

Vorlesungsskript
Einführung in die Kryptologie
Wintersemester 2017/18

Prof. Dr. Johannes Köbler
Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Komplexität und Kryptografie

15. Februar 2018

Inhaltsverzeichnis

1	Klassische Verfahren	1
1.1	Einführung	1
1.2	Kryptosysteme	2
1.3	Die affine Chiffre	3
1.4	Die Hill-Chiffre	11
1.5	Die Vigenère-Chiffre und andere Stromsysteme	13
1.6	Der One-Time-Pad	15
1.7	Klassifikation von Kryptosystemen	16
1.8	Realisierung von Blocktranspositionen und einfachen Substitutionen . . .	24
2	Kryptoanalyse der klassischen Verfahren	26
2.1	Klassifikation von Angriffen gegen Kryptosysteme	26
2.2	Kryptoanalyse von einfachen Substitutionschiffren	27
2.3	Kryptoanalyse von Blocktranspositionen	30
2.4	Kryptoanalyse von polygrafischen Chiffren	32
2.5	Kryptoanalyse von polyalphabetischen Chiffren	33
3	Sicherheit von Kryptosystemen	39
3.1	Informationstheoretische Sicherheit	39
3.2	Weitere Sicherheitsbegriffe	48
4	Moderne symmetrische Kryptosysteme & ihre Analyse	51
4.1	Produktchiffren	51
4.2	Substitutions-Permutations-Netzwerke	52
4.3	Lineare Approximationen	55
4.4	Lineare Kryptoanalyse eines SPN	57
4.5	Differentielle Kryptoanalyse von SPNs	60
5	DES und AES	66
5.1	Der Data Encryption Standard (DES)	66
5.2	Endliche Körper	69
5.3	Der Advanced Encryption Standard (AES)	72
5.3.1	Geschichte des AES	72
5.3.2	Die AES S-Box.	73
5.3.3	Die Schlüsselgenerierung.	74
5.3.4	Der AES-Chiffrieralgorithmus	75
5.3.5	Kryptoanalytische Betrachtungen	77
5.4	Betriebsarten von Blockchiffren	77
6	Zahlentheoretische Grundlagen	80
6.1	Diskrete Logarithmen	80
6.2	Effiziente Berechnung von Potenzen	83
6.3	Primzahlen	83

6.4	Pseudo-Primzahlen und der Fermat-Test	85
6.5	Der Miller-Rabin Test	86
7	Asymmetrische Kryptosysteme	89
7.1	Das RSA-System	90
7.2	Quadratische Reste	96
7.3	Das Rabin-System	98
7.4	Das ElGamal-Kryptosystem	101

1 Klassische Verfahren

1.1 Einführung

Kryptosysteme (Verschlüsselungsverfahren) dienen der Geheimhaltung von Nachrichten bzw. Daten. Hierzu gibt es auch andere Methoden wie z.B.

Physikalische Maßnahmen: Tresor etc.

Organisatorische Maßnahmen: einsamer Waldspaziergang etc.

Steganografische Maßnahmen: unsichtbare Tinte etc.

Andererseits können durch kryptografische Verfahren weitere **Schutzziele** realisiert werden.

- *Vertraulichkeit*
 - Geheimhaltung
 - Anonymität (z.B. Mobiltelefon)
 - Unbeobachtbarkeit (von Transaktionen)
- *Integrität*
 - von Nachrichten und Daten
- *Zurechenbarkeit*
 - Authentikation
 - Unabstreitbarkeit
 - Identifizierung
- *Verfügbarkeit*
 - von Daten
 - von Rechenressourcen
 - von Informationsdienstleistungen

In das Umfeld der Kryptografie fallen auch die folgenden Begriffe.

Kryptografie: Lehre von der Geheimhaltung von Informationen durch die Verschlüsselung von Daten. Im weiteren Sinne: Wissenschaft von der Übermittlung, Speicherung und Verarbeitung von Daten in einer von potentiellen Gegnern bedrohten Umgebung.

Kryptoanalysis: Erforschung der Methoden eines unbefugten Angriffs gegen ein Kryptoverfahren (Zweck: Vereitelung der mit seinem Einsatz verfolgten Ziele)

Kryptoanalyse: Analyse eines Kryptoverfahrens zum Zweck der Bewertung seiner kryptografischen Stärken bzw. Schwächen.

Kryptologie: Wissenschaft vom Entwurf, der Anwendung und der Analyse von kryptografischen Verfahren (umfasst Kryptografie und Kryptoanalyse).

1.2 Kryptosysteme

Es ist wichtig, Kryptosysteme von Codesystemen zu unterscheiden.

Codesysteme

- operieren auf semantischen Einheiten,
- starre Festlegung, welche Zeichenfolge wie zu ersetzen ist.

