

Übungsblatt 3

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 7.11.–10. 11. 2017

Bearbeitung des Moodle-MC-Tests bis 6. 11. 2017, 23:59 Uhr

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 15:10 Uhr am 15. 11. 2017

Essentielle Begriffe: Relation, reflexiv, irreflexiv, symmetrisch, asymmetrisch, antisymmetrisch, transitiv, Äquivalenzrelation und -klassen, Repräsentantensystem, Funktion, injektiv, Ordnung

Abzugeben sind 3 Blätter jeweils mit den Aufgaben: **17b+19e**; 21; 22

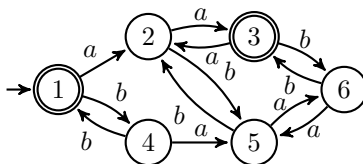
Sollten Sie jeweils mehr als ein Blatt benötigen, heften Sie diese bitte zusammen.

Aufgabe 17 Gegeben sei nebenstehender DFA.

6 Punkte

Geben Sie möglichst einfache reguläre Ausdrücke für die folgenden Sprachen an.

- (a) $L_{1,2}^0, L_{2,1}^6, L_{2,5}^4$, (mündlich)
(b) $L_{2,3}^5$ und $L_{1,3}^5$. (6 Punkte)



Aufgabe 18

mündlich

Beschreiben Sie umgangssprachlich die folgenden Relationen auf der Menge aller Menschen. Dabei bezeichne R_1 die Relation „ist verheiratet mit“, R_2 die Relation „ist Mutter von“ und R_3 die Relation „ist Kind von“.

- (a) $R_1 \circ R_2$,
(b) $R_2 \circ R_1$,
(c) $R_2 \circ R_3$,
(d) $R_3 \circ R_2$,
(e) $R_2 \circ R_1 \circ R_3$.

Aufgabe 19 Sei R eine Relation auf A . Beweisen Sie:

6 Punkte

- (a) $R^2 \subseteq R \Leftrightarrow R$ transitiv $\Leftrightarrow R^i \subseteq R$ für alle $i \geq 1$. (mündlich)
(b) $h_{\text{refl}}(R) = R \cup Id_A$, $R^+ = \bigcup_{i \geq 1} R^i$. (mündlich)
(c) $R^* = R^+ \cup R^0$, $R^+ = R \circ R^*$. (mündlich, optional)
(d) R ist symmetrisch $\Rightarrow R^*$ ist symmetrisch. (mündlich, optional)
(e) $h_{\text{sym}}(R) = R \cup R^T$. (6 Punkte)
(f) $h_{\text{äq}}(R) = (R \cup R^T)^*$. (mündlich, optional)

Aufgabe 20 Sei $R = \{(\diamond, 2), (\heartsuit, 3), (\spadesuit, 4)\} \subseteq A \times B$ und $\|A \times B\| = 6$. **mündlich**

- (a) Geben Sie $B \times A$ an und begründen Sie Ihre Antwort.
- (b) Welche der Relationen R , R^T , $(A \times B) \setminus R$ und $R \setminus \{(\diamond, 4)\}$ sind Funktionen? Welche der Funktionen sind zusätzlich injektiv?
- (c) Welche Eigenschaften (reflexiv, irreflexiv, symmetrisch, asymmetrisch, antisymmetrisch, transitiv) hat R als Relation auf $A \cup B$?
- (d) Wie viele Elemente muss man zu R hinzufügen, um eine lineare Striktordnung auf $A \cup B$ zu erhalten?

Aufgabe 21 Sei $V = \{1, \dots, 5\}$ und R folgende Relation auf V **10 Punkte**

$$R = \{(1, 1), (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (5, 4)\}$$

- (a) Welche Eigenschaften (reflexiv, irreflexiv, symmetrisch, asymmetrisch, antisymmetrisch, transitiv) hat diese Relation? (3 Punkte)
- (b) Veranschaulichen Sie die Relationen R , R^T , R^2 , R^3 , R^+ , $h_{\text{sym}}(R)$ und $h_{\text{äq}}(R)$ jeweils durch einen Digraphen. (4 Punkte)

Geben Sie jeweils eine kleinstmögliche Relation auf V an, die

- (c) reflexiv und symmetrisch, aber nicht transitiv (2 Punkte)
- (d) symmetrisch und transitiv, aber nicht reflexiv (1 Punkt)

ist und beweisen Sie, dass Ihre Relationen kleinstmöglich sind.

Aufgabe 22 Auf $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ seien folgende Relationen definiert: **8+4 Punkte**

- (a) $xRy : \Leftrightarrow x + 2y$ ist durch 3 teilbar, (mündlich)
- (b) $xBy : \Leftrightarrow |x - y| \leq 7$, (mündlich)
- (c) $XTy : \Leftrightarrow x \cdot y$ ist gerade, (4 Punkte)
- (d) $XUy : \Leftrightarrow x + y$ ist gerade, (4 Punkte)
- (e) $XYy : \Leftrightarrow x \cdot y$ ist eine Quadratzahl. (4 Zusatzpunkte)

Welche dieser Relationen sind Äquivalenzrelationen? Begründen Sie. Geben Sie gegebenenfalls die Äquivalenzklassen und ein Repräsentantensystem an.

Aufgabe 23 Sei $R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, c)\}$. **mündlich, optional**

Wie viele Paare müssen zu R jeweils mindestens hinzugefügt werden, um eine reflexive, symmetrische, antisymmetrische, transitive Relation bzw. eine Äquivalenzrelation auf $A = \{a, b, c, d\}$ zu erhalten? Geben Sie diese Paare jeweils an.