

Vorlesungsskript
Einführung in die Kryptologie
Wintersemester 2017/18

Prof. Dr. Johannes Köbler
Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Komplexität und Kryptografie

2. November 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Klassische Verfahren	1
1.1 Einführung	1
1.2 Kryptosysteme	2
1.3 Die affine Chiffre	3
1.4 Die Hill-Chiffre	11
1.5 Die Vigenère-Chiffre und andere Stromsysteme	13
1.6 Der One-Time-Pad	15
1.7 Klassifikation von Kryptosystemen	16

1 Klassische Verfahren

1.1 Einführung

Kryptosysteme (Verschlüsselungsverfahren) dienen der Geheimhaltung von Nachrichten bzw. Daten. Hierzu gibt es auch andere Methoden wie z.B.

Physikalische Maßnahmen: Tresor etc.

Organisatorische Maßnahmen: einsamer Waldspaziergang etc.

Steganografische Maßnahmen: unsichtbare Tinte etc.

Andererseits können durch kryptografische Verfahren weitere **Schutzziele** realisiert werden.

- *Vertraulichkeit*
 - Geheimhaltung
 - Anonymität (z.B. Mobiltelefon)
 - Unbeobachtbarkeit (von Transaktionen)
- *Integrität*
 - von Nachrichten und Daten
- *Zurechenbarkeit*
 - Authentikation
 - Unabstreichbarkeit
 - Identifizierung
- *Verfügbarkeit*
 - von Daten
 - von Rechenressourcen
 - von Informationsdienstleistungen

In das Umfeld der Kryptografie fallen auch die folgenden Begriffe.

Kryptografie: Lehre von der Geheimhaltung von Informationen durch die Verschlüsselung von Daten. Im weiteren Sinne: Wissenschaft von der Übermittlung, Speicherung und Verarbeitung von Daten in einer von potentiellen Gegnern bedrohten Umgebung.

Kryptoanalysis: Erforschung der Methoden eines unbefugten Angriffs gegen ein Kryptoverfahren (Zweck: Vereitelung der mit seinem Einsatz verfolgten Ziele)

Kryptoanalyse: Analyse eines Kryptoverfahrens zum Zweck der Bewertung seiner kryptografischen Stärken bzw. Schwächen.

Kryptologie: Wissenschaft vom Entwurf, der Anwendung und der Analyse von kryptografischen Verfahren (umfasst Kryptografie und Kryptoanalyse).

1.2 Kryptosysteme

Es ist wichtig, Kryptosysteme von Codesystemen zu unterscheiden.

Codesysteme

- operieren auf semantischen Einheiten,
- starre Festlegung, welche Zeichenfolge wie zu ersetzen ist.

Beispiel 1 (Ausschnitt aus einem Codebuch der deutschen Luftwaffe).

xve	<i>Bis auf weiteres Wettermeldung gemäß Funkbefehl testen</i>
yde	<i>Frage</i>
sLk	<i>Befehl</i>
fin	<i>beendet</i>
eom	<i>eigene Maschinen</i>

△

Kryptosysteme

- operieren auf syntaktischen Einheiten,
- flexibler Mechanismus durch Schlüsselvereinbarung

Definition 2 (Alphabet). Ein **Alphabet** $A = \{a_0, \dots, a_{m-1}\}$ ist eine geordnete endliche Menge von **Zeichen** a_i . Eine Folge $x = x_1 \dots x_n \in A^n$ heißt **Wort** (der **Länge** n). Die Menge aller Wörter über dem Alphabet A ist $A^* = \bigcup_{n \geq 0} A^n$.

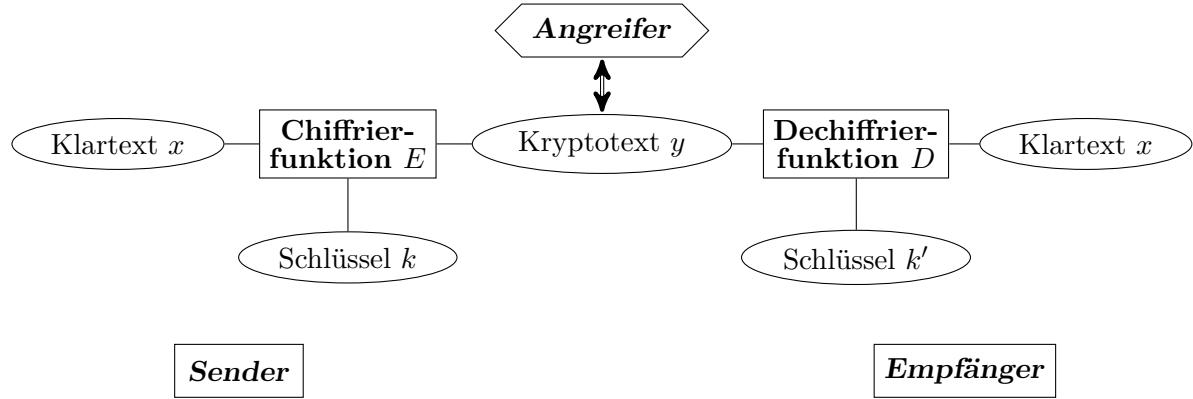
Beispiel 3. Das **lateinische Alphabet** A_{lat} enthält die 26 Buchstaben A, ..., Z. Bei der Abfassung von Klartexten wurde meist auf den Gebrauch von Interpunktions- und Leerzeichen sowie auf Groß- und Kleinschreibung verzichtet (→ Verringerung der Redundanz im Klartext). □

Definition 4 (Kryptosystem). Ein **Kryptosystem** wird durch folgende Komponenten beschrieben:

- A , das **Klartextalphabet**,
- B , das **Kryptotextalphabet**,
- K , der **Schlüsselraum** (key space),
- $M \subseteq A^*$, der **Klartextraum** (message space),
- $C \subseteq B^*$, der **Kryptotextraum** (ciphertext space),
- $E : K \times M \rightarrow C$, die **Verschlüsselungsfunktion** (encryption function),
- $D : K \times C \rightarrow M$, die **Entschlüsselungsfunktion** (decryption function) und
- $S \subseteq K \times K$, eine Menge von Schlüsselpaaren (k, k') mit der Eigenschaft, dass für jeden Klartext $x \in M$ folgende Beziehung gilt:

$$D(k', E(k, x)) = x \quad (1.1)$$

Bei symmetrischen Kryptosystemen ist $S = \{(k, k) \mid k \in K\}$, weshalb wir in diesem Fall auf die Angabe von S verzichten können.



Zu jedem Schlüssel $k \in K$ korrespondiert also eine **Chiffrierfunktion** $E_k : x \mapsto E(k, x)$ und eine **Dechiffrierfunktion** $D_k : y \mapsto D(k, y)$. Die Gesamtheit dieser Abbildungen wird auch **Chiffre** (englisch *cipher*) genannt. (Daneben wird der Begriff „Chiffre“ auch als Bezeichnung für einzelne Kryptotextzeichen oder kleinere Kryptotextsequenzen verwendet.)

Lemma 5. Für jedes Paar $(k, k') \in S$ ist die Chiffrierfunktion E_k injektiv.

Beweis. Angenommen, für zwei unterschiedliche Klartexte $x_1 \neq x_2$ ist $E(k, x_1) = E(k, x_2)$. Dann folgt

$$D(k', E(k, x_1)) = D(k', E(k, x_2)) \stackrel{(1.1)}{=} x_2 \neq x_1,$$

im Widerspruch zu (1.1). \square

1.3 Die affine Chiffre

Die Moduloarithmetik erlaubt es uns, das Klartextalphabet mit einer Addition und Multiplikation auszustatten.

Definition 6 (teilt-Relation, modulare Kongruenz). Seien a, b, m ganze Zahlen mit $m \geq 1$. Die Zahl a **teilt** b (kurz: $a|b$), falls ein $d \in \mathbb{Z}$ existiert mit $b = ad$. Teilt m die Differenz $a - b$, so schreiben wir hierfür

$$a \equiv_m b$$

(in Worten: a ist **kongruent** zu b modulo m). Weiterhin bezeichne

$$a \bmod m = \min\{a - dm \geq 0 \mid d \in \mathbb{Z}\}$$

den bei der Ganzzahldivision von a durch m auftretenden **Rest**, also diejenige ganze Zahl $r \in \{0, \dots, m-1\}$, für die eine ganze Zahl $d \in \mathbb{Z}$ existiert mit $a = dm + r$.

Die auf \mathbb{Z} definierten Operationen

$$a \oplus_m b := (a + b) \bmod m$$

und

$$a \odot_m b := ab \bmod m.$$

Tabelle 1.1: Werte der additiven Chiffrierfunktion ROT13 (Schlüssel $k = 13$).

x	A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z
$E(13, x)$	N O P Q R S T U V W X Y Z A B C D E F G H I J K L M

sind abgeschlossen auf $\mathbb{Z}_m = \{0, \dots, m-1\}$ und bilden auf dieser Menge einen kommutativen Ring mit Einselement, den sogenannten **Restklassenring** modulo m . Für $a \oplus_m -b$ schreiben wir auch $a \ominus_m b$.

