Übungsblatt 12

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 23.1.–26. 1. 2018
Bearbeitung des Moodle-MC-Tests bis 22. 1. 2018, 23:59 Uhr
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 15:10 Uhr am 31. 1. 2018

Essentielle Begriffe: charakteristische Funktion χ_L, reduzierbar,berechenbare Funktion, partielle bzw. totale Funktion

Abzugeben sind 3 Blätter jeweils mit den Aufgaben: 73;74;75;76

Aufgabe 71 Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen: ***mündlich***

(1) A ist entscheidbar,

(2) χ_A ist berechenbar,

(3) A wird von einer DTM akzeptiert, die bei allen Eingaben hält.

(4) A wird von einer NTM akzeptiert, die bei allen Eingaben hält.

Aufgabe 72 ***mündlich***

Die *Goldbachsche Vermutung* lautet:

Jede gerade Zahl größer 2 ist die Summe zweier Primzahlen.

Es ist nicht bekannt, ob diese Vermutung wahr ist. Wir definieren die totale Funktion $f\colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}$ und die partielle Funktion $g\colon \{0,1\}^* \to \{1\} \cup \{\uparrow\}$ wie folgt:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{die Goldbachvermutung ist falsch,} \\ 0, & \text{die Goldbachvermutung ist richtig,} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1, & f(x) = 1, \\ \uparrow, & f(x) = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f berechenbar ist.

(b) Beschreiben Sie informell eine DTM M, die g berechnet.

Aufgabe 73 ***9 Punkte***

Die *Primzahlzwillingsvermutung* lautet:

Es gibt unendlich viele Primzahlpaare p, q mit $|p - q| = 2$.

Es ist bis heute ungeklärt, ob diese Vermutung wahr ist. Sind die totalen Funktionen $f_i : \{0,1\}^* \to \{0,1\}$ mit $i \in \{1,2,3\}$ berechenbar? Begründen Sie!

(a) $f_1(x) = 1 \Leftrightarrow$ die Primzahlzwillingsvermutung ist wahr *(3 Punkte)*

(b) $f_2(x) = 1 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : x = bin(n)$ und n sowie $n + 2$ sind Primzahlen *(3 Punkte)*

(c) $f_3(x) = 1 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n - 2, n$ und $n + 2$ sind Primzahlen *(3 Punkte)*

Aufgabe 74 ***6 Punkte***

Gelten die folgenden Aussagen für beliebige Sprachen $A \in \mathsf{RE}$ und beliebige Sprachen $B \in \mathsf{REC}$? Begründen Sie.

(a) $A \cap B \in \mathsf{REC}$, d.h. entscheidbar,

(b) $A \cap B \notin \mathsf{REC}$, d.h. unentscheidbar,

(c) $A \cap B \in \mathsf{RE}$, d.h. semi-entscheidbar,

(d) $A \cap B \in \text{co-}\mathsf{RE}$,
d.h. $\overline{A \cap B}$ ist semi-entscheidbar,

Aufgabe 75 Zeigen Sie: ***9 Punkte***

(a) Die Reduktionsrelation $\leq$ ist reflexiv und transitiv, aber nicht antisymmetrisch (und somit keine Ordnung). *(mündlich)*

(b) Die Klasse RE ist unter $\leq$ abgeschlossen. *(mündlich)*

(c) Es existiert eine DTM M, die für jede Eingabe der Form $w\#x$ (wobei $w, x \in \{0,1\}^*$) dasselbe ausgibt wie die DTM M_w bei Eingabe x, d.h. es gilt $M(w\#x) = M_w(x)$. *(mündlich)*

(d) Das spezielle Halteproblem K ist RE-vollständig. *(mündlich)*

(e) Für zwei Sprachen A, B gilt $A \leq B$ genau dann, wenn $\overline{A} \leq \overline{B}$. *(mündlich)*

(f) Eine Sprache A ist genau dann RE-vollständig, wenn ihr Komplement $\overline{A}$ co-RE-vollständig ist. *(3 Punkte)*

(g) Jede Sprache $L \in \mathsf{RE}$ mit $L \leq \overline{L}$ ist entscheidbar. *(3 Punkte)*

(h) Es gibt keine RE-vollständige Sprache, die co-RE-vollständig ist. *(3 Punkte)*

Aufgabe 76 ***6 Punkte***

Betrachten Sie die DTM $M = (\{p,q,r\}, \{0,1\}, \{0,1,\sqcup\}, \delta, p, \{r\})$ mit

$$\delta: \ p0 \to p0R, \qquad p1 \to q1R, \qquad q0 \to p0R, \qquad q1 \to r1N.$$

(a) Geben Sie $L(M)$ an. *(1 Punkt)*

(b) Geben Sie eine 2-DTM M' für $\chi_{L(M)}$ an, d.h. M' berechnet die charakteristische Funktion von $L(M)$. Erinnerung: Die Ausgabe einer DTM steht auf dem letzten Band, links vom Kopf. *(5 Punkte)*