

Vorlesungsskript

# Einführung in die Kryptologie

Wintersemester 2017/18

Prof. Dr. Johannes Köbler  
Humboldt-Universität zu Berlin  
Lehrstuhl Komplexität und Kryptografie

*26. Oktober 2017*

# Inhaltsverzeichnis

|          |                              |          |
|----------|------------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>Klassische Verfahren</b>  | <b>1</b> |
| 1.1      | Einführung . . . . .         | 1        |
| 1.2      | Kryptosysteme . . . . .      | 2        |
| 1.3      | Die affine Chiffre . . . . . | 3        |
| 1.4      | Die Hill-Chiffre . . . . .   | 11       |



# 1 Klassische Verfahren

## 1.1 Einführung

Kryptosysteme (Verschlüsselungsverfahren) dienen der Geheimhaltung von Nachrichten bzw. Daten. Hierzu gibt es auch andere Methoden wie z.B.

**Physikalische Maßnahmen:** Tresor etc.

**Organisatorische Maßnahmen:** einsamer Waldspaziergang etc.

**Steganografische Maßnahmen:** unsichtbare Tinte etc.

Andererseits können durch kryptografische Verfahren weitere **Schutzziele** realisiert werden.

- *Vertraulichkeit*
  - Geheimhaltung
  - Anonymität (z.B. Mobiltelefon)
  - Unbeobachtbarkeit (von Transaktionen)
- *Integrität*
  - von Nachrichten und Daten
- *Zurechenbarkeit*
  - Authentikation
  - Unabstreitbarkeit
  - Identifizierung
- *Verfügbarkeit*
  - von Daten
  - von Rechenressourcen
  - von Informationsdienstleistungen

In das Umfeld der Kryptografie fallen auch die folgenden Begriffe.

**Kryptografie:** Lehre von der Geheimhaltung von Informationen durch die Verschlüsselung von Daten. Im weiteren Sinne: Wissenschaft von der Übermittlung, Speicherung und Verarbeitung von Daten in einer von potentiellen Gegnern bedrohten Umgebung.

**Kryptoanalysis:** Erforschung der Methoden eines unbefugten Angriffs gegen ein Kryptoverfahren (Zweck: Vereitelung der mit seinem Einsatz verfolgten Ziele)

**Kryptoanalyse:** Analyse eines Kryptoverfahrens zum Zweck der Bewertung seiner kryptografischen Stärken bzw. Schwächen.

**Kryptologie:** Wissenschaft vom Entwurf, der Anwendung und der Analyse von kryptografischen Verfahren (umfasst Kryptografie und Kryptoanalyse).

## 1.2 Kryptosysteme

Es ist wichtig, Kryptosysteme von Codesystemen zu unterscheiden.

### Codesysteme

- operieren auf semantischen Einheiten,
- starre Festlegung, welche Zeichenfolge wie zu ersetzen ist.

**Beispiel 1** (Ausschnitt aus einem Codebuch der deutschen Luftwaffe).

---

|            |   |
|------------|---|
| <b>xve</b> | <i>Bis auf weiteres Wettermeldung gemäß Funkbefehl testen</i> |
| <b>yde</b> | <i>Frage</i>  |
| <b>sLk</b> | <i>Befehl</i>   |
| <b>fin</b> | <i>beendet</i>  |
| <b>eom</b> | <i>eigene Maschinen</i>                                       |

---

◁

### Kryptosysteme

- operieren auf syntaktischen Einheiten,
- flexibler Mechanismus durch Schlüsselvereinbarung

**Definition 2 (Alphabet).** Ein **Alphabet**  $A = \{a_0, \dots, a_{m-1}\}$  ist eine geordnete endliche Menge von **Zeichen**  $a_i$ . Eine Folge  $x = x_1 \dots x_n \in A^n$  heißt **Wort** (der **Länge**  $n$ ). Die Menge aller Wörter über dem Alphabet  $A$  ist  $A^* = \bigcup_{n \geq 0} A^n$ .

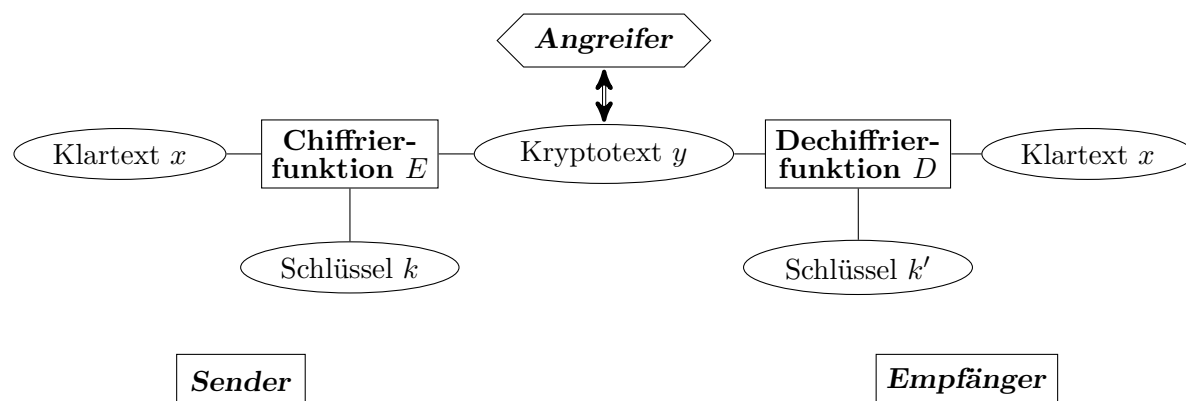
**Beispiel 3.** Das **lateinische Alphabet**  $A_{\text{lat}}$  enthält die 26 Buchstaben **A, ..., Z**. Bei der Abfassung von Klartexten wurde meist auf den Gebrauch von Interpunktions- und Leerzeichen sowie auf Groß- und Kleinschreibung verzichtet ( $\leadsto$  Verringerung der Redundanz im Klartext). ◁

**Definition 4 (Kryptosystem).** Ein **Kryptosystem** wird durch folgende Komponenten beschrieben:

- $A$ , das **Klartextalphabet**,
- $B$ , das **Kryptotextalphabet**,
- $K$ , der **Schlüsselraum** (key space),
- $M \subseteq A^*$ , der **Klartextraum** (message space),
- $C \subseteq B^*$ , der **Kryptotextraum** (ciphertext space),
- $E : K \times M \rightarrow C$ , die **Verschlüsselungsfunktion** (encryption function),
- $D : K \times C \rightarrow M$ , die **Entschlüsselungsfunktion** (decryption function) und
- $S \subseteq K \times K$ , eine Menge von Schlüsselpaaren  $(k, k')$  mit der Eigenschaft, dass für jeden Klartext  $x \in M$  folgende Beziehung gilt:

$$D(k', E(k, x)) = x \quad (1.1)$$

Bei symmetrischen Kryptosystemen ist  $S = \{(k, k) \mid k \in K\}$ , weshalb wir in diesem Fall auf die Angabe von  $S$  verzichten können.



