

Einführung in die Theoretische Informatik

Johannes Köbler



Institut für Informatik
Humboldt-Universität zu Berlin

WS 2017/18

Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \text{CFL}$

Beispiel

- Betrachte den PDA $M = (\{p, q\}, \{a, b\}, \{A, \#\}, \delta, p, \#)$ mit den Anweisungen

$$\begin{array}{lll} \delta : p\varepsilon\# \rightarrow q & (1) & pa\# \rightarrow pA & (2) & paA \rightarrow pAA & (3) \\ & & pbA \rightarrow q & (4) & qbA \rightarrow q & (5) \end{array}$$

- Der zugehörige PDA $M' = (\{z\}, \{a, b\}, \Gamma', \delta', z, S)$ mit nur einem Zustand hat dann das Kellularalphabet

$$\Gamma' = \{S, X_{p\#p}, X_{p\#q}, X_{q\#p}, X_{q\#q}, X_{pAp}, X_{pAq}, X_{qAp}, X_{qAq}\}$$

Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \text{CFL}$

Beispiel (Fortsetzung)

- Zudem enthält M' neben den beiden Anweisungen $z\epsilon S \rightarrow zX_{p\#p}$ (0) und $z\epsilon S \rightarrow zX_{p\#q}$ (0') die folgenden Anweisungen:

Anweisung von M	k	p_2, \dots, p_{k+1}	Anweisungen von M'
$p\epsilon\# \rightarrow q$	(1)	0	$z\epsilon X_{p\#q} \rightarrow z$ (1')
$pa\# \rightarrow pA$	(2)	1	$zaX_{p\#p} \rightarrow zX_{pAp}$ (2')
		q	$zaX_{p\#q} \rightarrow zX_{pAq}$ (2'')
$paA \rightarrow pAA$	(3)	2	$zaX_{pAp} \rightarrow zX_{pAp}X_{pAp}$ (3')
		p, q	$zaX_{pAq} \rightarrow zX_{pAp}X_{pAq}$ (3'')
		q, p	$zaX_{pAp} \rightarrow zX_{pAq}X_{qAp}$ (3''')
		q, q	$zaX_{pAq} \rightarrow zX_{pAq}X_{qAq}$ (3'''')
$pbA \rightarrow q$	(4)	0	$zbX_{pAq} \rightarrow z$ (4')
$qbA \rightarrow q$	(5)	0	$zbX_{qAq} \rightarrow z$ (5')

Beispiel (Schluss)

- Der (akzeptierenden) Rechnung

Beispiel (Schluss)

- Der (akzeptierenden) Rechnung
 $(p, aabb, \#)$

#

p

Beispiel (Schluss)

- Der (akzeptierenden) Rechnung

$$(p, aabb, \#) \stackrel{(2)}{\vdash} (p, abb, A)$$

#	A
---	---

$p \quad a \quad p$

Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \text{CFL}$

Beispiel (Schluss)

- Der (akzeptierenden) Rechnung

$$(p, aabb, \#) \stackrel{(2)}{\vdash} (p, abb, A) \stackrel{(3)}{\vdash} (p, bb, AA)$$

		A
#	A	A
p	a	p
	a	p

Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \text{CFL}$

Beispiel (Schluss)

- Der (akzeptierenden) Rechnung

$$(p, aabb, \#) \stackrel{(2)}{\vdash} (p, abb, A) \stackrel{(3)}{\vdash} (p, bb, AA) \stackrel{(4)}{\vdash} (q, b, A)$$

		A			
#	A	A	A		
<i>p</i>	<i>a</i>	<i>p</i>	<i>a</i>	<i>p</i>	<i>b</i>
				<i>q</i>	

Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \text{CFL}$

Beispiel (Schluss)

