbegriff

Definition

- Eine Sprache B heißt hart für eine Sprachklasse $\mathcal{C}$ (kurz: $\mathcal{C}$-hart oder $\mathcal{C}$-schwer), falls jede Sprache $A \in \mathcal{C}$ auf B reduzierbar ist:

$$\forall A \in \mathcal{C} : A \leq B.$$

- Eine $\mathcal{C}$-harte Sprache B, die zu $\mathcal{C}$ gehört, heißt $\mathcal{C}$-vollständig.

Beispiel

Das Halteproblem H ist RE-vollständig. Es gilt nämlich

- $H \in \mathrm{RE}$ und
- $\forall A \in \mathrm{RE} : A \leq H$

mittels der Reduktionsfunktion $x \mapsto w\#bin(x)$, wobei M_w eine DTM mit $dom(M_w) = \{bin(x) \mid x \in A\}$ ist. ◁

Bemerkung

Auch das spezielle Halteproblem K ist RE-vollständig (siehe Übungen).

Abschluss von REC unter $\le$

Definition

Eine Sprachklasse $\mathcal{C}$ heißt unter $\le$ abgeschlossen, wenn für beliebige Sprachen A, B gilt:

$$A \le B \wedge B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \in \mathcal{C}.$$

Satz

Die Klassen REC und RE sind unter $\le$ abgeschlossen.

Beweis

- Gelte $A \le B$ mittels f und sei $B \in \mathrm{REC}$.
- Wegen $B \in \mathrm{REC}$ ex. eine DTM M, die χ_B berechnet.
- Betrachte folgende DTM M':
  - M' berechnet bei Eingabe x zuerst den Wert $f(x)$ und
  - simuliert dann M bei Eingabe $f(x)$.

Abschluss von REC und RE unter $\leq$

Satz

Die Klasse REC ist unter $\leq$ abgeschlossen.

Beweis.

- Gelte $A \leq B$ mittels f und sei $B \in$ REC.
- Dann ex. eine DTM M, die χ_B berechnet.
- Betrachte folgende DTM M':
  - M' berechnet bei Eingabe x zuerst den Wert $f(x)$ und
  - simuliert dann M bei Eingabe $f(x)$.
- Wegen $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$ ist $\chi_A(x) = \chi_B(f(x))$ und daher folgt

$$M'(x) = M(f(x)) = \chi_B(f(x)) = \chi_A(x).$$

- Also berechnet M' die Funktion χ_A, d.h. $A \in$ REC. $\square$

Bemerkung

Der Abschluss von RE unter $\leq$ folgt analog (siehe Übungen).

H ist nicht entscheidbar

Korollar

- $A \leq B \wedge A \notin \mathrm{REC} \Rightarrow B \notin \mathrm{REC}$,
- $A \leq B \wedge A \notin \mathrm{RE} \Rightarrow B \notin \mathrm{RE}$.

Beweis

Aus der Annahme, dass B entscheidbar (bzw. semi-entscheidbar) ist, folgt wegen $A \leq B$, dass dies auch auf A zutrifft (Widerspruch). $\square$

Bemerkung

Wegen $K \leq H$ überträgt sich somit die Unentscheidbarkeit von K auf H.

Korollar

$H \notin \mathrm{REC}$.

Das Halteproblem bei leerem Band

Definition

Das Halteproblem bei leerem Band ist die Sprache

$$H_0 = \left\{ w \in \{0,1\}^* \;\middle|\; \begin{array}{l}\text{die DTM } M_w \\ \text{hält bei Eingabe } \varepsilon\end{array} \right\}$$

Satz

H_0 ist RE-vollständig.

Beweis

- $H_0 \in \mathrm{RE}$ folgt wegen $H_0 \leq H \in \mathrm{RE}$ mittels der Reduktionsfunktion $w \mapsto w\#\varepsilon$.

χ_H	w_1	w_2	w_3	$\cdots$
w_1	0	1	0	$\cdots$
w_2	0	1	1	$\cdots$
w_3	1	1	0	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

χ_{H_0}	w_1 $(=\varepsilon)$
w_1	0
w_2	0
w_3	1
$\vdots$	$\vdots$

H_0 ist RE-vollständig

Beweis

- $H_0 \in \text{RE}$ folgt wegen $H_0 \leq H \in \text{RE}$ mittels der Reduktionsfunktion $w \mapsto w\#\varepsilon$.
- Sei $A \in \text{RE}$ und sei M eine DTM mit $dom(M) = A$.
- Um A auf H_0 zu reduzieren, transformieren wir x in die Kodierung w_x einer DTM M_{w_x}, die zunächst ihre Eingabe durch x ersetzt und dann $M(x)$ simuliert.
- Dann gilt

$$x \in A \iff w_x \in H_0$$

und somit $A \leq H_0$ mittels der Reduktionsfunktion $x \mapsto w_x$.

Korollar

$H_0 \notin \text{REC}$.