Beispiel 1 (Ausschnitt aus einem Codebuch der deutschen Luftwaffe).

xve	<i>Bis auf weiteres Wettermeldung gemäß Funkbefehl testen</i>
yde	<i>Frage</i>
sLk	<i>Befehl</i>
fin	<i>beendet</i>
eom	<i>eigene Maschinen</i>

◁

Kryptosysteme

- operieren auf syntaktischen Einheiten,
- flexibler Mechanismus durch Schlüsselvereinbarung

Definition 2 (Alphabet). Ein **Alphabet** $A = \{a_0, \dots, a_{m-1}\}$ ist eine geordnete endliche Menge von **Zeichen** a_i . Eine Folge $x = x_1 \dots x_n \in A^n$ heißt **Wort** (der **Länge** n). Die Menge aller Wörter über dem Alphabet A ist $A^* = \bigcup_{n \geq 0} A^n$.

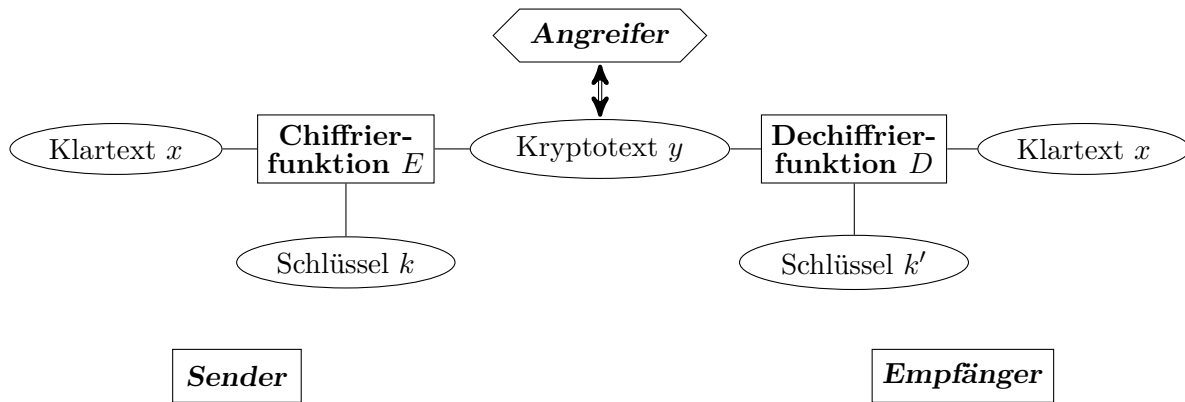
Beispiel 3. Das **lateinische Alphabet** A_{lat} enthält die 26 Buchstaben **A, ..., Z**. Bei der Abfassung von Klartexten wurde meist auf den Gebrauch von Interpunktions- und Leerzeichen sowie auf Groß- und Kleinschreibung verzichtet ($\leadsto$ Verringerung der Redundanz im Klartext). ◁

Definition 4 (Kryptosystem). Ein **Kryptosystem** wird durch folgende Komponenten beschrieben:

- A , das **Klartextalphabet**,
- B , das **Kryptotextalphabet**,
- K , der **Schlüsselraum** (key space),
- $M \subseteq A^*$, der **Klartextraum** (message space),
- $C \subseteq B^*$, der **Kryptotextraum** (ciphertext space),
- $E : K \times M \rightarrow C$, die **Verschlüsselungsfunktion** (encryption function),
- $D : K \times C \rightarrow M$, die **Entschlüsselungsfunktion** (decryption function) und
- $S \subseteq K \times K$, eine Menge von Schlüsselpaaren (k, k') mit der Eigenschaft, dass für jeden Klartext $x \in M$ folgende Beziehung gilt:

$$D(k', E(k, x)) = x \quad (1.1)$$

Bei symmetrischen Kryptosystemen ist $S = \{(k, k) \mid k \in K\}$, weshalb wir in diesem Fall auf die Angabe von S verzichten können.



Zu jedem Schlüssel $k \in K$ korrespondiert also eine **Chiffrierfunktion** $E_k : x \mapsto E(k, x)$ und eine **Dechiffrierfunktion** $D_k : y \mapsto D(k, y)$. Die Gesamtheit dieser Abbildungen wird auch **Chiffre** (englisch *cipher*) genannt. (Daneben wird der Begriff „Chiffre“ auch als Bezeichnung für einzelne Kryptotextzeichen oder kleinere Kryptotextsequenzen verwendet.)

Lemma 5. Für jedes Paar $(k, k') \in S$ ist die Chiffrierfunktion E_k injektiv.

Beweis. Angenommen, für zwei unterschiedliche Klartexte $x_1 \neq x_2$ ist $E(k, x_1) = E(k, x_2)$. Dann folgt

$$D(k', E(k, x_1)) = D(k', E(k, x_2)) \stackrel{(1.1)}{=} x_2 \neq x_1,$$

im Widerspruch zu (1.1). □

1.3 Die affine Chiffre

Die Modularithmetik erlaubt es uns, das Klartextalphabet mit einer Addition und Multiplikation auszustatten.

Definition 6 (teilt-Relation, modulare Kongruenz). Seien a, b, m ganze Zahlen mit $m \geq 1$. Die Zahl a **teilt** b (kurz: $a|b$), falls ein $d \in \mathbb{Z}$ existiert mit $b = ad$. Teilt m die Differenz $a - b$, so schreiben wir hierfür

$$a \equiv_m b$$

(in Worten: a ist **kongruent** zu b modulo m). Weiterhin bezeichne

$$a \bmod m = \min\{a - dm \geq 0 \mid d \in \mathbb{Z}\}$$

den bei der Ganzzahldivision von a durch m auftretenden **Rest**, also diejenige ganze Zahl $r \in \{0, \dots, m-1\}$, für die eine ganze Zahl $d \in \mathbb{Z}$ existiert mit $a = dm + r$.