Zu jedem Schlüssel  $k \in K$  korrespondiert also eine **Chiffrierfunktion**  $E_k : x \mapsto E(k, x)$  und eine **Dechiffrierfunktion**  $D_k : y \mapsto D(k, y)$ . Die Gesamtheit dieser Abbildungen wird auch **Chiffre** (englisch *cipher*) genannt. (Daneben wird der Begriff „Chiffre“ auch als Bezeichnung für einzelne Kryptotextzeichen oder kleinere Kryptotextsequenzen verwendet.)

**Lemma 5.** Für jedes Paar  $(k, k') \in S$  ist die Chiffrierfunktion  $E_k$  injektiv.

*Beweis.* Angenommen, für zwei unterschiedliche Klartexte  $x_1 \neq x_2$  ist  $E(k, x_1) = E(k, x_2)$ . Dann folgt

$$D(k', E(k, x_1)) = D(k', E(k, x_2)) \stackrel{(1.1)}{=} x_2 \neq x_1,$$

im Widerspruch zu (1.1). □

### 1.3 Die affine Chiffre

Die Moduloarithmetik erlaubt es uns, das Klartextalphabet mit einer Addition und Multiplikation auszustatten.

**Definition 6 (teilt-Relation, modulare Kongruenz).** Seien  $a, b, m$  ganze Zahlen mit  $m \geq 1$ . Die Zahl  $a$  **teilt**  $b$  (kurz:  $a|b$ ), falls ein  $d \in \mathbb{Z}$  existiert mit  $b = ad$ . Teilt  $m$  die Differenz  $a - b$ , so schreiben wir hierfür

$$a \equiv_m b$$

(in Worten:  $a$  ist **kongruent** zu  $b$  modulo  $m$ ). Weiterhin bezeichne

$$a \bmod m = \min\{a - dm \geq 0 \mid d \in \mathbb{Z}\}$$

den bei der Ganzzahldivision von  $a$  durch  $m$  auftretenden **Rest**, also diejenige ganze Zahl  $r \in \{0, \dots, m-1\}$ , für die eine ganze Zahl  $d \in \mathbb{Z}$  existiert mit  $a = dm + r$ .

Die auf  $\mathbb{Z}$  definierten Operationen

$$a \oplus_m b := (a + b) \bmod m$$

und

$$a \odot_m b := ab \bmod m.$$

Tabelle 1.1: Werte der additiven Chiffrierfunktion ROT13 (Schlüssel  $k = 13$ ).

| $x$        | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
|------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $E(13, x)$ | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |

sind abgeschlossen auf  $\mathbb{Z}_m = \{0, \dots, m-1\}$  und bilden auf dieser Menge einen kommutativen Ring mit Einselement, den sogenannten **Restklassenring** modulo  $m$ . Für  $a \oplus_m -b$  schreiben wir auch  $a \ominus_m b$ .

Durch Identifikation der Buchstaben  $a_i$  mit ihren Indizes können wir die auf  $\mathbb{Z}_m$  definierten Rechenoperationen auf Buchstaben übertragen.

**Definition 7 (Buchstabenrechnung).** Sei  $A = \{a_0, \dots, a_{m-1}\}$  ein Alphabet. Für Indizes  $i, j \in \{0, \dots, m-1\}$  und eine ganze Zahl  $z \in \mathbb{Z}$  ist

$$\begin{aligned} a_i + a_j &= a_{i \oplus_m j}, & a_i - a_j &= a_{i \ominus_m j}, & a_i a_j &= a_{i \odot_m j}, \\ a_i + z &= a_{i \oplus_m z}, & a_i - z &= a_{i \ominus_m z}, & z a_j &= a_{z \odot_m j}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Notation lässt sich die Verschiebechiffre, die auch als additive Chiffre bezeichnet wird, leicht beschreiben.

**Definition 8 (additive Chiffre).** Bei der **additiven Chiffre** ist  $A = B = M = C$  ein beliebiges Alphabet mit  $m := \|A\| > 1$  und  $K = \{1, \dots, m-1\}$ . Für  $k \in K$ ,  $x \in M$  und  $y \in C$  gilt

$$E(k, x) = x + k \quad \text{und} \quad D(c, y) = y - k.$$

Im Fall des lateinischen Alphabets führt der Schlüssel  $k = 13$  auf eine interessante Chiffrierfunktion, die in UNIX-Umgebungen auch unter der Bezeichnung ROT13 bekannt ist (siehe Tabelle 1.1). Natürlich kann mit dieser Substitution nicht ernsthaft die Vertraulichkeit von Nachrichten geschützt werden. Vielmehr soll durch sie ein unbeabsichtigtes Mitlesen – etwa von Rätsellösungen – verhindert werden.

ROT13 ist eine **involutorische** – also zu sich selbst inverse – Abbildung, d.h. für alle  $x \in A$  gilt

$$\text{ROT13}(\text{ROT13}(x)) = x.$$

Da ROT13 zudem keinen Buchstaben auf sich selbst abbildet, ist sie sogar eine echt involutorische Abbildung.