Durch Identifikation der Buchstaben a_i mit ihren Indizes können wir die auf \mathbb{Z}_m definierten Rechenoperationen auf Buchstaben übertragen.

Definition 7 (Buchstabenrechnung). Sei $A = \{a_0, \dots, a_{m-1}\}$ ein Alphabet. Für Indizes $i, j \in \{0, \dots, m-1\}$ und eine ganze Zahl $z \in \mathbb{Z}$ ist

$$\begin{aligned} a_i + a_j &= a_{i \oplus_m j}, & a_i - a_j &= a_{i \ominus_m j}, & a_i a_j &= a_{i \odot_m j}, \\ a_i + z &= a_{i \oplus_m z}, & a_i - z &= a_{i \ominus_m z}, & za_j &= a_{z \odot_m j}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Notation lässt sich die Verschiebechiffre, die auch als additive Chiffre bezeichnet wird, leicht beschreiben.

Definition 8 (additive Chiffre). Bei der **additiven Chiffre** ist $A = B = M = C$ ein beliebiges Alphabet mit $m := \|A\| > 1$ und $K = \{1, \dots, m-1\}$. Für $k \in K$, $x \in M$ und $y \in C$ gilt

$$E(k, x) = x + k \text{ und } D(c, y) = y - k.$$

Im Fall des lateinischen Alphabets führt der Schlüssel $k = 13$ auf eine interessante Chiffrierfunktion, die in UNIX-Umgebungen auch unter der Bezeichnung ROT13 bekannt ist (siehe Tabelle 1.1). Natürlich kann mit dieser Substitution nicht ernsthaft die Vertraulichkeit von Nachrichten geschützt werden. Vielmehr soll durch sie ein unbeabsichtigtes Mitlesen – etwa von Rätsellösungen – verhindert werden.

ROT13 ist eine **involutorische** – also zu sich selbst inverse – Abbildung, d.h. für alle $x \in A$ gilt

$$\text{ROT13}(\text{ROT13}(x)) = x.$$

Da ROT13 zudem keinen Buchstaben auf sich selbst abbildet, ist sie sogar eine echt involutorische Abbildung.

Die Buchstabenrechnung legt folgende Modifikation der Caesar-Chiffre nahe: Anstatt auf jeden Klartextbuchstaben den Schlüsselwert k zu addieren, können wir die Klartextbuchstaben auch mit k multiplizieren. Allerdings erhalten wir hierbei nicht für jeden Wert von k eine injektive Chiffrierfunktion. So bildet etwa die Funktion $g : A_{lat} \rightarrow A_{lat}$ mit $g(x) = 2x$ sowohl **A** als auch **N** auf den Buchstaben $g(\mathbf{A}) = g(\mathbf{N}) = \mathbf{A}$ ab. Um die vom Schlüsselwert k zu erfüllende Bedingung angeben zu können, führen wir folgende Begriffe ein.

Definition 9 (ggT, kgV, teilerfremd). Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Für $(a, b) \neq (0, 0)$ ist

$$\text{ggT}(a, b) = \max\{d \in \mathbb{Z} \mid d \text{ teilt die beiden Zahlen } a \text{ und } b\}$$

der **größte gemeinsame Teiler** von a und b . Für $a \neq 0, b \neq 0$ ist

$$\text{kgV}(a, b) = \min\{d \in \mathbb{Z} \mid d \geq 1 \text{ und die beiden Zahlen } a \text{ und } b \text{ teilen } d\}$$

das **kleinste gemeinsame Vielfache** von a und b . Ist $\text{ggT}(a, b) = 1$, so nennt man a und b **teilerfremd** oder man sagt, a ist **relativ prim** zu b .

Lemma 10. Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $(a, b) \neq (0, 0)$. Dann gilt $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(b, a + bc)$ und somit $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(b, a \bmod b)$, falls $b \geq 1$ ist.

Beweis. Jeder Teiler d von a und b ist auch ein Teiler von b und $a + bc$ und umgekehrt. \square

Euklidscher Algorithmus: Der größte gemeinsame Teiler zweier Zahlen a und b lässt sich wie folgt bestimmen.

O. B. d. A. sei $a > b > 0$. Bestimme die natürlichen Zahlen (durch Divsision mit Rest):

$$r_0 = a > r_1 = b > r_2 > \dots > r_s > r_{s+1} = 0 \quad \text{und} \quad d_2, d_3, \dots, d_{s+1}$$

mit

$$r_{i-1} = d_{i+1}r_i + r_{i+1} \quad \text{für } i = 1, \dots, s. *$$

Hierzu sind s Divisionsschritte erforderlich. Wegen

$$\text{ggT}(r_{i-1}, r_i) = \text{ggT}(r_i, \underbrace{r_{i-1} - d_{i+1}r_i}_{r_{i+1}})$$

folgt $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(r_s, r_{s+1}) = r_s$.

Beispiel 11. Für $a = 693$ und $b = 147$ erhalten wir

$$\begin{array}{rcl} i & r_{i-1} & = d_{i+1} \cdot r_i + r_{i+1} \\ \hline 1 & 693 & = 4 \cdot 147 + 105 \\ 2 & 147 & = 1 \cdot 105 + 42 \\ 3 & 105 & = 2 \cdot 42 + 21 \\ 4 & 42 & = 2 \cdot 21 + 0 \end{array}$$

und damit $\text{ggT}(693, 147) = r_4 = 21$. \diamond

Der Euklidsche Algorithmus lässt sich sowohl iterativ als auch rekursiv implementieren.

Prozedur **Euklid_{it}**(a, b)

```

1  repeat
2       $r := a \bmod b$ 
3       $a := b$ 
4       $b := r$ 
5  until  $r = 0$ 
6  return( $a$ )

```

Prozedur **Euklid_{rek}**(a, b)

```

1  if  $b = 0$  then
2      return( $a$ )
3  else
4      return(Euklidrek( $b, a \bmod b$ ))

```

Zur Abschätzung von s verwenden wir die Folge der Fibonacci-Zahlen F_n :

*Also: $d_i = r_{i-2} \text{ div } r_{i-1}$ und $r_i = r_{i-2} \bmod r_{i-1}$.

$$F_n = \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 0 \\ 1, & \text{falls } n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2}, & \text{falls } n \geq 2 \end{cases}$$

Durch Induktion über $i = s, s-1, \dots, 0$ folgt $r_i \geq F_{s+1-i}$; also $a = r_0 \geq F_{s+1}$. Weiterhin lässt sich durch Induktion über $n \geq 0$ zeigen, dass $F_{n+1} \geq \phi^{n-1}$ ist, wobei $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ der *goldene Schnitt* ist. Der Induktionsanfang ($n = 0$ oder 1) ist klar, da $F_2 = F_1 = 1 = \phi^0 \geq \phi^{-1}$ ist. Unter der Induktionsannahme $F_{i+1} \geq \phi^{i-1}$ für $i \leq n-1$ folgt wegen $\phi^2 = \phi + 1$

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \geq \phi^{n-2} + \phi^{n-3} = \phi^{n-3}(\phi + 1) = \phi^{n-1}.$$

Somit ist $a \geq \phi^{s-1}$, d. h. $s \leq 1 + \lfloor \log_\phi a \rfloor$.

Satz 12. *Der Euklidsche Algorithmus führt $O(n)$ Divisionsschritte zur Berechnung von $\text{ggT}(a, b)$ durch, wobei n die Länge der Eingabe $a > b > 0$ in Binärdarstellung bezeichnet. Dies führt auf eine Zeitkomplexität von $O(n^3)$, da jede Ganzzahldivision in Zeit $O(n^2)$ durchführbar ist.*

Erweiterter Euklidscher bzw. Berlekamp-Algorithmus: Der Euklidsche Algorithmus kann so modifiziert werden, dass er eine lineare Darstellung

$$\text{ggT}(a, b) = \lambda a + \mu b \quad \text{mit } \lambda, \mu \in \mathbb{Z}$$

des ggT liefert (Zeitkomplexität ebenfalls $O(n^3)$). Hierzu werden neben r_i und d_i weitere Zahlen

$$p_i = p_{i-2} - d_i p_{i-1}, \quad \text{wobei } p_0 = 1 \quad \text{und} \quad p_1 = 0,$$

und

$$q_i = q_{i-2} - d_i q_{i-1}, \quad \text{wobei } q_0 = 0 \quad \text{und} \quad q_1 = 1,$$

für $i = 0, \dots, n$ bestimmt. Dann gilt für $i = 0$ und $i = 1$,

$$ap_i + bq_i = r_i,$$

und durch Induktion über i ,

$$\begin{aligned} ap_{i+1} + bq_{i+1} &= a(p_{i-1} - d_{i+1}p_i) + b(q_{i-1} - d_{i+1}q_i) \\ &= ap_{i-1} + bq_{i-1} - d_{i+1}(ap_i + bq_i) \\ &= (r_{i-1} - d_{i+1}r_i) \\ &= r_{i+1} \end{aligned}$$

zeigt man, dass dies auch für $i = 2, \dots, s$ gilt. Insbesondere gilt also

$$ap_s + bq_s = r_s = \text{ggT}(a, b).$$

Korollar 13 (Lemma von Bezout). *Der größte gemeinsame Teiler von a und b ist in der Form*

$$\text{ggT}(a, b) = \lambda a + \mu b \quad \text{mit } \lambda, \mu \in \mathbb{Z}$$

darstellbar.