Die auf $\mathbb{Z}$ definierten Operationen

$$a \oplus_m b := (a + b) \bmod m$$

und

$$a \odot_m b := ab \bmod m.$$

Tabelle 1.1: Werte der additiven Chiffrierfunktion ROT13 (Schlüssel $k = 13$).

x	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
$E(13, x)$	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M

sind abgeschlossen auf $\mathbb{Z}_m = \{0, \dots, m-1\}$ und bilden auf dieser Menge einen kommutativen Ring mit Einselement, den sogenannten **Restklassenring** modulo m . Für $a \oplus_m -b$ schreiben wir auch $a \ominus_m b$.

Durch Identifikation der Buchstaben a_i mit ihren Indizes können wir die auf $\mathbb{Z}_m$ definierten Rechenoperationen auf Buchstaben übertragen.

Definition 7 (Buchstabenrechnung). Sei $A = \{a_0, \dots, a_{m-1}\}$ ein Alphabet. Für Indizes $i, j \in \{0, \dots, m-1\}$ und eine ganze Zahl $z \in \mathbb{Z}$ ist

$$\begin{aligned} a_i + a_j &= a_{i \oplus_m j}, & a_i - a_j &= a_{i \ominus_m j}, & a_i a_j &= a_{i \odot_m j}, \\ a_i + z &= a_{i \oplus_m z}, & a_i - z &= a_{i \ominus_m z}, & z a_j &= a_{z \odot_m j}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Notation lässt sich die Verschiebechiffre, die auch als additive Chiffre bezeichnet wird, leicht beschreiben.

Definition 8 (additive Chiffre). Bei der **additiven Chiffre** ist $A = B = M = C$ ein beliebiges Alphabet mit $m := \|A\| > 1$ und $K = \{1, \dots, m-1\}$. Für $k \in K$, $x \in M$ und $y \in C$ gilt

$$E(k, x) = x + k \quad \text{und} \quad D(c, y) = y - k.$$

Im Fall des lateinischen Alphabets führt der Schlüssel $k = 13$ auf eine interessante Chiffrierfunktion, die in UNIX-Umgebungen auch unter der Bezeichnung ROT13 bekannt ist (siehe Tabelle 1.1). Natürlich kann mit dieser Substitution nicht ernsthaft die Vertraulichkeit von Nachrichten geschützt werden. Vielmehr soll durch sie ein unbeabsichtigtes Mitlesen – etwa von Rätsellösungen – verhindert werden.

ROT13 ist eine **involutorische** – also zu sich selbst inverse – Abbildung, d.h. für alle $x \in A$ gilt

$$\text{ROT13}(\text{ROT13}(x)) = x.$$

Da ROT13 zudem keinen Buchstaben auf sich selbst abbildet, ist sie sogar eine echt involutorische Abbildung.

Die Buchstabenrechnung legt folgende Modifikation der Caesar-Chiffre nahe: Anstatt auf jeden Klartextbuchstaben den Schlüsselwert k zu addieren, können wir die Klartextbuchstaben auch mit k multiplizieren. Allerdings erhalten wir hierbei nicht für jeden Wert von k eine injektive Chiffrierfunktion. So bildet etwa die Funktion $g : A_{\text{lat}} \rightarrow A_{\text{lat}}$ mit $g(x) = 2x$ sowohl **A** als auch **N** auf den Buchstaben $g(\mathbf{A}) = g(\mathbf{N}) = \mathbf{A}$ ab. Um die vom Schlüsselwert k zu erfüllende Bedingung angeben zu können, führen wir folgende Begriffe ein.

Definition 9 (ggT, kgV, teilerfremd). Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Für $(a, b) \neq (0, 0)$ ist

$$\text{ggT}(a, b) = \max\{d \in \mathbb{Z} \mid d \text{ teilt die beiden Zahlen } a \text{ und } b\}$$

der **größte gemeinsame Teiler** von a und b . Für $a \neq 0, b \neq 0$ ist

$$\text{kgV}(a, b) = \min\{d \in \mathbb{Z} \mid d \geq 1 \text{ und die beiden Zahlen } a \text{ und } b \text{ teilen } d\}$$

das **kleinste gemeinsame Vielfache** von a und b . Ist $\text{ggT}(a, b) = 1$, so nennt man a und b **teilerfremd** oder man sagt, a ist **relativ prim** zu b .

Lemma 10. Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $(a, b) \neq (0, 0)$. Dann gilt $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(b, a + bc)$ und somit $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(b, a \bmod b)$, falls $b \geq 1$ ist.

Beweis. Jeder Teiler d von a und b ist auch ein Teiler von b und $a + bc$ und umgekehrt. $\square$

Euklidischer Algorithmus: Der größte gemeinsame Teiler zweier Zahlen a und b lässt sich wie folgt bestimmen.

