# Probeklausur

***Bearbeitung des Bonus-MC-Tests bis 12. 2. 2018, 23:59 Uhr***

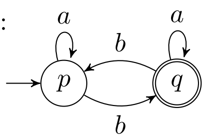
**Hinweise zur Klausur:**

- Klausurtermin: 23. 2. 2018 um 12 Uhr (Einlass) in RUD26 0'110 und 0'115.
- Nachklausurtermin: 28. 3. 2018 um 9 Uhr (Einlass) in RUD26 0'115 (die Nachklausur kann auch ohne Teilnahme an der ersten Klausur mitgeschrieben werden).
- Anmeldung in Agnes nur mit Übungsschein (d.h. 190 schriftliche Punkte sowie 70 Punkte in den MC-Tests in Moodle oder alter ÜS) bis 16.2.2018 (Klausur) bzw. 21.3.2018 (Nachklausur).
- Die Bearbeitungszeit wird 120 Minuten betragen.
- Bitte bringen Sie Ihren Studenten- und einen gültigen amtlichen Lichtbildausweis (Personalausweis, Reisepass oder Führerschein) mit.
- Als Hilfsmittel sind eigene Notizen (auch gedruckt) und Skript erlaubt. Bücher und elektronische Geräte (Taschenrechner, Handy etc.) sind **nicht** zugelassen.
- Am 21.2.2018 ab 9.30 Uhr findet in RUD26 0'307 eine Fragestunde statt.

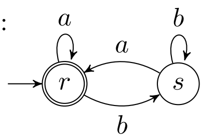
**Aufgabe 1** ***13 Punkte***

Betrachten Sie die beiden folgenden DFAs $M_1$ und $M_2$.

$M_1$:




$M_2$:




(a) Geben Sie explizite Beschreibungen und reguläre Ausdrücke für die Sprachen $A = L(M_1)$ und $B = L(M_2)$ an.

(b) Konstruieren Sie aus $M_1$ und $M_2$ einen DFA $M_3$ für die Sprache $A \cap B$. Verwenden Sie dazu das Verfahren aus der Vorlesung.

(c) Geben Sie einen DFA $M_4$ für die Sprache $A \cup B$ an, der höchstens vier Zustände hat.

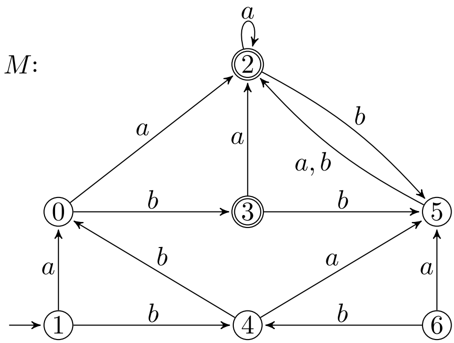
**Aufgabe 2** ***18 Punkte***

Betrachten Sie den folgenden DFA $M$ und $L = L(M)$.

(a) Minimieren Sie $M$ mit dem Verfahren aus der Vorlesung.

(b) Geben Sie ein Repräsentantensystem für die Nerode-Relation $\sim_L$ an.

(c) Geben Sie 4 unterschiedliche Wörter $x$ der Länge 4 an, für die $x \sim_L bbaaab$ gilt.




**Aufgabe 3** ***16 Punkte***

Betrachten Sie auf der Grundmenge $A = \{1, 2, 3, 4\}$ die Relationen

$$R = \{(1,2), (2,3), (3,2), (2,2), (3,3)\} \text{ und}$$
$$S = Id_A \cup \{(2,3), (3,2)\}\ .$$

(a) Geben Sie an, wie viele Paare zu $R$ und $S$ jeweils mindestens hinzugefügt werden müssen, damit diese transitiv bzw. semikonnex werden.

(b) Sind die Relationen $S' = S \setminus \{(3,2)\}$ bzw. $R' = R \cup Id_A$ Ordnungen? Falls nein, begründen Sie, falls ja, geben Sie (sofern vorhanden) das Infimum der Menge $\{2,3\}$ bezüglich der Ordnung an.

(c) Geben Sie eine Relation $P$ auf der Grundmenge $C = \{a, b, c, d\}$ mit $\{(c,a), (a,d)\} \subseteq P$ an, sodass $(A, R)$ und $(C, P)$ isomorph sind.

**Aufgabe 4** ***22 Punkte***

Die *lexikographische Striktordnung* $<$ auf $\{0,1\}^*$ ist wie folgt definiert. Es ist $x < y$, falls gilt:

- $|x| < |y|$ oder
- $|x| = |y|$ und $\exists i \le |x| : x_1 \cdots x_{i-1} = y_1 \cdots y_{i-1}$ und $x_i < y_i$.