Beispiel 14. Für $a = 693$ und $b = 147$ erhalten wir wegen

i	r_{i-1}	$=$	$d_{i+1} \cdot r_i + r_{i+1}$	p_i	q_i	$p_i \cdot 693 + q_i \cdot 147 = r_i$
0				1	0	$1 \cdot 693 + 0 \cdot 147 = 693$
1	693	=	$4 \cdot 147 + 105$	0	1	$0 \cdot 693 + 1 \cdot 147 = 147$
2	147	=	$1 \cdot 105 + 42$	1	-4	$1 \cdot 693 - 4 \cdot 147 = 105$
3	105	=	$2 \cdot 42 + 21$	-1	5	$-1 \cdot 693 + 5 \cdot 147 = 42$
4	42	=	$2 \cdot 21 + 0$	3	-14	$3 \cdot 693 - 14 \cdot 147 = 21$

die lineare Darstellung $3 \cdot 693 - 14 \cdot 147 = 21$. \square

Aus der linearen Darstellbarkeit des größten gemeinsamen Teilers ergeben sich eine Reihe von nützlichen Schlussfolgerungen.

Korollar 15. $\text{ggT}(a, b) = \min\{\lambda a + \mu b \geq 1 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{Z}\}$.

Beweis. Sei $M = \{\lambda a + \mu b \geq 1 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{Z}\}$, $m = \min M$ und $g = \text{ggT}(a, b)$. Dann folgt $g \geq m$, da g in der Menge M enthalten ist, und $g \leq m$, da g jede Zahl in M teilt. \square

Korollar 16. Der größte gemeinsame Teiler von a und b wird von allen gemeinsamen Teilern von a und b geteilt,

$$x|a \wedge x|b \Rightarrow x|\text{ggT}(a, b).$$

Beweis. Seien $\mu, \lambda \in \mathbb{Z}$ mit $\mu a + \lambda b = \text{ggT}(a, b)$. Falls x sowohl a als auch b teilt, dann teilt x auch die Produkte μa und λb und somit auch deren Summe. \square

Korollar 17 (Lemma von Euklid). Teilt a das Produkt bc und sind a, b teilerfremd, so teilt a auch c ,

$$a|bc \wedge \text{ggT}(a, b) = 1 \Rightarrow a|c.$$

Beweis. Wegen $\text{ggT}(a, b) = 1$ existieren Zahlen $\mu, \lambda \in \mathbb{Z}$ mit $\mu a + \lambda b = 1$. Falls a das Produkt bc teilt, muss a auch die Zahl $c\mu a + c\lambda b = c$ teilen. \square

Korollar 18. Zwei Zahlen a und b sind genau dann zu einer Zahl $m \in \mathbb{Z}$ teilerfremd, wenn ihr Produkt ab teilerfremd zu m ist,

$$\text{ggT}(a, m) = \text{ggT}(b, m) = 1 \Leftrightarrow \text{ggT}(ab, m) = 1.$$

Beweis. Da a und b teilerfremd zu m sind, existieren Zahlen $\mu, \lambda, \mu', \lambda' \in \mathbb{Z}$ mit $\mu a + \lambda m = \mu' b + \lambda' m = 1$. Somit ergibt sich aus der Darstellung

$$1 = (\mu a + \lambda m)(\mu' b + \lambda' m) = \underbrace{\mu \mu' ab}_{\mu''} + \underbrace{(\mu a \lambda' + \mu' b \lambda + \lambda \lambda' m)}_{\lambda''} m$$

und Korollar 15, dass auch ab teilerfremd zu m ist.

Gilt umgekehrt $\text{ggT}(ab, m) = 1$, so existieren Zahlen $\mu, \lambda \in \mathbb{Z}$ mit $\mu ab + \lambda m = 1$. Mit Korollar 15 folgt sofort $\text{ggT}(a, m) = \text{ggT}(b, m) = 1$. \square

Damit nun eine Abbildung $g : A \rightarrow A$ von der Bauart $g(x) = bx$ injektiv (oder gleichbedeutend, surjektiv) ist, muss es zu jedem Buchstaben $y \in A$ genau einen Buchstaben $x \in A$ mit $bx = y$ geben. Wie der folgende Satz zeigt, ist dies genau dann der Fall, wenn b und m teilerfremd sind.

Satz 19. Seien b, m ganze Zahlen mit $m \geq 1$. Die lineare Kongruenzgleichung $bx \equiv_m y$ besitzt genau dann eine eindeutige Lösung $x \in \{0, \dots, m-1\}$, wenn $\text{ggT}(b, m) = 1$ ist.

Beweis. Angenommen, $\text{ggT}(b, m) = g > 1$. Dann ist mit x auch $x' = x + m/g$ eine Lösung von $bx \equiv_m y$ mit $x \not\equiv_m x'$. Gilt umgekehrt $\text{ggT}(b, m) = 1$, so folgt aus den Kongruenzen

$$bx_1 \equiv_m y$$

und

$$bx_2 \equiv_m y$$

sofort $b(x_1 - x_2) \equiv_m 0$, also $m|b(x_1 - x_2)$. Wegen $\text{ggT}(b, m) = 1$ folgt mit dem Lemma von Euklid $m|(x_1 - x_2)$, also $x_1 \equiv_m x_2$.

Dies zeigt, dass die Abbildung $f : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_m$ mit $f(x) = bx \bmod m$ injektiv ist. Da der Definitions- und der Wertebereich von f die gleiche Mächtigkeit haben, muss f dann auch surjektiv sein. Dies impliziert, dass die Kongruenz $bx \equiv_m y$ für jedes $y \in \mathbb{Z}_m$ lösbar ist. \square

Korollar 20. Im Fall $\text{ggT}(b, m) = 1$ hat die Kongruenz $bx \equiv_m 1$ genau eine Lösung, die das **multiplikative Inverse** von b modulo m genannt und mit $b^{-1} \bmod m$ (oder einfach mit b^{-1}) bezeichnet wird. Die invertierbaren Elemente von \mathbb{Z}_m werden in der Menge

$$\mathbb{Z}_m^* = \{b \in \mathbb{Z}_m \mid \text{ggT}(b, m) = 1\}$$

zusammengefasst.

Korollar 18 zeigt, dass \mathbb{Z}_m^* unter der Operation \odot_m abgeschlossen ist, und mit Korollar 20 folgt, dass $(\mathbb{Z}_m^*, \odot_m)$ eine multiplikative Gruppe bildet. Allgemeiner zeigt man, dass für einen beliebigen Ring $(R, +, \cdot, 0, 1)$ mit Eins die Multiplikation auf der Menge $R^* = \{a \in R \mid \exists b \in R : ab = 1 = ba\}$ aller **Einheiten** von R eine Gruppe $(R^*, \cdot, 1)$ (die so genannte **Einheitengruppe** von R) bildet.

Das multiplikative Inverse von b modulo m ergibt sich aus der linearen Darstellung $\lambda b + \mu m = \text{ggT}(b, m) = 1$ zu $b^{-1} = \lambda \bmod m$. Bei Kenntnis von b^{-1} kann die Kongruenz $bx \equiv_m y$ leicht zu $x = yb^{-1} \bmod m$ gelöst werden. Die folgende Tabelle zeigt die multiplikativen Inversen b^{-1} für alle $b \in \mathbb{Z}_{26}^*$.

b	1	3	5	7	9	11	15	17	19	21	23	25
b^{-1}	1	9	21	15	3	19	7	23	11	5	17	25

Nun lässt sich die additive Chiffre leicht zur affinen Chiffre erweitern.

Definition 21 (affine Chiffre). Bei der **affinen Chiffre** ist $A = B = M = C$ ein beliebiges Alphabet mit $m := \|A\| > 1$ und $K = \mathbb{Z}_m^* \times \mathbb{Z}_m$. Für $k = (b, c) \in K$, $x \in M$ und $y \in C$ gilt

$$E(k, x) = bx + c \quad \text{und} \quad D(k, y) = b^{-1}(y - c).$$

In diesem Fall liefert die Schlüsselkomponente $b = -1$ für jeden Wert von c eine involutorische Chiffrierfunktion $x \mapsto E(b, c; x) = c - x$ (**verschobenes komplementäres**

Alphabet). Wählen wir für c ebenfalls den Wert -1 , so ergibt sich die Chiffrierfunktion $x \mapsto -x - 1$, die auch als **revertiertes Alphabet** bekannt ist. Offenbar ist diese Funktion genau dann echt involutorisch, wenn m gerade ist.

x	A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z
$-x$	A Z Y X W V U T S R Q P O N M L K J I H G F E D C B
$-x - 1$	Z Y X W V U T S R Q P O N M L K J I H G F E D C B A

Als nächstes illustrieren wir die Ver- und Entschlüsselung mit der affinen Chiffre an einem kleinen Beispiel.