O.B.d.A. sei $a > b > 0$. Bestimme die natürlichen Zahlen (durch Division mit Rest):

$$r_0 = a > r_1 = b > r_2 > \dots > r_s > r_{s+1} = 0 \quad \text{und} \quad d_2, d_3, \dots, d_{s+1}$$

mit

$$r_{i-1} = d_{i+1}r_i + r_{i+1} \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, s.^*$$

Hierzu sind s Divisionsschritte erforderlich. Wegen

$$\text{ggT}(r_{i-1}, r_i) = \text{ggT}(r_i, \underbrace{r_{i-1} - d_{i+1}r_i}_{r_{i+1}})$$

folgt $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(r_s, r_{s+1}) = r_s$.

Beispiel 11. Für $a = 693$ und $b = 147$ erhalten wir

i	r_{i-1}	$=$	$d_{i+1} \cdot$	$r_i + r_{i+1}$
1	693	$=$	4	$\cdot 147 + 105$
2	147	$=$	1	$\cdot 105 + 42$
3	105	$=$	2	$\cdot 42 + 21$
4	42	$=$	2	$\cdot \mathbf{21} + 0$

und damit $\text{ggT}(693, 147) = r_4 = 21$. $\triangleleft$

Der Euklidische Algorithmus lässt sich sowohl iterativ als auch rekursiv implementieren.

Prozedur Euklid_{it}(a, b)

```

1  repeat
2     $r := a \bmod b$ 
3     $a := b$ 
4     $b := r$ 
5  until  $r = 0$ 
6  return( $a$ )
```

Prozedur Euklid_{rek}(a, b)

```

1  if  $b = 0$  then
2    return( $a$ )
3  else
4    return(Euklidrek( $b, a \bmod b$ ))
```

Zur Abschätzung von s verwenden wir die Folge der Fibonacci-Zahlen F_n :

*Also: $d_i = r_{i-2} \text{ div } r_{i-1}$ und $r_i = r_{i-2} \bmod r_{i-1}$.

$$F_n = \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 0 \\ 1, & \text{falls } n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2}, & \text{falls } n \geq 2 \end{cases}$$

Durch Induktion über $i = s, s-1, \dots, 0$ folgt $r_i \geq F_{s+1-i}$; also $a = r_0 \geq F_{s+1}$. Weiterhin lässt sich durch Induktion über $n \geq 0$ zeigen, dass $F_{n+1} \geq \phi^{n-1}$ ist, wobei $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ der *goldene Schnitt* ist. Der Induktionsanfang ($n = 0$ oder 1) ist klar, da $F_2 = F_1 = 1 = \phi^0 \geq \phi^{-1}$ ist. Unter der Induktionsannahme $F_{i+1} \geq \phi^{i-1}$ für $i \leq n-1$ folgt wegen $\phi^2 = \phi + 1$

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \geq \phi^{n-2} + \phi^{n-3} = \phi^{n-3}(\phi + 1) = \phi^{n-1}.$$

Somit ist $a \geq \phi^{s-1}$, d. h. $s \leq 1 + \lfloor \log_\phi a \rfloor$.

Satz 12. *Der Euklidische Algorithmus führt $O(n)$ Divisionsschritte zur Berechnung von $\text{ggT}(a, b)$ durch, wobei n die Länge der Eingabe $a > b > 0$ in Binärdarstellung bezeichnet. Dies führt auf eine Zeitkomplexität von $O(n^3)$, da jede Ganzzahldivision in Zeit $O(n^2)$ durchführbar ist.*

Erweiterter Euklidischer bzw. Berlekamp-Algorithmus: Der Euklidische Algorithmus kann so modifiziert werden, dass er eine lineare Darstellung

$$\text{ggT}(a, b) = \lambda a + \mu b \quad \text{mit} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{Z}$$

des ggT liefert (Zeitkomplexität ebenfalls $O(n^3)$). Hierzu werden neben r_i und d_i weitere Zahlen

$$p_i = p_{i-2} - d_i p_{i-1}, \quad \text{wobei} \quad p_0 = 1 \quad \text{und} \quad p_1 = 0,$$

und

$$q_i = q_{i-2} - d_i q_{i-1}, \quad \text{wobei} \quad q_0 = 0 \quad \text{und} \quad q_1 = 1,$$

für $i = 0, \dots, n$ bestimmt. Dann gilt für $i = 0$ und $i = 1$,

$$ap_i + bq_i = r_i,$$

und durch Induktion über i ,

$$\begin{aligned} ap_{i+1} + bq_{i+1} &= a(p_{i-1} - d_{i+1}p_i) + b(q_{i-1} - d_{i+1}q_i) \\ &= ap_{i-1} + bq_{i-1} - d_{i+1}(ap_i + bq_i) \\ &= (r_{i-1} - d_{i+1}r_i) \\ &= r_{i+1} \end{aligned}$$

zeigt man, dass dies auch für $i = 2, \dots, s$ gilt. Insbesondere gilt also

$$ap_s + bq_s = r_s = \text{ggT}(a, b).$$

Korollar 13 (Lemma von Bezout). *Der größte gemeinsame Teiler von a und b ist in der Form*

$$\text{ggT}(a, b) = \lambda a + \mu b \quad \text{mit} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{Z}$$

darstellbar.

