Übungsblatt 14

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 7. 2.–16. 2. 2018
Bearbeitung des Moodle-MC-Tests bis 6. 2. 2018, 23:59 Uhr
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 15:10 Uhr am 12. 2. 2018 (Montag)

Achtung: In der Woche vom 7.2.-10.2. werden in einigen Gruppen nur die Aufgaben 82 bis 84 besprochen und dafür bereits einige Aufgaben aus der Probeklausur besprochen.
Essentielle Begriffe: Polynomialzeitreduktion, (co-)NP-vollständig, (3-)SAT, CLIQUE

Abzugeben ist **1** Blatt mit den Aufgaben: 82+84+87

Aufgabe 82 ***5 Zusatzpunkte***

(a) Begründen Sie, warum die folgenden Probleme effizient lösbar sind, d.h. in P liegen.
- $\mathrm{LP}_{\mathrm{DFA}}$ (das Leerheitsproblem für DFAs),
- $\mathrm{SP}_{\mathrm{DFA}}$ (das Schnittproblem für DFAs),
- $\mathrm{IP}_{\mathrm{DFA}}$ (das Inklusionsproblem für DFAs),
- $\mathrm{\ddot{A}P}_{\mathrm{DFA}}$ (das Äquivalenzproblem für DFAs). *(mündlich)*

(b) Liegen auch die Probleme $\mathrm{LP}_{\mathrm{NFA}}$ und $\mathrm{SP}_{\mathrm{NFA}}$ (d.h. Leerheits- bzw. Schnittproblem für NFAs) in P? Begründen Sie ihre Antwort. *(5 Zusatzpunkte)*

Aufgabe 83 Zeigen Sie: ***mündlich***
$\mathsf{CFL} \subset \mathsf{P}$, d.h. CFL ist eine echte Teilmenge von P.

Aufgabe 84 Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen: ***10 Zusatzpunkte***

(a) Eine Sprache A ist genau dann NP-vollständig, wenn ihr Komplement vollständig für co-NP ist. *(mündlich)*

(b) $\mathsf{P} = \mathsf{NP} \Rightarrow \mathsf{NP} = \text{co-}\mathsf{NP}$ *(mündlich)*

(c) $\mathsf{NP} \subseteq \text{co-}\mathsf{NP} \Leftrightarrow \text{co-}\mathsf{NP} \subseteq \mathsf{NP}$ *(mündlich)*

(d) Falls NP eine co-NP-harte Sprache enthält, folgt daraus $\mathsf{NP} = \text{co-}\mathsf{NP}$. *(5 ZP.)*

(e) $\leq^p$ ist reflexiv und transitiv, aber nicht antisymmetrisch. *(5 Zusatzpunkte)*

Aufgabe 85 ***mündlich***

Klassifizieren Sie folgende Entscheidungsprobleme für boolesche Formeln entsprechend ihrer Komplexität als effizient lösbar (d. h. in P) bzw. nicht effizient lösbar (d. h. NP-hart oder $\mathsf{co\text{-}NP}$-hart). Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $L_1 = \textsc{UnSat} = \{F \mid F \text{ ist eine unerfüllbare Formel}\}$

(b) $L_2 = \text{TAUT} = \{F \mid F \text{ ist eine aussagenlogische Tautologie}\}$

(c) $L_3 = \{F \mid F \text{ ist eine erfüllbare Formel der Form } G \to H\}$,

(d) $L_4 = \{F \mid F \text{ ist eine Tautologie der Form } G \to H\}$,

(e) $L_5 = \{F \mid F \text{ ist in KNF und es ex. eine Belegung } a \text{ mit } F(a) = 0\}$,

(f) $L_6 = \{F \mid \text{es gibt eine Belegung } a \text{ mit } F(a) = 0\}$.

Aufgabe 86 ***mündlich***

Klassifizieren Sie folgende Probleme als effizient lösbar (d. h. in P) bzw. nicht effizient lösbar (d. h. NP-hart oder $\mathsf{co\text{-}NP}$-hart). Begründen Sie.

(a) Das Subgraph-Isomorphieproblem $\textsc{SubGI}$: Entscheide für zwei gegebene Graphen G und H, ob G isomorph zu einem Subgraphen von H ist.

(b) Das Problem 2018-$\textsc{Clique}$: Hat ein gegebener Graph eine Clique der Größe 2018?

(c) Entscheide für einen Graphen G und eine Zahl k, ob G eine Clique der Größe k oder eine stabile Menge der Größe k hat.

(d) Entscheide für einen Graphen G und eine gegebene Clique C in G, ob C die einzige Clique der Größe $\|C\|$ in G ist.

Aufgabe 87 ***5 Zusatzpunkte***

Geben Sie **zusammenhängende** Graphen G_i für $i \in \{1, 2, 3\}$ mit den folgenden zusätzlichen Eigenschaften an:

(a) G_1 hat 8 Knoten und jedes Paar e, e' aus Kanten hat mindetens einen gemeinsamen Knoten (d.h. $e \cap e' \neq \varnothing$). *(3 Zusatzpunkte)*

(b) G_2 und G_3, die nicht isomorph sind, aber gleich viele Knoten und dieselbe Cliquenzahl haben. Die Cliquenzahl eines Graphen $G = (V, E)$ ist die Größe der größten Clique, d.h. der größten Teilmenge $C \subseteq V$, deren Knoten paarweise benachbart sind, d.h. für alle $u, v \in C, u \neq v$ gilt: $\{u, v\} \in E$. *(2 Zusatzpunkte)*