Beispiel 22 (affine Chiffre). Sei $A = \{A, \dots, Z\} = B$, also $m = 26$. Weiter sei $k = (9, 2)$, also $b = 9$ und $c = 2$. Um den Klartextbuchstaben $x = F$ zu verschlüsseln, berechnen wir

$$E(k, x) = bx + c = 9F + 2 = V,$$

da der Index von F gleich 5, der von V gleich 21 und $9 \cdot 5 + 2 = 47 \equiv_{26} 21$ ist. Um einen Kryptotextbuchstaben wieder entschlüsseln zu können, benötigen wir das multiplikative Inverse von $b = 9$, das sich wegen

i	r_{i-1}	$= d_{i+1} \cdot r_i + r_{i+1}$	$p_i \cdot 26 +$	$q_i \cdot 9 =$	r_i
0			1 · 26 +	0 · 9 =	26
1	26	= 2 · 9 + 8	0 · 26 +	1 · 9 =	9
2	9	= 1 · 8 + 1	1 · 26 + (-2) · 9 =		8
3	8	= 8 · 1 + 0	(-1) · 26 + 3 · 9 =		1

zu $b^{-1} = q_3 = 3$ ergibt. Damit erhalten wir für den Kryptotextbuchstaben $y = V$ den ursprünglichen Klartextbuchstaben

$$D(k, y) = b^{-1}(y - c) = 3(V - 2) = F$$

zurück, da $3 \cdot 19 = 57 \equiv_{26} 5$ ist. \triangleleft

Eine wichtige Rolle spielt die Funktion

$$\varphi : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N} \quad \text{mit} \quad \varphi(m) = \|\mathbb{Z}_m^*\| = \|\{a \mid 0 \leq a \leq m-1, \text{ggT}(a, m) = 1\}\|,$$

die sogenannte *Eulersche φ -Funktion*.

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
\mathbb{Z}_m^*	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, 3\}$	$\{1, \dots, 4\}$	$\{1, 5\}$	$\{1, \dots, 6\}$	$\{1, 3, 5, 7\}$	$\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$	$\{1, 3, 7, 9\}$
$\varphi(m)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4

Wegen

$$\mathbb{Z}_{p^k} - \mathbb{Z}_{p^k}^* = \{0, p, 2p, \dots, (p^{k-1} - 1)p\}$$

folgt sofort

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^{k-1}(p - 1).$$

Um hieraus für beliebige Zahlen $m \in \mathcal{N}$ eine Formel für $\varphi(m)$ zu erhalten, genügt es, $\varphi(ml)$ im Fall $\text{ggT}(m, l) = 1$ in Abhängigkeit von $\varphi(m)$ und $\varphi(l)$ zu bestimmen. Hierzu betrachten wir die Abbildung $f : \mathbb{Z}_{ml} \rightarrow \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_l$ mit

$$f(x) := (x \bmod m, x \bmod l).$$

Beispiel 23. Sei $m = 5$ und $l = 6$. Dann erhalten wir die Funktion $f : \mathbb{Z}_{30} \rightarrow \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_6$ mit

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	(0, 0)	(1, 1)	(2, 2)	(3, 3)	(4, 4)	(0, 5)	(1, 0)	(2, 1)	(3, 2)	(4, 3)

x	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$f(x)$	(0, 4)	(1, 5)	(2, 0)	(3, 1)	(4, 2)	(0, 3)	(1, 4)	(2, 5)	(3, 0)	(4, 1)

x	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
$f(x)$	(0, 2)	(1, 3)	(2, 4)	(3, 5)	(4, 0)	(0, 1)	(1, 2)	(2, 3)	(3, 4)	(4, 5)

Man beachte, dass f eine Bijektion zwischen \mathbb{Z}_{30} und $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_6$ ist. Zudem fällt auf, dass ein x -Wert genau dann in \mathbb{Z}_{30}^* liegt, wenn der Funktionswert $f(x) = (y, z)$ zu $\mathbb{Z}_5^* \times \mathbb{Z}_6^*$ gehört (die Werte $x \in \mathbb{Z}_{30}^*$, $y \in \mathbb{Z}_5^*$ und $z \in \mathbb{Z}_6^*$ sind **fett** gedruckt). Folglich bildet f die Argumente in \mathbb{Z}_{30}^* bijektiv auf die Werte in $\mathbb{Z}_5^* \times \mathbb{Z}_6^*$ ab. Für f^{-1} erhalten wir somit folgende Tabelle:

f^{-1}	0	1	2	3	4	5
0	0	25	20	15	10	5
1	6	1	26	21	16	11
2	12	7	2	27	22	17
3	18	13	8	3	28	23
4	24	19	14	9	4	29

□

Der Chinesische Restsatz, den wir im nächsten Abschnitt beweisen, besagt, dass f im Fall $\text{ggT}(m, l) = 1$ bijektiv und damit invertierbar ist. Wegen

$$\begin{aligned} \text{ggT}(x, ml) = 1 &\Leftrightarrow \text{ggT}(x, m) = \text{ggT}(x, l) = 1 \\ &\Leftrightarrow \text{ggT}(x \bmod m, m) = \text{ggT}(x \bmod l, l) = 1 \end{aligned}$$

ist daher die Einschränkung \hat{f} von f auf den Bereich \mathbb{Z}_{ml}^* eine Bijektion zwischen \mathbb{Z}_{ml}^* und $\mathbb{Z}_m^* \times \mathbb{Z}_l^*$, d.h. es gilt

$$\varphi(ml) = \|\mathbb{Z}_{ml}^*\| = \|\mathbb{Z}_m^* \times \mathbb{Z}_l^*\| = \|\mathbb{Z}_m^*\| \cdot \|\mathbb{Z}_l^*\| = \varphi(m)\varphi(l).$$

Satz 24. Die Eulersche φ -Funktion ist multiplikativ, d. h. für teilerfremde Zahlen m und l gilt $\varphi(ml) = \varphi(m)\varphi(l)$.

Korollar 25. Sei $m = \prod_{i=1}^l p_i^{k_i}$ die Primfaktorzerlegung von m . Dann gilt

$$\varphi(m) = \prod_{i=1}^l p_i^{k_i-1} (p_i - 1) = m \prod_{i=1}^l (p_i - 1)/p_i.$$

Beweis. Es gilt

$$\varphi(\prod_{i=1}^l p_i^{k_i}) = \prod_{i=1}^l \varphi(p_i^{k_i}) = \prod_{i=1}^l (p_i^{k_i} - p_i^{k_i-1}) = \prod_{i=1}^l p_i^{k_i-1} (p_i - 1).$$

□

Der Chinesische Restsatz

Die beiden linearen Kongruenzen

$$\begin{aligned} x &\equiv_3 0 \\ x &\equiv_6 1 \end{aligned}$$

besitzen je eine Lösung, es gibt aber kein x , das beide Kongruenzen gleichzeitig erfüllt. Der nächste Satz zeigt, dass unter bestimmten Voraussetzungen gemeinsame Lösungen existieren, und wie sie berechnet werden können.

Satz 26 (Chinesischer Restsatz). *Falls m_1, \dots, m_k paarweise teilerfremd sind, dann hat das System*

$$\begin{aligned} x &\equiv_{m_1} b_1 \\ &\vdots \\ x &\equiv_{m_k} b_k \end{aligned} \tag{1.2}$$

genau eine Lösung modulo $m = \prod_{i=1}^k m_i$.

Beweis. Da die Zahl $n_i = m/m_i$ teilerfremd zu m_i ist, existieren Zahlen μ_i und λ_i mit

$$\mu_i n_i + \lambda_i m_i = \text{ggT}(n_i, m_i) = 1.$$

Dann gilt

$$\mu_i n_i \equiv_{m_i} 1$$

und

$$\mu_i n_i \equiv_{m_j} 0$$

für $j \neq i$. Folglich erfüllt $x = \sum_{j=1}^k \mu_j n_j b_j$ die Kongruenzen

$$x \equiv_{m_i} \mu_i n_i b_i \equiv_{m_i} b_i$$

für $i = 1, \dots, k$. Dies zeigt, dass (1.2) lösbar, also die Funktion

$$f : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_k}$$

mit $f(x) = (x \bmod m_1, \dots, x \bmod m_k)$ surjektiv ist. Da der Definitions- und der Wertebereich von f die gleiche Mächtigkeit haben, muss f auch injektiv sein, d.h. (1.2) ist sogar eindeutig lösbar. \square

Man beachte, dass der Beweis des Chinesischen Restsatzes konstruktiv ist und die Lösung x unter Verwendung des erweiterten Euklidschen Algorithmus' effizient berechenbar ist.