Die Buchstabenrechnung legt folgende Modifikation der Caesar-Chiffre nahe: Anstatt auf jeden Klartextbuchstaben den Schlüsselwert  $k$  zu addieren, können wir die Klartextbuchstaben auch mit  $k$  multiplizieren. Allerdings erhalten wir hierbei nicht für jeden Wert von  $k$  eine injektive Chiffrierfunktion. So bildet etwa die Funktion  $g : A_{\text{lat}} \rightarrow A_{\text{lat}}$  mit  $g(x) = 2x$  sowohl **A** als auch **N** auf den Buchstaben  $g(\mathbf{A}) = g(\mathbf{N}) = \mathbf{A}$  ab. Um die vom Schlüsselwert  $k$  zu erfüllende Bedingung angeben zu können, führen wir folgende Begriffe ein.

**Definition 9 (ggT, kgV, teilerfremd).** Seien  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Für  $(a, b) \neq (0, 0)$  ist

$$\text{ggT}(a, b) = \max\{d \in \mathbb{Z} \mid d \text{ teilt die beiden Zahlen } a \text{ und } b\}$$

der **größte gemeinsame Teiler** von  $a$  und  $b$ . Für  $a \neq 0, b \neq 0$  ist

$$\text{kgV}(a, b) = \min\{d \in \mathbb{Z} \mid d \geq 1 \text{ und die beiden Zahlen } a \text{ und } b \text{ teilen } d\}$$

das **kleinste gemeinsame Vielfache** von  $a$  und  $b$ . Ist  $\text{ggT}(a, b) = 1$ , so nennt man  $a$  und  $b$  **teilerfremd** oder man sagt,  $a$  ist **relativ prim** zu  $b$ .

**Lemma 10.** Seien  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  mit  $(a, b) \neq (0, 0)$ . Dann gilt  $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(b, a + bc)$  und somit  $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(b, a \bmod b)$ , falls  $b \geq 1$  ist.

*Beweis.* Jeder Teiler  $d$  von  $a$  und  $b$  ist auch ein Teiler von  $b$  und  $a + bc$  und umgekehrt.  $\square$

**Euklidischer Algorithmus:** Der größte gemeinsame Teiler zweier Zahlen  $a$  und  $b$  lässt sich wie folgt bestimmen.

O.B.d.A. sei  $a > b > 0$ . Bestimme die natürlichen Zahlen (durch Division mit Rest):

$$r_0 = a > r_1 = b > r_2 > \dots > r_s > r_{s+1} = 0 \quad \text{und} \quad d_2, d_3, \dots, d_{s+1}$$

mit

$$r_{i-1} = d_{i+1}r_i + r_{i+1} \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, s.^*$$

Hierzu sind  $s$  Divisionsschritte erforderlich. Wegen

$$\text{ggT}(r_{i-1}, r_i) = \text{ggT}(r_i, \underbrace{r_{i-1} - d_{i+1}r_i}_{r_{i+1}})$$

folgt  $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(r_s, r_{s+1}) = r_s$ .

**Beispiel 11.** Für  $a = 693$  und  $b = 147$  erhalten wir

| $i$ | $r_{i-1}$ | $=$ | $d_{i+1} \cdot$ | $r_i + r_{i+1}$         |
|-----|-----------|-----|-----------------|-------------------------|
| 1   | 693       | $=$ | 4               | $\cdot 147 + 105$       |
| 2   | 147       | $=$ | 1               | $\cdot 105 + 42$        |
| 3   | 105       | $=$ | 2               | $\cdot 42 + 21$         |
| 4   | 42        | $=$ | 2               | $\cdot \mathbf{21} + 0$ |

und damit  $\text{ggT}(693, 147) = r_4 = 21$ .  $\triangleleft$

Der Euklidische Algorithmus lässt sich sowohl iterativ als auch rekursiv implementieren.

**Prozedur Euklid<sub>it</sub>( $a, b$ )**

```

1  repeat
2     $r := a \bmod b$ 
3     $a := b$ 
4     $b := r$ 
5  until  $r = 0$ 
6  return( $a$ )
```

**Prozedur Euklid<sub>rek</sub>( $a, b$ )**

```

1  if  $b = 0$  then
2    return( $a$ )
3  else
4    return(Euklidrek( $b, a \bmod b$ ))
```

Zur Abschätzung von  $s$  verwenden wir die Folge der Fibonacci-Zahlen  $F_n$ :

---

\*Also:  $d_i = r_{i-2} \div r_{i-1}$  und  $r_i = r_{i-2} \bmod r_{i-1}$ .



$$F_n = \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 0 \\ 1, & \text{falls } n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2}, & \text{falls } n \geq 2 \end{cases}$$

Durch Induktion über  $i = s, s-1, \dots, 0$  folgt  $r_i \geq F_{s+1-i}$ ; also  $a = r_0 \geq F_{s+1}$ . Weiterhin lässt sich durch Induktion über  $n \geq 0$  zeigen, dass  $F_{n+1} \geq \phi^{n-1}$  ist, wobei  $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$  der *goldene Schnitt* ist. Der Induktionsanfang ( $n = 0$  oder  $1$ ) ist klar, da  $F_2 = F_1 = 1 = \phi^0 \geq \phi^{-1}$  ist. Unter der Induktionsannahme  $F_{i+1} \geq \phi^{i-1}$  für  $i \leq n-1$  folgt wegen  $\phi^2 = \phi + 1$

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \geq \phi^{n-2} + \phi^{n-3} = \phi^{n-3}(\phi + 1) = \phi^{n-1}.$$

Somit ist  $a \geq \phi^{s-1}$ , d. h.  $s \leq 1 + \lfloor \log_\phi a \rfloor$ .