- Der (akzeptierenden) Rechnung

$$(p, aabb, \#) \xrightarrow{(2)} (p, abb, A) \xrightarrow{(3)} (p, bb, AA) \xrightarrow{(4)} (q, b, A) \xrightarrow{(5)} (q, \varepsilon, \varepsilon)$$

				A				
#	A	A	A					
<i>p</i>	<i>a</i>	<i>p</i>	<i>a</i>	<i>p</i>	<i>b</i>	<i>q</i>	<i>b</i>	<i>q</i>

Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \text{CFL}$

Beispiel (Schluss)

- Der (akzeptierenden) Rechnung

$$(p, aabb, \#) \stackrel{(2)}{\vdash} (p, abb, A) \stackrel{(3)}{\vdash} (p, bb, AA) \stackrel{(4)}{\vdash} (q, b, A) \stackrel{(5)}{\vdash} (q, \varepsilon, \varepsilon)$$

		A			
#	A	A	A		
<i>p</i>	<i>a</i>	<i>p</i>	<i>a</i>	<i>p</i>	<i>b</i>
		<i>q</i>	<i>b</i>	<i>q</i>	

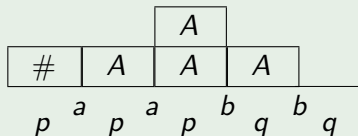
von M entspricht dann folgende Rechnung von M' :

Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \text{CFL}$

Beispiel (Schluss)

- Der (akzeptierenden) Rechnung

$$(p, aabb, \#) \underset{(2)}{\vdash} (p, abb, A) \underset{(3)}{\vdash} (p, bb, AA) \underset{(4)}{\vdash} (q, b, A) \underset{(5)}{\vdash} (q, \varepsilon, \varepsilon)$$



von M entspricht dann folgende Rechnung von M' :

$$(z, aabb, S)$$

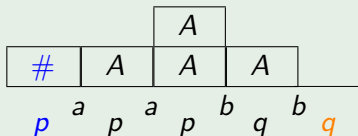
S

Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \text{CFL}$

Beispiel (Schluss)

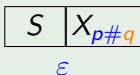
- Der (akzeptierenden) Rechnung

$$(p, aabb, \#) \stackrel{(2)}{\vdash} (p, abb, A) \stackrel{(3)}{\vdash} (p, bb, AA) \stackrel{(4)}{\vdash} (q, b, A) \stackrel{(5)}{\vdash} (q, \varepsilon, \varepsilon)$$



von M entspricht dann folgende Rechnung von M' :

$$(z, aabb, S) \stackrel{(0')}{\vdash} (z, aabb, X_{p\#q})$$

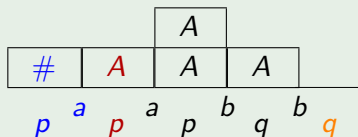


Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \text{CFL}$

Beispiel (Schluss)

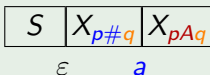
- Der (akzeptierenden) Rechnung

$$(p, aabb, \#) \stackrel{(2)}{\vdash} (p, abb, A) \stackrel{(3)}{\vdash} (p, bb, AA) \stackrel{(4)}{\vdash} (q, b, A) \stackrel{(5)}{\vdash} (q, \varepsilon, \varepsilon)$$



von M entspricht dann folgende Rechnung von M' :

$$(z, aabb, S) \stackrel{(0')}{\vdash} (z, aabb, X_{p\#q}) \stackrel{(2'')}{\vdash} (z, abb, X_{pAq})$$

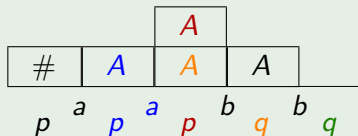


Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \text{CFL}$

Beispiel (Schluss)