1.4 Die Hill-Chiffre

Die von Hill im Jahr 1929 publizierte Chiffre ist eine Erweiterung der multiplikativen Chiffre auf Buchstabenblöcke, d.h. der Klartext wird nicht zeichenweise, sondern blockweise verarbeitet. Sowohl der Klartext- als auch der Kryptotextrum enthält alle Wörter

x über A einer festen Länge l . Als Schlüssel wird eine $(l \times l)$ -Matrix $k = (k_{ij})$ mit Koeffizienten in \mathbb{Z}_m benutzt, die einen Klartextblock $x = x_1 \dots x_l \in A^l$ in den Kryptotextblock $y_1 \dots y_l \in A^l$ transformiert, wobei

$$y_i = x_1 k_{1i} + \dots + x_l k_{li}, \quad i = 1, \dots, l$$

ist (hierbei machen wir von der Buchstabenrechnung Gebrauch). y entsteht also durch Multiplikation von x mit der Schlüsselmatrix k :

$$xk = (x_1, \dots, x_l) \begin{pmatrix} k_{11} & \dots & k_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{l1} & \dots & k_{ll} \end{pmatrix} = (y_1, \dots, y_l)$$

Wir bezeichnen die Menge aller $(l \times l)$ -Matrizen mit Koeffizienten in \mathbb{Z}_m mit $\mathbb{Z}_m^{l \times l}$. Als Schlüssel können nur invertierbare Matrizen k benutzt werden, da sonst der Chiffriervorgang nicht injektiv ist. Eine Matrix $k \in \mathbb{Z}_m^{l \times l}$ ist genau dann invertierbar, wenn die Determinante von k teilerfremd zu m ist (siehe Übungen).

Definition 27 (Determinante). Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und sei $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$. Eine Funktion $f : R^{n \times n} \rightarrow R$ heißt **Determinantenfunktion**, falls sie folgende drei Eigenschaften erfüllt

- f ist **multilinear**, d.h. für jede Matrix $A = (a_1, \dots, a_n) \in R^{n \times n}$ mit Spalten $a_1, \dots, a_n \in (R^n)^T$, jeden Spaltenvektor $b \in (R^n)^T$ und jedes $r \in R$ gilt

$$f(a_1, \dots, ra_i + b, \dots, a_n) = rf(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) + f(a_1, \dots, b, \dots, a_n).$$

- f ist **alternierend**, d.h. im Fall $a_i = a_j$ für $i \neq j$ gilt $f(a_1, \dots, a_n) = 0$.
- f ist **normiert**, d.h. $f(E) = 1$, wobei E die Einheitsmatrix ist.

Tatsächlich ist f durch diese drei Eigenschaften eindeutig festgelegt und wir bezeichnen $f(A)$ wie üblich mit $\det(A)$.

Eine wichtige Eigenschaft der Funktion \det wird durch den Laplaceschen Entwicklungssatz beschrieben. Für $1 \leq i, j \leq n$ sei A_{ij} die durch Streichen der i -ten Zeile und j -ten Spalte aus A hervorgehende Matrix. Dann ist $\det(A) = a_{11}$, falls $n = 1$, und für $n > 1$ ist

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{ij}),$$

wobei $i \in \{1, \dots, n\}$ beliebig wählbar ist (Entwicklung nach der i -ten Zeile). Das Produkt $(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ wird **Cofaktor** genannt und mit $\tilde{a}_{i,j}$.

Für die Dechiffrierung wird die zu k inverse Matrix k^{-1} benötigt, wofür effiziente Algorithmen bekannt sind (Gaußsches Eliminationsverfahren; siehe Übungen).

Satz 28. Sei A ein Alphabet und sei $k \in \mathbb{Z}_m^{l \times l}$ ($l \geq 1$, $m = \|A\|$). Die Abbildung $f : A^l \rightarrow A^l$ mit

$$f(x) = xk,$$

ist genau dann injektiv, wenn $\text{ggT}(\det(k), m) = 1$ ist.

Beweis. Siehe Übungen. □

Definition 29 (Hill-Chiffre). Sei $A = \{a_0, \dots, a_{m-1}\}$ ein beliebiges Alphabet und für eine natürliche Zahl $l \geq 2$ sei $M = C = A^l$. Bei der **Hill-Chiffre** ist $K = \{k \in \mathbb{Z}_m^{l \times l} \mid \text{ggT}(\det(k), m) = 1\}$ und es gilt

$$E(k, x) = xk \quad \text{und} \quad D(k, y) = yk^{-1}.$$

Beispiel 30 (Hill-Chiffre). Benutzen wir zur Chiffrierung von Klartextblöcken der Länge $l = 4$ über dem lateinischen Alphabet A_{lat} die Schlüsselmatrix

$$k = \begin{pmatrix} 11 & 13 & 8 & 21 \\ 24 & 17 & 3 & 25 \\ 18 & 12 & 23 & 17 \\ 6 & 15 & 2 & 15 \end{pmatrix},$$

so erhalten wir beispielsweise für den Klartext **HILL** wegen

$$(\text{HILL}) \begin{pmatrix} 11 & 13 & 8 & 21 \\ 24 & 17 & 3 & 25 \\ 18 & 12 & 23 & 17 \\ 6 & 15 & 2 & 15 \end{pmatrix} = (\text{NERX}) \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned} 11\text{H} + 24\text{I} + 18\text{L} + 6\text{L} &= N \\ 13\text{H} + 17\text{I} + 12\text{L} + 15\text{L} &= E \\ 8\text{H} + 3\text{I} + 23\text{L} + 2\text{L} &= R \\ 21\text{H} + 25\text{I} + 17\text{L} + 15\text{L} &= X \end{aligned}$$

den Kryptotext $E(k, \text{HILL}) = \text{NERX}$. Für die Entschlüsselung wird die inverse Matrix k^{-1} benötigt. Diese wird in den Übungen berechnet. \triangleleft

1.5 Die Vigenère-Chiffre und andere Stromsysteme

Bei der nach dem Franzosen Blaise de Vigenère (1523–1596) benannten Chiffre werden zwar nur einzelne Buchstaben chiffriert, aber je nach Position im Klartext unterschiedlich.

Definition 31 (Vigenère-Chiffre). Sei $A = B$ ein beliebiges Alphabet. Die **Vigenère-Chiffre** chiffriert unter einem Schlüssel $k = k_0 \dots k_{d-1} \in K = A^*$ einen Klartext $x = x_0 \dots x_{n-1}$ beliebiger Länge zu

$$E(k, x) = y_0 \dots y_{n-1}, \quad \text{wobei } y_i = x_i + k_{(i \bmod d)} \text{ ist,}$$

und dechiffriert einen Kryptotext $y = y_0 \dots y_{n-1}$ zu

$$D(k, y) = x_0 \dots x_{n-1}, \quad \text{wobei } x_i = y_i - k_{(i \bmod d)} \text{ ist.}$$

Beispiel 32 (Vigenère-Chiffre). Verwenden wir das lateinische Alphabet A_{lat} als Klartextalphabet und wählen wir als Schlüssel das Wort $k = \text{WIE}$, so ergibt sich für den Klartext **VIGENERE** beispielsweise der Kryptotext

$$\begin{aligned} E(\text{WIE}, \text{VIGENERE}) &= \underbrace{\text{V} + \text{W}}_{\text{R}} \underbrace{\text{I} + \text{I}}_{\text{Q}} \underbrace{\text{G} + \text{E}}_{\text{K}} \underbrace{\text{E} + \text{W}}_{\text{A}} \underbrace{\text{N} + \text{I}}_{\text{V}} \underbrace{\text{E} + \text{E}}_{\text{I}} \underbrace{\text{R} + \text{W}}_{\text{N}} \underbrace{\text{E} + \text{I}}_{\text{M}} \\ &= \text{RQKAVINM} \end{aligned}$$

\triangleleft

Um einen Klartext x zu verschlüsseln, wird also das Schlüsselwort $k = k_0 \dots k_{d-1}$ so oft wiederholt, bis der dabei entstehende **Schlüsselstrom** $\hat{k} = k_0, k_1, \dots, k_{d-1}, k_0 \dots$ die Länge von x erreicht. Dann werden x und \hat{k} zeichenweise addiert, um den zugehörigen Kryptotext y zu bilden. Aus diesem kann der ursprüngliche Klartext x zurückgewonnen werden, indem man den Schlüsselstrom \hat{k} wieder subtrahiert.

Beispiel 33. Vigenère-Chiffre*Chiffrierung:*

$$\begin{array}{l} \text{VIGENERE } (\text{Klartext } x) \\ + \underline{\text{WIEWIEWI}} \quad (\text{Schlüsselstrom } \hat{k}) \\ \hline \text{RQKAVINM } (\text{Kryptotext } y) \end{array}$$

Dechiffrierung:

$$\begin{array}{l} \text{RQKAVINM } (\text{Kryptotext } y) \\ - \underline{\text{WIEWIEWI}} \quad (\text{Schlüsselstrom } \hat{k}) \\ \hline \text{VIGENERE } (\text{Klartext } x) \end{array}$$

△

Die Chiffrierarbeit lässt sich durch Benutzung einer Additionstabelle erleichtern (auch als **Vigenère-Tableau** bekannt).

+	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
A	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
B	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A
C	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B
D	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C
E	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D
F	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E
G	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F
H	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G
I	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H
J	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I
K	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
L	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
M	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
N	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
O	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
P	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
Q	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
R	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
S	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
T	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
U	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
V	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
W	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
X	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
Y	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
Z	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y

Um eine involutorische Chiffre zu erhalten, schlug Sir Francis Beaufort, ein Admiral der britischen Marine, vor, den Schlüsselstrom nicht auf den Klartext zu addieren, sondern letzteren von ersterem zu subtrahieren.

Beispiel 34 (Beaufort-Chiffre). Verschlüsseln wir den Klartext BEAUFORT beispielsweise unter dem Schlüsselwort $k = \text{WIE}$, so erhalten wir den Kryptotext XEQNSNB. Eine erneute Verschlüsselung liefert wieder den Klartext BEAUFORT:

Chiffrierung:

$$\begin{array}{l} \underline{\text{WIEWIEWI}} \quad (\text{Schlüsselstrom}) \\ - \text{BEAUFORT} \quad (\text{Klartext}) \\ \hline \text{VEECDQFP} \quad (\text{Kryptotext}) \end{array}$$

Dechiffrierung:

$$\begin{array}{l} \underline{\text{WIEWIEWI}} \quad (\text{Schlüsselstrom}) \\ - \text{VEECDQFP} \quad (\text{Kryptotext}) \\ \hline \text{BEAUFORT} \quad (\text{Klartext}) \end{array}$$

△

Bei den bisher betrachteten Chiffren wird aus einem Schlüsselwort $k = k_0 \dots k_{d-1}$ ein **periodischer Schlüsselstrom** $\hat{k} = \hat{k}_0 \dots \hat{k}_{n-1}$ erzeugt, das heißt, es gilt $\hat{k}_i = \hat{k}_{i+d}$ für alle $i = 0, \dots, n-d-1$. Da eine kleine Periode das Brechen der Chiffre erleichtert, sollte entweder ein Schlüsselstrom mit sehr großer Periode oder noch besser ein **fortlaufender Schlüsselstrom** zur Chiffrierung benutzt werden. Ein solcher nichtperiodischer Schlüsselstrom lässt sich beispielsweise ohne großen Aufwand erzeugen, indem man an das Schlüsselwort den Klartext oder den Kryptotext anhängt (sogenannte **Autokey-Chiffrierung**).[†]

Beispiel 35 (Autokey-Chiffre). *Benutzen wir wieder das Schlüsselwort WIE, um den Schlüsselstrom durch Anhängen des Klar- bzw. Kryptotextes zu erzeugen, so erhalten wir für den Klartext VIGENERE folgende Kryptotexte:*

Klartext-Schlüsselstrom:	Kryptotext-Schlüsselstrom:
VIGENERE (Klartext)	VIGENERE (Klartext)
+ <u>WIEVIGEN</u> (Schlüsselstrom)	+ <u>WIERQKV</u> (Schlüsselstrom)
RQKZVKVR (Kryptotext)	RQKVDOMH (Kryptotext)

□

Auch die Dechiffrierung ist in beiden Fällen einfach. Bei der ersten Alternative kann der Empfänger durch Subtraktion des Schlüsselworts den Anfang des Klartextes bilden und gleichzeitig den Schlüsselstrom verlängern, so dass sich auf diese Weise Stück für Stück der gesamte Kryptotext entschlüsseln lässt. Noch einfacher gestaltet sich die Dechiffrierung im zweiten Fall, da sich hier der Schlüsselstrom vom Kryptotext nur durch das vorangestellte Schlüsselwort unterscheidet.

1.6 Der One-Time-Pad

Es besteht auch die Möglichkeit, eine Textstelle in einem Buch als Schlüssel zu vereinbaren und den dort beginnenden Text als Schlüsselstrom zu benutzen (Lauftextverschlüsselung). Besser ist es jedoch, aus einem relativ kurzen Schlüssel einen möglichst zufällig erscheinenden Schlüsselstrom zu erzeugen. Hierzu können beispielsweise Pseudozufallsgeneratoren eingesetzt werden. Absolute Sicherheit wird dagegen erreicht, wenn der Schlüsselstrom rein zufällig erzeugt und nach einmaliger Benutzung wieder vernichtet wird.[‡] Ein solcher „Wegwerfschlüssel“ (One-time-pad oder One-time-tape, im Deutschen auch als **individueller Schlüssel** bezeichnet) lässt sich allerdings nur mit großem Aufwand generieren und verteilen, weshalb diese Chiffre nur wenig praktikabel ist. Dennoch wurde diese Methode beispielsweise beim „heißen Draht“, der 1963 eingerichteten, direkten Fernschreibverbindung zwischen dem Weißen Haus in Washington und dem Kreml in Moskau, angewandt.

Beispiel 36 (One-time-pad). *Sei $A = \{a_0, \dots, a_{m-1}\}$ ein beliebiges Klartextalphabet. Um einen Klartext $x = x_0 \dots x_{n-1}$ zu verschlüsseln, wird auf jeden Klartextbuchstaben x_i*

[†]Die Idee, den Schlüsselstrom durch Anhängen des Klartextes an ein Schlüsselwort zu bilden, stammt von Vigenère, während er mit der Erfindung der nach ihm benannten Vigenère-Chiffre „nichts zu tun“ hatte. Diese wird vielmehr Giovan Batista Belaso (1553) zugeschrieben.

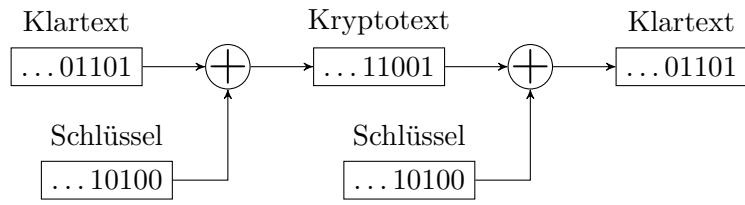
[‡] Diese Art der Schlüsselerzeugung schlug der amerikanische Major Joseph O. Mauborgne im Jahr 1918 vor, nachdem ihm ein von Gilbert S. Vernam für den Fernschreibverkehr entwickeltes Chiffriersystem vorgestellt wurde.

ein neuer, zufällig generierter Schlüsselbuchstabe k_i addiert,

$$y = y_0 \dots y_{n-1}, \text{ wobei } y_i = x_i + k_i.$$

△

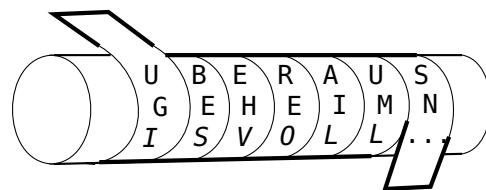
Der Klartext wird also wie bei einer additiven Chiffre verschlüsselt, nur dass der Schlüssel nach einmaligem Gebrauch gewechselt wird. Dies entspricht dem Gebrauch einer Vigenère-Chiffre, falls als Schlüssel ein zufällig gewähltes Wort von der Länge des Klartextes benutzt wird. Wie diese ist der One-time-pad im Binärfall also involutorisch.



1.7 Klassifikation von Kryptosystemen

Bei den bisher betrachteten Chiffrierfunktionen handelt es sich um **Substitutionen**, d.h. sie erzeugen den Kryptotext aus dem Klartext, indem sie Klartextzeichen – einzeln oder in Gruppen – durch Kryptotextzeichen ersetzen. Dagegen verändern **Transpositionen** lediglich die Reihenfolge der einzelnen Klartextzeichen.

Beispiel 37 (Skytale-Chiffre). *Die älteste bekannte Verschlüsselungstechnik stammt aus der Antike und wurde im 5. Jahrhundert v. Chr. von den Spartanern entwickelt: Der Sender wickelt einen Papierstreifen spiralförmig um einen Holzstab (die sogenannte **Skytale**) und beschreibt ihn in Längsrichtung mit der Geheimbotschaft.*



ÜBERAUS GEHEIMNISVOLL ...
 ~ ÜGI ... BES ... EHV ... REO ... AIL ... UML ... SN ...

Besitzt der Empfänger eines auf diese Weise beschrifteten Papierstreifens einen Stab mit dem gleichen Umfang, so kann er ihn auf dieselbe Art wieder entziffern. △

Als Schlüssel fungiert hier also der Stabumfang bzw. die Anzahl k der Zeilen, mit denen der Stab beschrieben wird. Findet der gesamte Klartext x auf der Skytale Platz und beträgt seine Länge ein Vielfaches von k , so geht x bei der Chiffrierung in den Kryptotext

$$\begin{aligned} E(k, x_1 \dots x_{km}) &= \\ &x_1 x_{m+1} x_{2m+1} \dots x_{(k-1)m+1} x_2 x_{m+2} x_{2m+2} \dots x_{(k-1)m+2} \dots x_m x_{2m} x_{3m} \dots x_{km} \end{aligned}$$

über. Dasselbe Resultat stellt sich ein, wenn wir x zeilenweise in eine $k \times m$ -Matrix schreiben und spaltenweise wieder auslesen (sogenannte **Spaltentransposition**):

$$\begin{array}{cccc} \hline x_1 & x_2 & \cdots & x_m \\ x_{m+1} & x_{m+2} & \cdots & x_{2m} \\ x_{2m+1} & x_{2m+2} & \cdots & x_{3m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{(k-1)m+1} & x_{(k-1)m+2} & \cdots & x_{km} \\ \hline \end{array}$$

Ist die Klartextlänge kein Vielfaches von k , so kann der Klartext durch das Ein- bzw. Anfügen von sogenannten **Blendern** (Füllzeichen) verlängert werden. Damit der Empfänger diese Füllzeichen nach der Entschlüsselung wieder entfernen kann, ist lediglich darauf zu achten, dass sie im Klartext leicht als solche erkennbar sind.

Von der Methode, die letzte *Zeile* nur zum Teil zu füllen, ist dagegen abzuraten. In diesem Fall würden nämlich auf dem abgewickelten Papierstreifen Lücken entstehen, aus deren Anordnung man Schlüsse auf den benutzten Schlüssel k ziehen könnte. Andererseits ist nichts dagegen einzuwenden, dass der Sender die letzte *Spalte* der Skytale nur zum Teil beschriftet.

Eng verwandt mit der Skytale-Chiffre ist die Zick-Zack-Transposition.

Beispiel 38. Bei Ausführung einer **Zick-Zack-Transposition** wird der Klartext in eine Zick-Zack-Linie geschrieben und horizontal wieder ausgelesen. Die Höhe der Zick-Zack-Linie kann als Schlüssel vereinbart werden.

Z	Z	L	E	
I	K	A	K	I
C	C			N

ZICKZACKLINIE \rightsquigarrow ZZLEIKAKIICCN

△

Bei einer Zick-Zack-Transposition werden Zeichen im vorderen Klartextbereich bis fast ans Ende des Kryptotextes verlagert und umgekehrt. Dies hat den Nachteil, dass für die Generierung des Kryptotextes der gesamte Klartext gepuffert werden muss. Daher werden meist **Blocktranspositionen** verwendet, bei denen die Zeichen nur innerhalb fester Blockgrenzen transponiert werden.

Definition 39 (Blocktranspositionschiffre). Sei $A = B$ ein beliebiges Alphabet und für eine natürliche Zahl $l \geq 2$ sei $M = C = A^l$. Bei einer **Blocktranspositionschiffre** wird durch jeden Schlüssel $k \in K$ eine Permutation π beschrieben, so dass für alle Zeichenfolgen $x_1 \cdots x_l \in M$ und $y_1 \cdots y_l \in C$

$$E(k, x_1 \cdots x_l) = x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(l)}$$

und

$$D(k, y_1 \cdots y_l) = y_{\pi^{-1}(1)} \cdots y_{\pi^{-1}(l)}$$

gilt.

Eine Blocktransposition mit Blocklänge l lässt sich durch eine Permutation $\pi \in S_l$ (also auf der Menge $\{1, \dots, l\}$) beschreiben.

Beispiel 40. Eine Skytale, die mit 4 Zeilen der Länge 6 beschrieben wird, realisiert beispielsweise folgende Blocktransposition:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$\pi(i)$	1	7	13	19	2	8	14	20	3	9	15	21	4	10	16	22	5	11	17	23	6	12	18	24

△

Für die Entschlüsselung muss die zu π **inverse Permutation** π^{-1} benutzt werden. Wird π durch Zyklen $(i_1 \ i_2 \ i_3 \ \dots \ i_n)$ dargestellt, wobei i_1 auf i_2 , i_2 auf i_3 usw. und schließlich i_3 auf i_1 abgebildet wird, so ist π^{-1} sehr leicht zu bestimmen.

Beispiel 41.

i	1	2	3	4	5	6
$\pi(i)$	4	6	1	3	5	2

i	1	2	3	4	5	6
$\pi^{-1}(i)$	3	6	4	1	5	2

Obiges π hat beispielsweise die Zyklendarstellung

$$\pi = (1 \ 4 \ 3) \ (2 \ 6) \ (5) \text{ oder } \pi = (1 \ 4 \ 3) \ (2 \ 6),$$

wenn, wie allgemein üblich, Einerzyklen weggelassen werden. Daraus erhalten wir unmittelbar π^{-1} zu

$$\pi^{-1} = (3 \ 4 \ 1) \ (6 \ 2) \text{ oder } (1 \ 3 \ 4) \ (2 \ 6),$$

wenn wir jeden Zyklus mit seinem kleinsten Element beginnen lassen und die Zyklen nach der Größe dieser Elemente anordnen. □

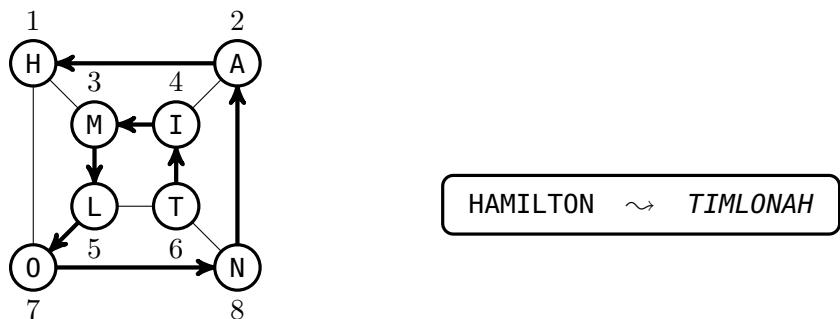
Beispiel 42. Bei der **Matrix-Transposition** wird der Klartext zeilenweise in eine $k \times m$ -Matrix eingelesen und der Kryptotext spaltenweise gemäß einer Spaltenpermutation π , die als Schlüssel dient, wieder ausgelesen. Für $\pi = (1 \ 4 \ 3) \ (2 \ 6)$ wird also zuerst Spalte $\pi(1) = 4$, dann Spalte $\pi(2) = 6$ und danach Spalte $\pi(3) = 1$ usw. und zuletzt Spalte $\pi(6) = 2$ ausgelesen.

3	6	4	1	5	2
D	I	E	S	E	R
K	L	A	R	T	E
X	T	I	S	T	N
I	C	H	T	S	E
H	R	L	A	N	G

DIESER KLARTEXT IST NICHT SEHR LANG
 ~> SRSTA RENEG DKXIH EAIHL ETTSN ILTCR

△

Beispiel 43. Bei der **Weg-Transposition** wird als Schlüssel eine Hamiltonlinie in einem Graphen mit den Knoten $1, \dots, l$ benutzt. (Eine Hamiltonlinie ist eine Anordnung aller Knoten, in der je zwei aufeinanderfolgende Knoten durch eine Kante verbunden sind.) Der Klartextblock $x_1 \dots x_l$ wird gemäß der Knotennummerierung in den Graphen eingelesen und der zugehörige Kryptotext entlang der Hamiltonlinie wieder ausgelesen.



△

Es ist leicht zu sehen, dass sich jede Blocktransposition durch eine Hamiltonlinie in einem geeigneten Graphen realisieren lässt. Der Vorteil, eine Hamiltonlinie als Schlüssel zu benutzen, besteht offenbar darin, dass man sich den Verlauf einer Hamiltonlinie bildhaft vorstellen und daher besser einprägen kann als eine Zahlenfolge.

Sehr beliebt ist auch die Methode, eine Permutationen in Form eines **Schlüsselworts** (oder einer aus mehreren Wörtern bestehenden **Schlüsselphrase**) im Gedächtnis zu behalten. Aus einem solchen Schlüsselwort lässt sich die zugehörige Permutation σ leicht rekonstruieren, indem man das Wort auf Papier schreibt und in der Zeile darunter für jeden einzelnen Buchstaben seine Position i innerhalb des Wortes vermerkt.

Schlüsselwort für σ	C A E S A R
i	1 2 3 4 5 6
$\sigma(i)$	3 1 4 6 2 5
Zyklendarstellung von σ	(1 3 4 6 5 2)

DIE BLOCKLAENGE IST SECHS \leadsto
EDBOIL LCANKE IGSSET EXCSYH

Die Werte $\sigma(i)$, die σ auf diesen Nummern annimmt, werden nun dadurch ermittelt, dass man die Schlüsselwort-Buchstaben in alphabetischer Reihenfolge durchzählt. Dabei werden mehrfach vorkommende Buchstaben gemäß ihrer Position im Schlüsselwort an die Reihe genommen. Alternativ kann man auch alle im Schlüsselwort wiederholt vorkommenden Buchstaben streichen, was im Fall des Schlüsselworts **CAESAR** auf eine Blocklänge von 5 führen würde.