Beispiel 14. Für $a = 693$ und $b = 147$ erhalten wir wegen

i	r_{i-1}	$=$	$d_{i+1} \cdot$	$r_i + r_{i+1}$	p_i	q_i	$p_i \cdot 693 + q_i \cdot 147 =$	r_i
0					1	0	$1 \cdot 693 + 0 \cdot 147 =$	693
1	693	$=$	$4 \cdot 147 +$	105	0	1	$0 \cdot 693 + 1 \cdot 147 =$	147
2	147	$=$	$1 \cdot 105 +$	42	1	-4	$1 \cdot 693 - 4 \cdot 147 =$	105
3	105	$=$	$2 \cdot 42 +$	21	-1	5	$-1 \cdot 693 + 5 \cdot 147 =$	42
4	42	$=$	$2 \cdot \mathbf{21} +$	0	3	-14	$3 \cdot 693 - 14 \cdot 147 =$	21

die lineare Darstellung $3 \cdot 693 - 14 \cdot 147 = 21$. ◁

Aus der linearen Darstellbarkeit des größten gemeinsamen Teilers ergeben sich eine Reihe von nützlichen Schlussfolgerungen.

Korollar 15. $\text{ggT}(a, b) = \min\{\lambda a + \mu b \geq 1 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{Z}\}$.

Beweis. Sei $M = \{\lambda a + \mu b \geq 1 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{Z}\}$, $m = \min M$ und $g = \text{ggT}(a, b)$. Dann folgt $g \geq m$, da g in der Menge M enthalten ist, und $g \leq m$, da g jede Zahl in M teilt. $\square$

Korollar 16. Der größte gemeinsame Teiler von a und b wird von allen gemeinsamen Teilern von a und b geteilt,

$$x|a \wedge x|b \Rightarrow x|\text{ggT}(a, b).$$

Beweis. Seien $\mu, \lambda \in \mathbb{Z}$ mit $\mu a + \lambda b = \text{ggT}(a, b)$. Falls x sowohl a als auch b teilt, dann teilt x auch die Produkte μa und λb und somit auch deren Summe. $\square$

Korollar 17 (Lemma von Euklid). Teilt a das Produkt bc und sind a, b teilerfremd, so teilt a auch c ,

$$a|bc \wedge \text{ggT}(a, b) = 1 \Rightarrow a|c.$$

Beweis. Wegen $\text{ggT}(a, b) = 1$ existieren Zahlen $\mu, \lambda \in \mathbb{Z}$ mit $\mu a + \lambda b = 1$. Falls a das Produkt bc teilt, muss a auch die Zahl $c\mu a + c\lambda b = c$ teilen. $\square$

Korollar 18. Zwei Zahlen a und b sind genau dann zu einer Zahl $m \in \mathbb{Z}$ teilerfremd, wenn ihr Produkt ab teilerfremd zu m ist,

$$\text{ggT}(a, m) = \text{ggT}(b, m) = 1 \Leftrightarrow \text{ggT}(ab, m) = 1.$$

Beweis. Da a und b teilerfremd zu m sind, existieren Zahlen $\mu, \lambda, \mu', \lambda' \in \mathbb{Z}$ mit $\mu a + \lambda m = \mu' b + \lambda' m = 1$. Somit ergibt sich aus der Darstellung

$$1 = (\mu a + \lambda m)(\mu' b + \lambda' m) = \underbrace{\mu \mu'}_{\mu''} ab + \underbrace{(\mu a \lambda' + \mu' b \lambda + \lambda \lambda' m)}_{\lambda''} m$$

und Korollar 15, dass auch ab teilerfremd zu m ist.

Gilt umgekehrt $\text{ggT}(ab, m) = 1$, so existieren Zahlen $\mu, \lambda \in \mathbb{Z}$ mit $\mu ab + \lambda m = 1$. Mit Korollar 15 folgt sofort $\text{ggT}(a, m) = \text{ggT}(b, m) = 1$. $\square$

Damit nun eine Abbildung $g : A \rightarrow A$ von der Bauart $g(x) = bx$ injektiv (oder gleichbedeutend, surjektiv) ist, muss es zu jedem Buchstaben $y \in A$ genau einen Buchstaben $x \in A$ mit $bx = y$ geben. Wie der folgende Satz zeigt, ist dies genau dann der Fall, wenn b und m teilerfremd sind.

Satz 19. Seien b, m ganze Zahlen mit $m \geq 1$. Die lineare Kongruenzgleichung $bx \equiv_m y$ besitzt genau dann eine eindeutige Lösung $x \in \{0, \dots, m-1\}$, wenn $\text{ggT}(b, m) = 1$ ist.

Beweis. Angenommen, $\text{ggT}(b, m) = g > 1$. Dann ist mit x auch $x' = x + m/g$ eine Lösung von $bx \equiv_m y$ mit $x \not\equiv_m x'$. Gilt umgekehrt $\text{ggT}(b, m) = 1$, so folgt aus den Kongruenzen

$$bx_1 \equiv_m y$$

und

$$bx_2 \equiv_m y$$

sofort $b(x_1 - x_2) \equiv_m 0$, also $m | b(x_1 - x_2)$. Wegen $\text{ggT}(b, m) = 1$ folgt mit dem Lemma von Euklid $m | (x_1 - x_2)$, also $x_1 \equiv_m x_2$.