**Satz 12.** *Der Euklidische Algorithmus führt  $O(n)$  Divisionsschritte zur Berechnung von  $\text{ggT}(a, b)$  durch, wobei  $n$  die Länge der Eingabe  $a > b > 0$  in Binärdarstellung bezeichnet. Dies führt auf eine Zeitkomplexität von  $O(n^3)$ , da jede Ganzzahldivision in Zeit  $O(n^2)$  durchführbar ist.*

**Erweiterter Euklidischer bzw. Berlekamp-Algorithmus:** Der Euklidische Algorithmus kann so modifiziert werden, dass er eine lineare Darstellung

$$\text{ggT}(a, b) = \lambda a + \mu b \quad \text{mit} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{Z}$$

des  $\text{ggT}$  liefert (Zeitkomplexität ebenfalls  $O(n^3)$ ). Hierzu werden neben  $r_i$  und  $d_i$  weitere Zahlen

$$p_i = p_{i-2} - d_i p_{i-1}, \quad \text{wobei} \quad p_0 = 1 \quad \text{und} \quad p_1 = 0,$$

und

$$q_i = q_{i-2} - d_i q_{i-1}, \quad \text{wobei} \quad q_0 = 0 \quad \text{und} \quad q_1 = 1,$$

für  $i = 0, \dots, n$  bestimmt. Dann gilt für  $i = 0$  und  $i = 1$ ,

$$ap_i + bq_i = r_i,$$

und durch Induktion über  $i$ ,

$$\begin{aligned} ap_{i+1} + bq_{i+1} &= a(p_{i-1} - d_{i+1}p_i) + b(q_{i-1} - d_{i+1}q_i) \\ &= ap_{i-1} + bq_{i-1} - d_{i+1}(ap_i + bq_i) \\ &= (r_{i-1} - d_{i+1}r_i) \\ &= r_{i+1} \end{aligned}$$

zeigt man, dass dies auch für  $i = 2, \dots, s$  gilt. Insbesondere gilt also

$$ap_s + bq_s = r_s = \text{ggT}(a, b).$$

**Korollar 13** (Lemma von Bezout). *Der größte gemeinsame Teiler von  $a$  und  $b$  ist in der Form*

$$\text{ggT}(a, b) = \lambda a + \mu b \quad \text{mit} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{Z}$$

*darstellbar.*

**Beispiel 14.** Für  $a = 693$  und  $b = 147$  erhalten wir wegen

| $i$ | $r_{i-1}$ | $=$ | $d_{i+1} \cdot$         | $r_i + r_{i+1}$ | $p_i$    | $q_i$      | $p_i \cdot 693 + q_i \cdot 147 =$ | $r_i$ |
|-----|-----------|-----|-------------------------|-----------------|----------|------------|-----------------------------------|-------|
| 0   |           |     |                         |                 | 1        | 0          | $1 \cdot 693 + 0 \cdot 147 =$     | 693   |
| 1   | 693       | $=$ | $4 \cdot 147 +$         | 105             | 0        | 1          | $0 \cdot 693 + 1 \cdot 147 =$     | 147   |
| 2   | 147       | $=$ | $1 \cdot 105 +$         | 42              | 1        | -4         | $1 \cdot 693 - 4 \cdot 147 =$     | 105   |
| 3   | 105       | $=$ | $2 \cdot 42 +$          | 21              | -1       | 5          | $-1 \cdot 693 + 5 \cdot 147 =$    | 42    |
| 4   | 42        | $=$ | $2 \cdot \mathbf{21} +$ | 0               | <b>3</b> | <b>-14</b> | $3 \cdot 693 - 14 \cdot 147 =$    | 21    |

die lineare Darstellung  $3 \cdot 693 - 14 \cdot 147 = 21$ . ◁

Aus der linearen Darstellbarkeit des größten gemeinsamen Teilers ergeben sich eine Reihe von nützlichen Schlussfolgerungen.

**Korollar 15.**  $\text{ggT}(a, b) = \min\{\lambda a + \mu b \geq 1 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{Z}\}$ .

*Beweis.* Sei  $M = \{\lambda a + \mu b \geq 1 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{Z}\}$ ,  $m = \min M$  und  $g = \text{ggT}(a, b)$ . Dann folgt  $g \geq m$ , da  $g$  in der Menge  $M$  enthalten ist, und  $g \leq m$ , da  $g$  jede Zahl in  $M$  teilt.  $\square$

**Korollar 16.** Der größte gemeinsame Teiler von  $a$  und  $b$  wird von allen gemeinsamen Teilern von  $a$  und  $b$  geteilt,

$$x|a \wedge x|b \Rightarrow x|\text{ggT}(a, b).$$

*Beweis.* Seien  $\mu, \lambda \in \mathbb{Z}$  mit  $\mu a + \lambda b = \text{ggT}(a, b)$ . Falls  $x$  sowohl  $a$  als auch  $b$  teilt, dann teilt  $x$  auch die Produkte  $\mu a$  und  $\lambda b$  und somit auch deren Summe.  $\square$

**Korollar 17** (Lemma von Euklid). Teilt  $a$  das Produkt  $bc$  und sind  $a, b$  teilerfremd, so teilt  $a$  auch  $c$ ,

$$a|bc \wedge \text{ggT}(a, b) = 1 \Rightarrow a|c.$$

*Beweis.* Wegen  $\text{ggT}(a, b) = 1$  existieren Zahlen  $\mu, \lambda \in \mathbb{Z}$  mit  $\mu a + \lambda b = 1$ . Falls  $a$  das Produkt  $bc$  teilt, muss  $a$  auch die Zahl  $c\mu a + c\lambda b = c$  teilen.  $\square$

**Korollar 18.** Zwei Zahlen  $a$  und  $b$  sind genau dann zu einer Zahl  $m \in \mathbb{Z}$  teilerfremd, wenn ihr Produkt  $ab$  teilerfremd zu  $m$  ist,

$$\text{ggT}(a, m) = \text{ggT}(b, m) = 1 \Leftrightarrow \text{ggT}(ab, m) = 1.$$

*Beweis.* Da  $a$  und  $b$  teilerfremd zu  $m$  sind, existieren Zahlen  $\mu, \lambda, \mu', \lambda' \in \mathbb{Z}$  mit  $\mu a + \lambda m = \mu' b + \lambda' m = 1$ . Somit ergibt sich aus der Darstellung

$$1 = (\mu a + \lambda m)(\mu' b + \lambda' m) = \underbrace{\mu \mu'}_{\mu''} ab + \underbrace{(\mu a \lambda' + \mu' b \lambda + \lambda \lambda' m)}_{\lambda''} m$$

und Korollar 15, dass auch  $ab$  teilerfremd zu  $m$  ist.