Betrachten Sie die Sprachen

$$L_1 = \left\{ x\#y \;\middle|\; x, y \in \{0,1\}^*, |x| = |y|, x < y \right\} \quad \text{und}$$
$$L_2 = \left\{ x\#y \;\middle|\; x, y \in \{0,1\}^*, |x| = |y|, x < y^R \right\}.$$

(a) Geben Sie eine eindeutige Typ-2-Grammatik für $L_2$ an und den Syntaxbaum für das Wort $w = 11000\#10011$ an.

(b) Zeigen Sie, dass $L_1$ nicht kontextfrei ist. Betrachten Sie dazu Wörter der Form $0^l 1^l \# 0^{l-1} 1 0^l$.

(c) Gibt es eine Sprache $A$ mit $L_1 \cap A \in \mathsf{CFL} \setminus \mathsf{REG}$? Begründen Sie kurz.

(d) Gibt es eine Sprache $A \in \mathsf{REG}$ mit $L_2 \cap A \notin \mathsf{CFL}$? Begründen Sie kurz.

**Aufgabe 5** ***15 Punkte***

Welche der folgenden Sprachen sind entscheidbar? Begründen Sie.

(a) $L_1 = \left\{ w \in \{0,1\}^* \,\middle|\, L(M_w) = L(G) \text{ für eine kontextfreie Grammatik } G \right\}$

(b) $L_2 = \left\{ w \in \{0,1\}^* \,\middle|\, L(M_w) = L(G) \text{ für eine Grammatik } G \right\}$

(c) $L_3 = \left\{ w \in \{0,1\}^* \,\middle|\, M_w(w) \text{ führt zweimal hintereinander dieselbe Kopfbew. aus} \right\}$

**Aufgabe 6** Für $n \in \mathbb{N}$ sei $S_n = \{a \in \{0,1\}^n \mid \#_1(a) = 1\}$ ***20 Punkte***

Geben Sie für folgende Probleme an, ob sie in $\mathsf{P}$ liegen oder $\mathsf{NP}$-hart oder $\mathsf{co}$-$\mathsf{NP}$-hart sind. Begründen Sie.

(a) **Gegeben:** Ein Graph $G$.
**Gefragt:** Enthält $G$ zwei Pfade, sodass jeder Knoten von $G$ auf genau einem dieser Pfade liegt?

(b) **Gegeben:** Ein zusammenhängender Graph $G$.
**Gefragt:** Enthält $G$ zwei Wege, sodass jede Kante von $G$ von genau einem dieser Wege durchlaufen wird?

(c) **Gegeben:** Eine aussagenlogische Formel $F$ mit $n$ Variablen.
**Gefragt:** Ist $F \in \textsc{Sat}$ und gilt $F(a) = 1$ für alle $a \in S_n$?

(d) **Gegeben:** Eine aussagenlogische Formel $F$ mit $n$ Variablen.
**Gefragt:** Ist $F \in \textsc{Taut}$ und gilt $F(a) = 1$ für alle $a \in S_n$?

**Aufgabe 7** ***10 Punkte***

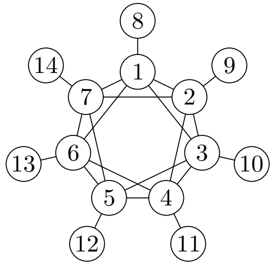
Geben Sie **zusammenhängende** Graphen $G_i$ für $i \in \{1,2\}$ mit den folgenden zusätzlichen Eigenschaften an:

(a) $G_1$ hat genau 7 Knoten und $\chi(G_1) = 4$.

(b) $G_2$ mit $\alpha(G_2) = \beta(G_2) = 6$.

**Aufgabe 8** ***16 Punkte***

Betrachten Sie den nebenstehenden Graphen $G$.



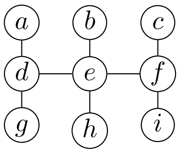

(a) Bestimmen Sie folgende Parameter. Begründen Sie.

(1) $\mu(G) = \max\{\|M\| \mid M \text{ ist ein Matching in } G\}$,
(2) $\omega(G) = \max\{\|C\| \mid C \text{ ist eine Clique in } G\}$.

(b) Ist $H_i$ für $i \in \{1,2\}$ isomorph zu einem Subgraphen von $G$? Falls ja, geben Sie einen solchen Subgraphen $G_i$ von $G$ **oder** einen Isomorphismus von $H_i$ nach $G_i$

an, falls nein, begründen Sie.

$H_1$:




$H_2$: