Übungsblatt 2

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 1.11.–3. 11. 2017
Bearbeitung des Moodle-MC-Tests bis 30. 10. 2017, 23:59 Uhr
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 15:10 Uhr am 8. 11. 2017
Essentielle Begriffe: Produkt zweier Sprachen, Sternhülle, Potenzmengenautomat, regulärer Ausdruck

Verwenden Sie bitte für **jede** Aufgabe ein neues Blatt.

Aufgabe 10 Seien A, B, C Sprachen. Zeigen oder widerlegen Sie: ***7 Punkte***

(a) $\left(\{a\}^*\{b\}^*\right)^* = \left(\{a,b\}^*\right)^2$, (b) $\left(\{a\}^*\{b\}^*\right)^* = \left(\{a,b\}^2\right)^*$, *(mündlich)*

(c) $A^+ = AA^*$, (d) $A(B \cap C) \subseteq AB \cap AC$, *(mündlich)*

(e) $A(B \cup C) = AB \cup AC$, (f) $A(B \cap C) = AB \cap AC$. *(4+3 Punkte)*

Aufgabe 11 Für eine Sprache L seien ***mündlich, optional***

$\min(L) = \{x \in L \mid \text{kein Wort } y \in L \text{ ist echtes Präfix von } x\}$ und

$\max(L) = \{x \in L \mid x \text{ ist kein echtes Präfix eines Wortes } y \in L\}$.

L heißt *präfixfrei*, falls kein Wort in L echtes Präfix eines anderen Wortes in L ist.

(a) Charakterisieren Sie die Präfixfreiheit mit Hilfe des min-Operators.

(b) Zeigen Sie, dass die Aussagen $L = \max(L)$ und $L = \min(L)$ äquivalent sind.

(c) Zeigen Sie, dass die Klasse REG unter dem min-Operator abgeschlossen ist, d. h. für $L \in \mathsf{REG}$ folgt $\min(L) \in \mathsf{REG}$.

Aufgabe 12 ***4+10 Punkte***

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine reguläre Sprache. Zeigen Sie, dass dann auch die folgenden Sprachen regulär sind, indem Sie beschreiben wie Sie aus einem beliebigen DFA für L einen DFA (oder NFA) für diese Sprachen konstruieren. Begründen Sie jeweils auch die Korrektheit des von Ihnen konstruierten Automaten.

(a) $\text{prefix}(L) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* : xy \in L\}$, *(mündlich)*

(b) $\text{suffix}(L) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* : yx \in L\}$, *(mündlich)*

(c) $L^R = \{x^R \mid x \in L\}$, *(mündlich)*
(x^R bezeichnet das gespiegelte Wort, z.B. $abcd^R = dcba$)

(d) L^+, *(4 Punkte)*

*(e) $\text{cycle}(L) = \{vu \in \Sigma^* \mid uv \in L\}$, *(4 Zusatzpunkte)*

*(f) $L/2 = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* : xy \in L, |x| = |y|\}$. *(6 Zusatzpunkte)*

Hinweis: Mit * markierte Aufgaben haben einen erhöhten Schwierigkeitsgrad.

Aufgabe 13 Betrachten Sie die Sprachen **8 Punkte**

$$A = \{u \in \{a,b\}^* \mid u \text{ endet mit } b\} \text{ und } B = \{v \in \{a,b\}^* \mid \#_a(v) \text{ ist ungerade}\}.$$

(a) Geben Sie für A und B je einen DFA (M_A / M_B) mit 2 Zuständen an. *(2 Punkte)*

(b) Konstruieren Sie aus M_A und M_B mit dem Algorithmus aus der Vorlesung einen NFA N für das Produkt $L = AB$. *(3 Punkte)*

(c) Konstruieren Sie aus M_B einen NFA N_{B^*} für die Sternhülle B^* von B mit dem Algorithmus aus der Vorlesung. *(3 Punkte)*

Aufgabe 14 ***mündlich, optional***

Ein ENFA (extended NFA) ist 5-Tupel $N = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$, wobei Z,Σ,S und E wie bei einem NFA definiert sind, δ die Form

$$\delta : Z \times \Sigma^+ \to \mathcal{P}(Z)$$

hat und $\{(z,w) \mid \delta(z,w) \neq \varnothing\}$ endlich ist. Der Zustandsgraph von N hat also nur endlich viele Kanten, die mit Wörtern $w \in \Sigma^+$ beschriftet sind.

(a) Definieren Sie die von einem ENFA N erkannte Sprache formal.

(b) Zeigen Sie, dass bei Verzicht auf die Bedingung „$\{(z,w) \mid \delta(z,w) \neq \varnothing\}$ ist endlich“ jede Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ von einem ENFA erkannt wird.

(c) Zeigen Sie, dass $\{L(N) \mid N \text{ ist ein ENFA}\} = \mathsf{REG}$ ist, indem Sie aus einem beliebigen ENFA einen äquivalenten NFA konstruieren und umgekehrt.

(d) Zeigen Sie, dass $\{L(N) \mid N \text{ ist ein ENFA}\} = \mathsf{REG}$ auch gilt, wenn man Σ^+ durch Σ^* ersetzt, d.h. $\delta : Z \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Z)$.

Aufgabe 15 ***mündlich***

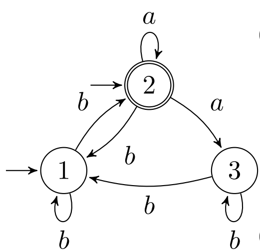
Sei $L_1 \subseteq \{a,b\}^*$ die Sprache der Wörter, die *aba* als Teilwort enthalten.

(a) Geben Sie einen NFA N für L_1 an und zeigen Sie, dass $L(N) = L_1$ ist.

(b) Konstruieren Sie den zu N gehörigen Potenzmengenautomaten.

(c) Geben Sie reguläre Ausdrücke für L_1 und für $\overline{L_1}$ an.

Aufgabe 16 Gegeben sei folgender NFA N. **11 Punkte**



(a) Geben Sie die Sprachen $L(N)$ und $\overline{L(N)}$ an. *(2 Punkte)*

(b) Wandeln Sie den NFA N mittels der in der Vorlesung vorgestellten Potenzmengenautomatenkonstruktion in einen DFA M um. Lassen Sie dabei überflüssige (d.h. vom neuen Startzustand nicht erreichbare) Zustände weg. *(6 Punkte)*

(c) Geben Sie sämtliche in M nicht erreichbaren Zustände an. *(1 Punkt)*

(d) Geben Sie reguläre Ausdrücke für die Sprache $L(N)$ und ihr Komplement $\overline{L(N)}$ an. *(2 Punkte)*