Gilt umgekehrt  $\text{ggT}(ab, m) = 1$ , so existieren Zahlen  $\mu, \lambda \in \mathbb{Z}$  mit  $\mu ab + \lambda m = 1$ . Mit Korollar 15 folgt sofort  $\text{ggT}(a, m) = \text{ggT}(b, m) = 1$ .  $\square$

Damit nun eine Abbildung  $g : A \rightarrow A$  von der Bauart  $g(x) = bx$  injektiv (oder gleichbedeutend, surjektiv) ist, muss es zu jedem Buchstaben  $y \in A$  genau einen Buchstaben  $x \in A$  mit  $bx = y$  geben. Wie der folgende Satz zeigt, ist dies genau dann der Fall, wenn  $b$  und  $m$  teilerfremd sind.

**Satz 19.** Seien  $b, m$  ganze Zahlen mit  $m \geq 1$ . Die lineare Kongruenzgleichung  $bx \equiv_m y$  besitzt genau dann eine eindeutige Lösung  $x \in \{0, \dots, m-1\}$ , wenn  $\text{ggT}(b, m) = 1$  ist.

*Beweis.* Angenommen,  $\text{ggT}(b, m) = g > 1$ . Dann ist mit  $x$  auch  $x' = x + m/g$  eine Lösung von  $bx \equiv_m y$  mit  $x \not\equiv_m x'$ . Gilt umgekehrt  $\text{ggT}(b, m) = 1$ , so folgt aus den Kongruenzen

$$bx_1 \equiv_m y$$

und

$$bx_2 \equiv_m y$$

sofort  $b(x_1 - x_2) \equiv_m 0$ , also  $m | b(x_1 - x_2)$ . Wegen  $\text{ggT}(b, m) = 1$  folgt mit dem Lemma von Euklid  $m | (x_1 - x_2)$ , also  $x_1 \equiv_m x_2$ .

Dies zeigt, dass die Abbildung  $f : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_m$  mit  $f(x) = bx \bmod m$  injektiv ist. Da der Definitions- und der Wertebereich von  $f$  die gleiche Mächtigkeit haben, muss  $f$  dann auch surjektiv sein. Dies impliziert, dass die Kongruenz  $bx \equiv_m y$  für jedes  $y \in \mathbb{Z}_m$  lösbar ist.  $\square$

**Korollar 20.** Im Fall  $\text{ggT}(b, m) = 1$  hat die Kongruenz  $bx \equiv_m 1$  genau eine Lösung, die das **multiplikative Inverse** von  $b$  modulo  $m$  genannt und mit  $b^{-1} \bmod m$  (oder einfach mit  $b^{-1}$ ) bezeichnet wird. Die invertierbaren Elemente von  $\mathbb{Z}_m$  werden in der Menge

$$\mathbb{Z}_m^* = \{b \in \mathbb{Z}_m \mid \text{ggT}(b, m) = 1\}$$

zusammengefasst.

Korollar 18 zeigt, dass  $\mathbb{Z}_m^*$  unter der Operation  $\odot_m$  abgeschlossen ist, und mit Korollar 20 folgt, dass  $(\mathbb{Z}_m^*, \odot_m)$  eine multiplikative Gruppe bildet. Allgemeiner zeigt man, dass für einen beliebigen Ring  $(R, +, \cdot, 0, 1)$  mit Eins die Multiplikation auf der Menge  $R^* = \{a \in R \mid \exists b \in R : ab = 1 = ba\}$  aller **Einheiten** von  $R$  eine Gruppe  $(R^*, \cdot, 1)$  (die so genannte **Einheitengruppe** von  $R$ ) bildet.

Das multiplikative Inverse von  $b$  modulo  $m$  ergibt sich aus der linearen Darstellung  $\lambda b + \mu m = \text{ggT}(b, m) = 1$  zu  $b^{-1} = \lambda \bmod m$ . Bei Kenntnis von  $b^{-1}$  kann die Kongruenz  $bx \equiv_m y$  leicht zu  $x = yb^{-1} \bmod m$  gelöst werden. Die folgende Tabelle zeigt die multiplikativen Inversen  $b^{-1}$  für alle  $b \in \mathbb{Z}_{26}^*$ .

| $b$      | 1 | 3 | 5  | 7  | 9 | 11 | 15 | 17 | 19 | 21 | 23 | 25 |
|----------|---|---|----|----|---|----|----|----|----|----|----|----|
| $b^{-1}$ | 1 | 9 | 21 | 15 | 3 | 19 | 7  | 23 | 11 | 5  | 17 | 25 |

Nun lässt sich die additive Chiffre leicht zur affinen Chiffre erweitern.

**Definition 21 (affine Chiffre).** Bei der **affinen Chiffre** ist  $A = B = M = C$  ein beliebiges Alphabet mit  $m := \|A\| > 1$  und  $K = \mathbb{Z}_m^* \times \mathbb{Z}_m$ . Für  $k = (b, c) \in K$ ,  $x \in M$  und  $y \in C$  gilt

$$E(k, x) = bx + c \quad \text{und} \quad D(k, y) = b^{-1}(y - c).$$

In diesem Fall liefert die Schlüsselkomponente  $b = -1$  für jeden Wert von  $c$  eine involutorische Chiffrierfunktion  $x \mapsto E(b, c; x) = c - x$  (**verschobenes komplementäres**

**Alphabet**). Wählen wir für  $c$  ebenfalls den Wert  $-1$ , so ergibt sich die Chiffrierfunktion  $x \mapsto -x - 1$ , die auch als **revertiertes Alphabet** bekannt ist. Offenbar ist diese Funktion genau dann echt involutorisch, wenn  $m$  gerade ist.

|          |   |
|----------|---|
| $x$      | A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z |
| $-x$     | A Z Y X W V U T S R Q P O N M L K J I H G F E D C B |
| $-x - 1$ | Z Y X W V U T S R Q P O N M L K J I H G F E D C B A |

Als nächstes illustrieren wir die Ver- und Entschlüsselung mit der affinen Chiffre an einem kleinen Beispiel.

**Beispiel 22** (affine Chiffre). Sei  $A = \{\mathbf{A}, \dots, \mathbf{Z}\} = B$ , also  $m = 26$ . Weiter sei  $k = (9, 2)$ , also  $b = 9$  und  $c = 2$ . Um den Klartextbuchstaben  $x = \mathbf{F}$  zu verschlüsseln, berechnen wir

$$E(k, x) = bx + c = 9\mathbf{F} + 2 = \mathbf{V},$$

da der Index von  $\mathbf{F}$  gleich 5, der von  $\mathbf{V}$  gleich 21 und  $9 \cdot 5 + 2 = 47 \equiv_{26} 21$  ist. Um einen Kryptotextbuchstaben wieder entschlüsseln zu können, benötigen wir das multiplikative Inverse von  $b = 9$ , das sich wegen

| $i$ | $r_{i-1}$ | $=$ | $d_{i+1} \cdot r_i + r_{i+1}$ | $p_i \cdot 26 +$              | $q_i \cdot 9 =$ | $r_i$ |
|-----|-----------|-----|-------------------------------|-------------------------------|-----------------|-------|
| 0   |           |     |                               | $1 \cdot 26 +$                | $0 \cdot 9 =$   | 26    |
| 1   | 26        | $=$ | $2 \cdot 9 + 8$               | $0 \cdot 26 +$                | $1 \cdot 9 =$   | 9     |
| 2   | 9         | $=$ | $1 \cdot 8 + 1$               | $1 \cdot 26 + (-2) \cdot 9 =$ |                 | 8     |
| 3   | 8         | $=$ | $8 \cdot 1 + 0$               | $(-1) \cdot 26 +$             | $3 \cdot 9 =$   | 1     |

zu  $b^{-1} = q_3 = 3$  ergibt. Damit erhalten wir für den Kryptotextbuchstaben  $y = \mathbf{V}$  den ursprünglichen Klartextbuchstaben

$$D(k, y) = b^{-1}(y - c) = 3(\mathbf{V} - 2) = \mathbf{F}$$

zurück, da  $3 \cdot 19 = 57 \equiv_{26} 5$  ist. ◁

Eine wichtige Rolle spielt die Funktion

$$\varphi : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N} \quad \text{mit} \quad \varphi(m) = \|\mathbb{Z}_m^*\| = \|\{a \mid 0 \leq a \leq m-1, \text{ggT}(a, m) = 1\}\|,$$

die sogenannte *Eulersche  $\varphi$ -Funktion*.

| $m$              | 1   | 2   | 3      | 4      | 5           | 6      | 7           | 8            | 9                  | 10           |
|------------------|-----|-----|--------|--------|-------------|--------|-------------|--------------|--------------------|--------------|
| $\mathbb{Z}_m^*$ | {0} | {1} | {1, 2} | {1, 3} | {1, ..., 4} | {1, 5} | {1, ..., 6} | {1, 3, 5, 7} | {1, 2, 4, 5, 7, 8} | {1, 3, 7, 9} |
| $\varphi(m)$     | 1   | 1   | 2      | 2      | 4           | 2      | 6           | 4            | 6                  | 4            |

Wegen

$$\mathbb{Z}_{p^k} - \mathbb{Z}_{p^k}^* = \{0, p, 2p, \dots, (p^{k-1} - 1)p\}$$

folgt sofort

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^{k-1}(p - 1).$$

Um hieraus für beliebige Zahlen  $m \in \mathcal{N}$  eine Formel für  $\varphi(m)$  zu erhalten, genügt es,  $\varphi(ml)$  im Fall  $\text{ggT}(m, l) = 1$  in Abhängigkeit von  $\varphi(m)$  und  $\varphi(l)$  zu bestimmen. Hierzu betrachten wir die Abbildung  $f : \mathbb{Z}_{ml} \rightarrow \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_l$  mit

$$f(x) := (x \bmod m, x \bmod l).$$

**Beispiel 23.** Sei  $m = 5$  und  $l = 6$ . Dann erhalten wir die Funktion  $f : \mathbb{Z}_{30} \rightarrow \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_6$  mit

|        |        |                         |                         |                         |        |                |                 |                         |                 |        |
|--------|--------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|--------|----------------|-----------------|-------------------------|-----------------|--------|
| $x$    | 0      | <b>1</b>                | 2                       | 3                       | 4      | 5              | 6               | <b>7</b>                | 8               | 9      |
| $f(x)$ | (0, 0) | ( <b>1</b> , <b>1</b> ) | ( <b>2</b> , <b>2</b> ) | ( <b>3</b> , <b>3</b> ) | (4, 4) | (0, <b>5</b> ) | ( <b>1</b> , 0) | ( <b>2</b> , <b>1</b> ) | ( <b>3</b> , 2) | (4, 3) |

|        |        |                         |                 |                         |        |        |                 |                         |                 |                |
|--------|--------|-------------------------|-----------------|-------------------------|--------|--------|-----------------|-------------------------|-----------------|----------------|
| $x$    | 10     | <b>11</b>               | 12              | <b>13</b>               | 14     | 15     | 16              | <b>17</b>               | 18              | <b>19</b>      |
| $f(x)$ | (0, 4) | ( <b>1</b> , <b>5</b> ) | ( <b>2</b> , 0) | ( <b>3</b> , <b>1</b> ) | (4, 2) | (0, 3) | ( <b>1</b> , 4) | ( <b>2</b> , <b>5</b> ) | ( <b>3</b> , 0) | (4, <b>1</b> ) |

|        |        |                 |                 |                         |        |                |                 |                 |                 |                |
|--------|--------|-----------------|-----------------|-------------------------|--------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|----------------|
| $x$    | 20     | 21              | 22              | <b>23</b>               | 24     | 25             | 26              | 27              | 28              | <b>29</b>      |
| $f(x)$ | (0, 2) | ( <b>1</b> , 3) | ( <b>2</b> , 4) | ( <b>3</b> , <b>5</b> ) | (4, 0) | (0, <b>1</b> ) | ( <b>1</b> , 2) | ( <b>2</b> , 3) | ( <b>3</b> , 4) | (4, <b>5</b> ) |

Man beachte, dass  $f$  eine Bijektion zwischen  $\mathbb{Z}_{30}$  und  $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_6$  ist. Zudem fällt auf, dass ein  $x$ -Wert genau dann in  $\mathbb{Z}_{30}^*$  liegt, wenn der Funktionswert  $f(x) = (y, z)$  zu  $\mathbb{Z}_5^* \times \mathbb{Z}_6^*$  gehört (die Werte  $x \in \mathbb{Z}_{30}^*$ ,  $y \in \mathbb{Z}_5^*$  und  $z \in \mathbb{Z}_6^*$  sind **fett** gedruckt). Folglich bildet  $f$  die Argumente in  $\mathbb{Z}_{30}^*$  bijektiv auf die Werte in  $\mathbb{Z}_5^* \times \mathbb{Z}_6^*$  ab. Für  $f^{-1}$  erhalten wir somit folgende Tabelle:

|          |    |           |    |    |    |           |
|----------|----|-----------|----|----|----|-----------|
| $f^{-1}$ | 0  | <b>1</b>  | 2  | 3  | 4  | <b>5</b>  |
| 0        | 0  | 25        | 20 | 15 | 10 | 5         |
| <b>1</b> | 6  | <b>1</b>  | 26 | 21 | 16 | <b>11</b> |
| <b>2</b> | 12 | <b>7</b>  | 2  | 27 | 22 | <b>17</b> |
| <b>3</b> | 18 | <b>13</b> | 8  | 3  | 28 | <b>23</b> |
| <b>4</b> | 24 | <b>19</b> | 14 | 9  | 4  | <b>29</b> |

◁

Der Chinesische Restsatz, den wir im nächsten Abschnitt beweisen, besagt, dass  $f$  im Fall  $\text{ggT}(m, l) = 1$  bijektiv und damit invertierbar ist. Wegen

$$\begin{aligned} \text{ggT}(x, ml) = 1 &\Leftrightarrow \text{ggT}(x, m) = \text{ggT}(x, l) = 1 \\ &\Leftrightarrow \text{ggT}(x \bmod m, m) = \text{ggT}(x \bmod l, l) = 1 \end{aligned}$$

ist daher die Einschränkung  $\hat{f}$  von  $f$  auf den Bereich  $\mathbb{Z}_{ml}^*$  eine Bijektion zwischen  $\mathbb{Z}_{ml}^*$  und  $\mathbb{Z}_m^* \times \mathbb{Z}_l^*$ , d.h. es gilt

$$\varphi(ml) = \|\mathbb{Z}_{ml}^*\| = \|\mathbb{Z}_m^* \times \mathbb{Z}_l^*\| = \|\mathbb{Z}_m^*\| \cdot \|\mathbb{Z}_l^*\| = \varphi(m)\varphi(l).$$

**Satz 24.** Die Eulersche  $\varphi$ -Funktion ist multiplikativ, d. h. für teilerfremde Zahlen  $m$  und  $l$  gilt  $\varphi(ml) = \varphi(m)\varphi(l)$ .

**Korollar 25.** Sei  $m = \prod_{i=1}^l p_i^{k_i}$  die Primfaktorzerlegung von  $m$ . Dann gilt

$$\varphi(m) = \prod_{i=1}^l p_i^{k_i-1}(p_i - 1) = m \prod_{i=1}^l (p_i - 1)/p_i.$$

*Beweis.* Es gilt

$$\varphi(\prod_{i=1}^l p_i^{k_i}) = \prod_{i=1}^l \varphi(p_i^{k_i}) = \prod_{i=1}^l (p_i^{k_i} - p_i^{k_i-1}) = \prod_{i=1}^l p_i^{k_i-1}(p_i - 1).$$

□

### Der Chinesische Restsatz

Die beiden linearen Kongruenzen

$$\begin{aligned}x &\equiv_3 0 \\x &\equiv_6 1\end{aligned}$$

besitzen je eine Lösung, es gibt aber kein  $x$ , das beide Kongruenzen gleichzeitig erfüllt. Der nächste Satz zeigt, dass unter bestimmten Voraussetzungen gemeinsame Lösungen existieren, und wie sie berechnet werden können.

**Satz 26** (Chinesischer Restsatz). *Falls  $m_1, \dots, m_k$  paarweise teilerfremd sind, dann hat das System*

$$\begin{aligned}x &\equiv_{m_1} b_1 \\&\vdots \\x &\equiv_{m_k} b_k\end{aligned}\tag{1.2}$$

genau eine Lösung modulo  $m = \prod_{i=1}^k m_i$ .

*Beweis.* Da die Zahl  $n_i = m/m_i$  teilerfremd zu  $m_i$  ist, existieren Zahlen  $\mu_i$  und  $\lambda_i$  mit

$$\mu_i n_i + \lambda_i m_i = \text{ggT}(n_i, m_i) = 1.$$

Dann gilt

$$\mu_i n_i \equiv_{m_i} 1$$

und

$$\mu_i n_i \equiv_{m_j} 0$$

für  $j \neq i$ . Folglich erfüllt  $x = \sum_{j=1}^k \mu_j n_j b_j$  die Kongruenzen

$$x \equiv_{m_i} \mu_i n_i b_i \equiv_{m_i} b_i$$

für  $i = 1, \dots, k$ . Dies zeigt, dass (1.2) lösbar, also die Funktion

$$f : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_{m_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{m_k}$$

mit  $f(x) = (x \bmod m_1, \dots, x \bmod m_k)$  surjektiv ist. Da der Definitions- und der Wertebereich von  $f$  die gleiche Mächtigkeit haben, muss  $f$  auch injektiv sein, d.h. (1.2) ist sogar eindeutig lösbar.  $\square$

Man beachte, dass der Beweis des Chinesischen Restsatzes konstruktiv ist und die Lösung  $x$  unter Verwendung des erweiterten Euklidischen Algorithmus' effizient berechenbar ist.

## 1.4 Die Hill-Chiffre

Die von Hill im Jahr 1929 publizierte Chiffre ist eine Erweiterung der multiplikativen Chiffre auf Buchstabenblöcke, d.h. der Klartext wird nicht zeichenweise, sondern blockweise verarbeitet. Sowohl der Klartext- als auch der Kryptotextraum enthält alle Wörter

$x$  über  $A$  einer festen Länge  $l$ . Als Schlüssel wird eine  $(l \times l)$ -Matrix  $k = (k_{ij})$  mit Koeffizienten in  $\mathbb{Z}_m$  benutzt, die einen Klartextblock  $x = x_1 \dots x_l \in A^l$  in den Kryptotextblock  $y_1 \dots y_l \in A^l$  transformiert, wobei

$$y_i = x_1 k_{1i} + \dots + x_l k_{li}, \quad i = 1, \dots, l$$

ist (hierbei machen wir von der Buchstabenrechnung Gebrauch).  $y$  entsteht also durch Multiplikation von  $x$  mit der Schlüsselmatrix  $k$ :

$$xk = (x_1, \dots, x_l) \begin{pmatrix} k_{11} & \dots & k_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{l1} & \dots & k_{ll} \end{pmatrix} = (y_1, \dots, y_l)$$

Wir bezeichnen die Menge aller  $(l \times l)$ -Matrizen mit Koeffizienten in  $\mathbb{Z}_m$  mit  $\mathbb{Z}_m^{l \times l}$ . Als Schlüssel können nur invertierbare Matrizen  $k$  benutzt werden, da sonst der Chiffriervorgang nicht injektiv ist. Eine Matrix  $k \in \mathbb{Z}_m^{l \times l}$  ist genau dann invertierbar, wenn die Determinante von  $k$  teilerfremd zu  $m$  ist (siehe Übungen).

**Definition 27 (Determinante).** Sei  $R$  ein kommutativer Ring mit Eins und sei  $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ . Eine Funktion  $f : R^{n \times n} \rightarrow R$  heißt **Determinantenfunktion**, falls sie folgende drei Eigenschaften erfüllt

- $f$  ist **multilinear**, d.h. für jede Matrix  $A = (a_1, \dots, a_n) \in R^{n \times n}$  mit Spalten  $a_1, \dots, a_n \in (R^n)^T$ , jeden Spaltenvektor  $b \in (R^n)^T$  und jedes  $r \in R$  gilt

$$f(a_1, \dots, ra_i + b, \dots, a_n) = rf(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) + f(a_1, \dots, b, \dots, a_n).$$

- $f$  ist **alternierend**, d.h. im Fall  $a_i = a_j$  für  $i \neq j$  gilt  $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ .
- $f$  ist **normiert**, d.h.  $f(E) = 1$ , wobei  $E$  die Einheitsmatrix ist.

Tatsächlich ist  $f$  durch diese drei Eigenschaften eindeutig festgelegt und wir bezeichnen  $f(A)$  wie üblich mit  $\det(A)$ .

Eine wichtige Eigenschaft der Funktion  $\det$  wird durch den Laplaceschen Entwicklungssatz beschrieben. Für  $1 \leq i, j \leq n$  sei  $A_{ij}$  die durch Streichen der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte aus  $A$  hervorgehende Matrix. Dann ist  $\det(A) = a_{11}$ , falls  $n = 1$ , und für  $n > 1$  ist

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}),$$

wobei  $i \in \{1, \dots, n\}$  beliebig wählbar ist (Entwicklung nach der  $i$ -ten Zeile). Das Produkt  $(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$  wird **Cofaktor** genannt und mit  $\tilde{a}_{i,j}$ .

Für die Dechiffrierung wird die zu  $k$  inverse Matrix  $k^{-1}$  benötigt, wofür effiziente Algorithmen bekannt sind (Gaußsches Eliminationsverfahren; siehe Übungen).

**Satz 28.** Sei  $A$  ein Alphabet und sei  $k \in \mathbb{Z}_m^{l \times l}$  ( $l \geq 1$ ,  $m = \|A\|$ ). Die Abbildung  $f : A^l \rightarrow A^l$  mit

$$f(x) = xk,$$

ist genau dann injektiv, wenn  $\text{ggT}(\det(k), m) = 1$  ist.

*Beweis.* Siehe Übungen. □

**Definition 29 (Hill-Chiffre).** Sei  $A = \{a_0, \dots, a_{m-1}\}$  ein beliebiges Alphabet und für eine natürliche Zahl  $l \geq 2$  sei  $M = C = A^l$ . Bei der **Hill-Chiffre** ist  $K = \{k \in \mathbb{Z}_m^{l \times l} \mid \text{ggT}(\det(k), m) = 1\}$  und es gilt

$$E(k, x) = xk \quad \text{und} \quad D(k, y) = yk^{-1}.$$

**Beispiel 30 (Hill-Chiffre).** Benutzen wir zur Chiffrierung von Klartextblöcken der Länge  $l = 4$  über dem lateinischen Alphabet  $A_{\text{lat}}$  die Schlüsselmatrix

$$k = \begin{pmatrix} 11 & 13 & 8 & 21 \\ 24 & 17 & 3 & 25 \\ 18 & 12 & 23 & 17 \\ 6 & 15 & 2 & 15 \end{pmatrix},$$

so erhalten wir beispielsweise für den Klartext **HILL** wegen

$$(\mathbf{HILL}) \begin{pmatrix} 11 & 13 & 8 & 21 \\ 24 & 17 & 3 & 25 \\ 18 & 12 & 23 & 17 \\ 6 & 15 & 2 & 15 \end{pmatrix} = (\mathbf{NERX}) \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{l} 11\mathbf{H} + 24\mathbf{I} + 18\mathbf{L} + 6\mathbf{L} = \mathbf{N} \\ 13\mathbf{H} + 17\mathbf{I} + 12\mathbf{L} + 15\mathbf{L} = \mathbf{E} \\ 8\mathbf{H} + 3\mathbf{I} + 23\mathbf{L} + 2\mathbf{L} = \mathbf{R} \\ 21\mathbf{H} + 25\mathbf{I} + 17\mathbf{L} + 15\mathbf{L} = \mathbf{X} \end{array}$$

den Kryptotext  $E(k, \mathbf{HILL}) = \mathbf{NERX}$ . Für die Entschlüsselung wird die inverse Matrix  $k^{-1}$  benötigt. Diese wird in den Übungen berechnet.  $\triangleleft$