- Der (akzeptierenden) Rechnung

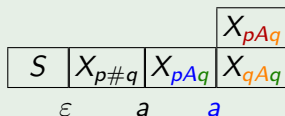
$$(p, aabb, \#) \xrightarrow{(2)} (p, abb, A) \xrightarrow{(3)} (p, bb, AA) \xrightarrow{(4)} (q, b, A) \xrightarrow{(5)} (q, \varepsilon, \varepsilon)$$



von M entspricht dann folgende Rechnung von M' :

$$(z, aabb, S) \xrightarrow{(0')} (z, aabb, X_{p\#q}) \xrightarrow{(2'')} (z, abb, X_{pAq})$$

$$\xrightarrow{(3''''')} (z, bb, X_{pAq}X_{qAq})$$

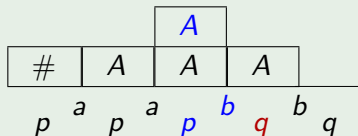


Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \text{CFL}$

Beispiel (Schluss)

- Der (akzeptierenden) Rechnung

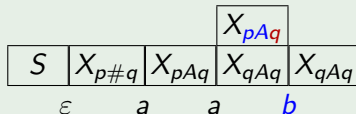
$$(p, aabb, \#) \xrightarrow{(2)} (p, abb, A) \xrightarrow{(3)} (p, bb, AA) \xrightarrow{(4)} (q, b, A) \xrightarrow{(5)} (q, \varepsilon, \varepsilon)$$



von M entspricht dann folgende Rechnung von M' :

$$(z, aabb, S) \xrightarrow{(0')} (z, aabb, X_{p\#q}) \xrightarrow{(2'')} (z, abb, X_{pAq})$$

$$\xrightarrow{(3''')} (z, bb, X_{pAq}X_{qAq}) \xrightarrow{(4')} (z, b, X_{qAq})$$

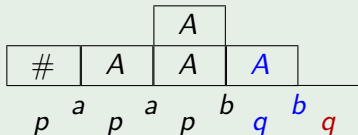


Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \text{CFL}$

Beispiel (Schluss)

- Der (akzeptierenden) Rechnung

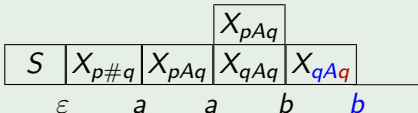
$$(p, aabb, \#) \xrightarrow{(2)} (p, abb, A) \xrightarrow{(3)} (p, bb, AA) \xrightarrow{(4)} (q, b, A) \xrightarrow{(5)} (q, \varepsilon, \varepsilon)$$



von M entspricht dann folgende Rechnung von M' :

$$(z, aabb, S) \xrightarrow{(0')} (z, aabb, X_{p\#q}) \xrightarrow{(2'')} (z, abb, X_{pAq})$$

$$\xrightarrow{(3''')} (z, bb, X_{pAq}X_{qAq}) \xrightarrow{(4')} (z, b, X_{qAq}) \xrightarrow{(5')} (z, \varepsilon, \varepsilon)$$

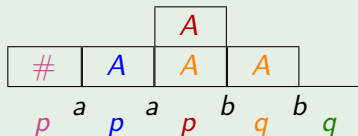


Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \text{CFL}$

Beispiel (Schluss)

- Der (akzeptierenden) Rechnung

$$(p, aabb, \#) \stackrel{(2)}{\vdash} (p, abb, A) \stackrel{(3)}{\vdash} (p, bb, AA) \stackrel{(4)}{\vdash} (q, b, A) \stackrel{(5)}{\vdash} (q, \varepsilon, \varepsilon)$$



von M entspricht dann folgende Rechnung von M' :

$$(z, aabb, S) \stackrel{(0')}{\vdash} (z, aabb, X_{p\#q}) \stackrel{(2'')}{\vdash} (z, abb, X_{pAq})$$

$$\stackrel{(3''''')}{\vdash} (z, bb, X_{pAq}X_{qAq}) \stackrel{(4')}{\vdash} (z, b, X_{qAq}) \stackrel{(5')}{\vdash} (z, \varepsilon, \varepsilon)$$