Dies zeigt, dass die Abbildung $f : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_m$ mit $f(x) = bx \bmod m$ injektiv ist. Da der Definitions- und der Wertebereich von f die gleiche Mächtigkeit haben, muss f dann auch surjektiv sein. Dies impliziert, dass die Kongruenz $bx \equiv_m y$ für jedes $y \in \mathbb{Z}_m$ lösbar ist. $\square$

Korollar 20. Im Fall $\text{ggT}(b, m) = 1$ hat die Kongruenz $bx \equiv_m 1$ genau eine Lösung, die das **multiplikative Inverse** von b modulo m genannt und mit $b^{-1} \bmod m$ (oder einfach mit b^{-1}) bezeichnet wird. Die invertierbaren Elemente von $\mathbb{Z}_m$ werden in der Menge

$$\mathbb{Z}_m^* = \{b \in \mathbb{Z}_m \mid \text{ggT}(b, m) = 1\}$$

zusammengefasst.

Korollar 18 zeigt, dass $\mathbb{Z}_m^*$ unter der Operation $\odot_m$ abgeschlossen ist, und mit Korollar 20 folgt, dass $(\mathbb{Z}_m^*, \odot_m)$ eine multiplikative Gruppe bildet. Allgemeiner zeigt man, dass für einen beliebigen Ring $(R, +, \cdot, 0, 1)$ mit Eins die Multiplikation auf der Menge $R^* = \{a \in R \mid \exists b \in R : ab = 1 = ba\}$ aller **Einheiten** von R eine Gruppe $(R^*, \cdot, 1)$ (die so genannte **Einheitengruppe** von R) bildet.

Das multiplikative Inverse von b modulo m ergibt sich aus der linearen Darstellung $\lambda b + \mu m = \text{ggT}(b, m) = 1$ zu $b^{-1} = \lambda \bmod m$. Bei Kenntnis von b^{-1} kann die Kongruenz $bx \equiv_m y$ leicht zu $x = yb^{-1} \bmod m$ gelöst werden. Die folgende Tabelle zeigt die multiplikativen Inversen b^{-1} für alle $b \in \mathbb{Z}_{26}^*$.

b	1	3	5	7	9	11	15	17	19	21	23	25
b^{-1}	1	9	21	15	3	19	7	23	11	5	17	25

Nun lässt sich die additive Chiffre leicht zur affinen Chiffre erweitern.

Definition 21 (affine Chiffre). Bei der **affinen Chiffre** ist $A = B = M = C$ ein beliebiges Alphabet mit $m := \|A\| > 1$ und $K = \mathbb{Z}_m^* \times \mathbb{Z}_m$. Für $k = (b, c) \in K$, $x \in M$ und $y \in C$ gilt

$$E(k, x) = bx + c \quad \text{und} \quad D(k, y) = b^{-1}(y - c).$$

In diesem Fall liefert die Schlüsselkomponente $b = -1$ für jeden Wert von c eine involutorische Chiffrierfunktion $x \mapsto E(b, c; x) = c - x$ (**verschobenes komplementäres**

Alphabet). Wählen wir für c ebenfalls den Wert -1 , so ergibt sich die Chiffrierfunktion $x \mapsto -x - 1$, die auch als **revertiertes Alphabet** bekannt ist. Offenbar ist diese Funktion genau dann echt involutorisch, wenn m gerade ist.

x	A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z
$-x$	A Z Y X W V U T S R Q P O N M L K J I H G F E D C B
$-x - 1$	Z Y X W V U T S R Q P O N M L K J I H G F E D C B A

Als nächstes illustrieren wir die Ver- und Entschlüsselung mit der affinen Chiffre an einem kleinen Beispiel.

Beispiel 22 (affine Chiffre). Sei $A = \{\mathbf{A}, \dots, \mathbf{Z}\} = B$, also $m = 26$. Weiter sei $k = (9, 2)$, also $b = 9$ und $c = 2$. Um den Klartextbuchstaben $x = \mathbf{F}$ zu verschlüsseln, berechnen wir

$$E(k, x) = bx + c = 9\mathbf{F} + 2 = \mathbf{V},$$

da der Index von $\mathbf{F}$ gleich 5, der von $\mathbf{V}$ gleich 21 und $9 \cdot 5 + 2 = 47 \equiv_{26} 21$ ist. Um einen Kryptotextbuchstaben wieder entschlüsseln zu können, benötigen wir das multiplikative Inverse von $b = 9$, das sich wegen

i	r_{i-1}	$=$	$d_{i+1} \cdot r_i + r_{i+1}$	$p_i \cdot 26 +$	$q_i \cdot 9 =$	r_i
0				$1 \cdot 26 +$	$0 \cdot 9 =$	26
1	26	$=$	$2 \cdot 9 + 8$	$0 \cdot 26 +$	$1 \cdot 9 =$	9
2	9	$=$	$1 \cdot 8 + 1$	$1 \cdot 26 + (-2) \cdot 9 =$		8
3	8	$=$	$8 \cdot 1 + 0$	$(-1) \cdot 26 +$	$3 \cdot 9 =$	1