Wir wenden uns nun der Klassifikation von Substitutionschiffen zu. Ein wichtiges Unterscheidungsmerkmal ist z.B. die Länge der Klartexteinheiten, auf denen die Chiffre operiert.

Monografische Substitutionen ersetzen Einzelbuchstaben.

Polygrafische Substitutionen ersetzen dagegen aus mehreren Zeichen bestehende Klartextsegmente auf einmal.

Eine polygrafische Substitution, die auf Buchstabenpaaren operiert, wird **digrafisch** genannt. Das älteste bekannte polygrafische Chiffrierverfahren wurde von Giovanni Porta im Jahr 1563 veröffentlicht. Dabei werden je zwei aufeinanderfolgende Klartextbuchstaben durch ein einzelnes Kryptotextzeichen ersetzt.

Beispiel 44. Bei der **Porta-Chiffre** werden 400 (!) unterschiedliche von Porta für diesen Zweck entworfene Kryptotextzeichen verwendet. Diese sind in einer 20×20 -Matrix $M = (y_{ij})$ angeordnet, deren Zeilen und Spalten mit den 20 Klartextbuchstaben **A, ..., I, L, ..., T, V, Z** indiziert sind. Zur Ersetzung des Buchstabenpaares $a_i a_j$ wird das in Zeile i und Spalte j befindliche Kryptotextzeichen

$$E(M, a_i a_j) = y_{ij}$$

benutzt. □

Eine Substitution heißt **monopartit**, falls sie die Klartextsegmente durch Einzelzeichen ersetzt, sonst **multipartit**. Wird der Kryptotext aus Buchstabenpaaren zusammengesetzt, so spricht man von einer **bipartiten** Substitution.

Ein frühes (monografisches) Beispiel einer bipartiten Chiffriermethode geht auf Polybios (circa 200 – 120 v. Chr.) zurück:

	0	1	2	3	4
0	A	B	C	D	E
1	F	G	H	I	J
2	K	L	M	N	O
3	P	Q	R	S	T
4	U	V	W	X/Y	Z

POLYBIOS ~ 30 24 21 43 01 13 24 33

Bei der **Polybios-Chiffre** dient eine 5×5 -Matrix, die aus sämtlichen Klartextbuchstaben gebildet wird, als Schlüssel.[§] Die Verschlüsselung des Klartextes erfolgt buchstabenweise, indem man einen in Zeile i und Spalte j eingetragenen Klartextbuchstaben durch das Koordinatenpaar ij ersetzt. Der Kryptotextrum besteht also aus den Ziffernpaaren $\{00, 01, \dots, 44\}$.

Die Frage, ob bei der Ersetzung der einzelnen Segmente des Klartextes eine einheitliche Strategie verfolgt wird oder ob diese von Segment zu Segment verändert wird, führt uns auf ein weiteres wichtiges Unterscheidungsmerkmal bei Substitutionen.

Monoalphabetische Substitutionen ersetzen die einzelnen Klartextsegment unabhängig von ihrer Position im Klartext.

Polyalphabetische Substitutionen verwenden dagegen eine variable Ersetzungsregel, auf die sich auch die bereits verarbeiteten Klartextsegmente auswirken.

Die Bezeichnung „monoalphabetisch“ bringt zum Ausdruck, dass der Ersetzungsmechanismus auf einem einzelnen Alphabet beruht (sofern wir das Klartextalphabet als bekannt voraussetzen). Die von Caesar benutzte Chiffriermethode kann beispielsweise vollständig durch Angabe des Ersetzungsalphabets

$$\{D, E, F, G, W, \dots, Y, Z, A, B, C\}$$

beschrieben werden. Auch im Fall, dass nicht einzelne Zeichen, sondern ganze Buchstabengruppen auf einmal ersetzt werden, genügt im Prinzip ein einzelnes Alphabet zur Beschreibung. Hierzu sortiert man die Klartexteinheiten, auf denen der Ersetzungsmechanismus operiert, und bildet die Folge (sprich: das Alphabet) der zugeordneten Kryptotextsegmente.

Monoalphabetische Chiffrierverfahren ersetzen meist Texteinheiten einer festen Länge $l \geq 1$ durch Kryptotextsegmente derselben Länge.

Definition 45 (Blockchiffre). Sei A ein beliebiges Alphabet und es gelte $M = C = A^l$, $l \geq 1$. Eine **Blockchiffre** realisiert für jeden Schlüssel $k \in K$ eine bijektive Abbildung g auf A^l und es gilt

$$E(k, x) = g(x) \text{ und } D(k, y) = g^{-1}(y)$$

für alle $x \in M$ und $y \in C$. Im Fall $l = 1$ spricht man auch von einer **einfachen Substitutionschiffre**.

Polyalphabetische Substitutionen greifen im Wechsel auf verschiedene Ersetzungsalphabete zurück, so dass unterschiedliche Vorkommen eines Zeichens (oder einer Zeichenkette) auch auf unterschiedliche Art ersetzt werden können. Welches Ersetzungsalphabet wann an der Reihe ist, wird dabei in Abhängigkeit von der Länge oder der Gestalt des bereits verarbeiteten Klartextes bestimmt.

[§]Da nur 25 Plätze zur Verfügung stehen, muss bei Benutzung des lateinischen Alphabets entweder ein Buchstabe weggelassen oder ein Platz mit zwei Buchstaben besetzt werden.

Fast alle polyalphabetischen Chiffrierverfahren operieren – genau wie monoalphabetische Substitutionen – auf Klartextblöcken einer festen Länge l , die sie in Kryptotextblöcke einer festen Länge l' überführen, wobei meist $l = l'$ ist. Da diese Blöcke jedoch vergleichsweise kurz sind, kann der Klartext der Chiffrierfunktion ungepuffert zugeführt werden. Man nennt die einzelnen Klartextblöcke in diesem Zusammenhang auch nicht ‚Blöcke‘ sondern ‚Zeichen‘ und spricht von **sequentiellen Chiffren** oder von **Stromchiffren**.

Definition 46 (Stromchiffre). Sei A ein beliebiges Alphabet und sei $M = C = A^l$ für eine natürliche Zahl $l \geq 1$. Weiterhin seien K und \hat{K} Schlüsselräume. Eine **Stromchiffre** wird durch eine Verschlüsselungsfunktion $E : \hat{K} \times M \rightarrow C$ und einen Schlüsselstromgenerator $g : K \times A^* \rightarrow \hat{K}$ beschrieben. Der Generator g erzeugt aus einem externen Schlüssel $k \in K$ für einen Klartext $x = x_0 \dots x_{n-1}$, $x_i \in M$, eine Folge $\hat{k}_0, \dots, \hat{k}_{n-1}$ von internen Schlüsseln $\hat{k}_i = g(k, x_0 \dots x_{i-1}) \in \hat{K}$, unter denen x in den Kryptotext

$$E_g(k, x) = E(\hat{k}_0, x_0) \dots E(\hat{k}_{n-1}, x_{n-1})$$

überführt wird.

Der interne Schlüsselraum kann also wie bei der Blockchiffre eine maximale Größe von $(m^l)!$ annehmen (im häufigen Spezialfall $l = 1$ also $m!$). Die Aufgabe des Schlüsselstromgenerators g besteht darin, aus dem externen Schlüssel k und dem bereits verarbeiteten Klartext $x_0 \dots x_{i-1}$ den aktuellen internen Schlüssel \hat{k}_i zu berechnen. Die bisher betrachteten Stromchiffren benutzen z.B. die folgenden Schlüsselstromgeneratoren.

Stromchiffre	Chiffrierfunktionen	Schlüsselstromgenerator
Vigenère	$E(\hat{k}, x) = x + \hat{k}$	$g(k_0 \dots k_{d-1}, x_0 \dots x_{i-1}) = k_{(i \bmod m)}$
Beaufort	$E(\hat{k}, x) = \hat{k} - x$	$g(k_0 \dots k_{d-1}, x_0 \dots x_{i-1}) = k_{(i \bmod m)}$
Autokey mit Klartext- Schlüsselstrom	$E(\hat{k}, x) = x + \hat{k}$	$g(k_0 \dots k_{d-1}, x_0 \dots x_{i-1}) = \begin{cases} k_i, & i < d \\ x_{i-d}, & i \geq d \end{cases}$
Autokey mit Kryptotext- Schlüsselstrom	$E(\hat{k}, x) = x + \hat{k}$	$g(k_0 \dots k_{d-1}, x_0 \dots x_{i-1}) = \begin{cases} k_i, & i < d \\ y_{i-d}, & i \geq d \end{cases}$ $= k_{(i \bmod d)} + \sum_{j=1}^{\lfloor i/d \rfloor} x_{i-jd}$

Bei der Vigenère- und Beaufortchiffre hängt der Schlüsselstrom nicht vom Klartext, sondern nur vom externen Schlüssel k ab, d.h. sie sind **synchron**. Die Autokey-Chiffren sind dagegen **asynchron** (und aperiodisch).