zu $b^{-1} = q_3 = 3$ ergibt. Damit erhalten wir für den Kryptotextbuchstaben $y = \mathbf{V}$ den ursprünglichen Klartextbuchstaben

$$D(k, y) = b^{-1}(y - c) = 3(\mathbf{V} - 2) = \mathbf{F}$$

zurück, da $3 \cdot 19 = 57 \equiv_{26} 5$ ist. ◁

Eine wichtige Rolle spielt die Funktion

$$\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad \varphi(m) = \|\mathbb{Z}_m^*\| = \|\{a \mid 0 \leq a \leq m-1, \text{ggT}(a, m) = 1\}\|,$$

die sogenannte *Eulersche φ -Funktion*.

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathbb{Z}_m^*$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, 3\}$	$\{1, \dots, 4\}$	$\{1, 5\}$	$\{1, \dots, 6\}$	$\{1, 3, 5, 7\}$	$\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$	$\{1, 3, 7, 9\}$
$\varphi(m)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4

Wegen

$$\mathbb{Z}_{p^k} - \mathbb{Z}_{p^k}^* = \{0, p, 2p, \dots, (p^{k-1} - 1)p\}$$

folgt sofort

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^{k-1}(p - 1).$$

Um hieraus für beliebige Zahlen $m \in \mathbb{N}$ eine Formel für $\varphi(m)$ zu erhalten, genügt es, $\varphi(ml)$ im Fall $\text{ggT}(m, l) = 1$ in Abhängigkeit von $\varphi(m)$ und $\varphi(l)$ zu bestimmen. Hierzu betrachten wir die Abbildung $f : \mathbb{Z}_{ml} \rightarrow \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_l$ mit

$$f(x) := (x \bmod m, x \bmod l).$$

Beispiel 23. Sei $m = 5$ und $l = 6$. Dann erhalten wir die Funktion $f : \mathbb{Z}_{30} \rightarrow \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_6$ mit

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	(0, 0)	(1 , 1)	(2 , 2)	(3 , 3)	(4, 4)	(0, 5)	(1 , 0)	(2 , 1)	(3 , 2)	(4, 3)

x	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$f(x)$	(0, 4)	(1 , 5)	(2 , 0)	(3 , 1)	(4, 2)	(0, 3)	(1 , 4)	(2 , 5)	(3 , 0)	(4, 1)

x	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
$f(x)$	(0, 2)	(1 , 3)	(2 , 4)	(3 , 5)	(4, 0)	(0, 1)	(1 , 2)	(2 , 3)	(3 , 4)	(4, 5)

Man beachte, dass f eine Bijektion zwischen $\mathbb{Z}_{30}$ und $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_6$ ist. Zudem fällt auf, dass ein x -Wert genau dann in $\mathbb{Z}_{30}^*$ liegt, wenn der Funktionswert $f(x) = (y, z)$ zu $\mathbb{Z}_5^* \times \mathbb{Z}_6^*$ gehört (die Werte $x \in \mathbb{Z}_{30}^*$, $y \in \mathbb{Z}_5^*$ und $z \in \mathbb{Z}_6^*$ sind **fett** gedruckt). Folglich bildet f die Argumente in $\mathbb{Z}_{30}^*$ bijektiv auf die Werte in $\mathbb{Z}_5^* \times \mathbb{Z}_6^*$ ab. Für f^{-1} erhalten wir somit folgende Tabelle:

f^{-1}	0	1	2	3	4	5
0	0	25	20	15	10	5
1	6	1	26	21	16	11
2	12	7	2	27	22	17
3	18	13	8	3	28	23
4	24	19	14	9	4	29

◁

Der Chinesische Restsatz, den wir im nächsten Abschnitt beweisen, besagt, dass f im Fall $\text{ggT}(m, l) = 1$ bijektiv und damit invertierbar ist. Wegen

$$\begin{aligned} \text{ggT}(x, ml) = 1 &\Leftrightarrow \text{ggT}(x, m) = \text{ggT}(x, l) = 1 \\ &\Leftrightarrow \text{ggT}(x \bmod m, m) = \text{ggT}(x \bmod l, l) = 1 \end{aligned}$$

ist daher die Einschränkung $\hat{f}$ von f auf den Bereich $\mathbb{Z}_{ml}^*$ eine Bijektion zwischen $\mathbb{Z}_{ml}^*$ und $\mathbb{Z}_m^* \times \mathbb{Z}_l^*$, d.h. es gilt

$$\varphi(ml) = \|\mathbb{Z}_{ml}^*\| = \|\mathbb{Z}_m^* \times \mathbb{Z}_l^*\| = \|\mathbb{Z}_m^*\| \cdot \|\mathbb{Z}_l^*\| = \varphi(m)\varphi(l).$$

Satz 24. Die Eulersche φ -Funktion ist multiplikativ, d. h. für teilerfremde Zahlen m und l gilt $\varphi(ml) = \varphi(m)\varphi(l)$.

Korollar 25. Sei $m = \prod_{i=1}^l p_i^{k_i}$ die Primfaktorzerlegung von m . Dann gilt

$$\varphi(m) = \prod_{i=1}^l p_i^{k_i-1}(p_i - 1) = m \prod_{i=1}^l (p_i - 1)/p_i.$$

Beweis. Es gilt

$$\varphi(\prod_{i=1}^l p_i^{k_i}) = \prod_{i=1}^l \varphi(p_i^{k_i}) = \prod_{i=1}^l (p_i^{k_i} - p_i^{k_i-1}) = \prod_{i=1}^l p_i^{k_i-1}(p_i - 1).$$

□

Der Chinesische Restsatz

Die beiden linearen Kongruenzen

$$\begin{aligned}x &\equiv_3 0 \\x &\equiv_6 1\end{aligned}$$

besitzen je eine Lösung, es gibt aber kein x , das beide Kongruenzen gleichzeitig erfüllt. Der nächste Satz zeigt, dass unter bestimmten Voraussetzungen gemeinsame Lösungen existieren, und wie sie berechnet werden können.

Satz 26 (Chinesischer Restsatz). *Falls $m_1, \dots, m_k$ paarweise teilerfremd sind, dann hat das System*

$$\begin{aligned}x &\equiv_{m_1} b_1 \\&\vdots \\x &\equiv_{m_k} b_k\end{aligned}\tag{1.2}$$

genau eine Lösung modulo $m = \prod_{i=1}^k m_i$.

Beweis. Da die Zahl $n_i = m/m_i$ teilerfremd zu m_i ist, existieren Zahlen μ_i und λ_i mit

$$\mu_i n_i + \lambda_i m_i = \text{ggT}(n_i, m_i) = 1.$$

Dann gilt

$$\mu_i n_i \equiv_{m_i} 1$$

und

$$\mu_i n_i \equiv_{m_j} 0$$

für $j \neq i$. Folglich erfüllt $x = \sum_{j=1}^k \mu_j n_j b_j$ die Kongruenzen

$$x \equiv_{m_i} \mu_i n_i b_i \equiv_{m_i} b_i$$

für $i = 1, \dots, k$. Dies zeigt, dass (1.2) lösbar, also die Funktion

$$f : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_{m_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{m_k}$$

mit $f(x) = (x \bmod m_1, \dots, x \bmod m_k)$ surjektiv ist. Da der Definitions- und der Wertebereich von f die gleiche Mächtigkeit haben, muss f auch injektiv sein, d.h. (1.2) ist sogar eindeutig lösbar. $\square$

Man beachte, dass der Beweis des Chinesischen Restsatzes konstruktiv ist und die Lösung x unter Verwendung des erweiterten Euklidischen Algorithmus' effizient berechenbar ist.

1.4 Die Hill-Chiffre

Die von Hill im Jahr 1929 publizierte Chiffre ist eine Erweiterung der multiplikativen Chiffre auf Buchstabenblöcke, d.h. der Klartext wird nicht zeichenweise, sondern blockweise verarbeitet. Sowohl der Klartext- als auch der Kryptotextraum enthält alle Wörter

x über A einer festen Länge l . Als Schlüssel wird eine $(l \times l)$ -Matrix $k = (k_{ij})$ mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}_m$ benutzt, die einen Klartextblock $x = x_1 \dots x_l \in A^l$ in den Kryptotextblock $y_1 \dots y_l \in A^l$ transformiert, wobei

$$y_i = x_1 k_{1i} + \dots + x_l k_{li}, \quad i = 1, \dots, l$$

ist (hierbei machen wir von der Buchstabenrechnung Gebrauch). y entsteht also durch Multiplikation von x mit der Schlüsselmatrix k :

$$xk = (x_1, \dots, x_l) \begin{pmatrix} k_{11} & \dots & k_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{l1} & \dots & k_{ll} \end{pmatrix} = (y_1, \dots, y_l)$$

Wir bezeichnen die Menge aller $(l \times l)$ -Matrizen mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}_m$ mit $\mathbb{Z}_m^{l \times l}$. Als Schlüssel können nur invertierbare Matrizen k benutzt werden, da sonst der Chiffriervorgang nicht injektiv ist. Eine Matrix $k \in \mathbb{Z}_m^{l \times l}$ ist genau dann invertierbar, wenn die Determinante von k teilerfremd zu m ist (siehe Übungen).

Definition 27 (Determinante). Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und sei $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$. Eine Funktion $f : R^{n \times n} \rightarrow R$ heißt **Determinantenfunktion**, falls sie folgende drei Eigenschaften erfüllt

- f ist **multilinear**, d.h. für jede Matrix $A = (a_1, \dots, a_n) \in R^{n \times n}$ mit Spalten $a_1, \dots, a_n \in (R^n)^T$, jeden Spaltenvektor $b \in (R^n)^T$ und jedes $r \in R$ gilt

$$f(a_1, \dots, ra_i + b, \dots, a_n) = rf(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) + f(a_1, \dots, b, \dots, a_n).$$

- f ist **alternierend**, d.h. im Fall $a_i = a_j$ für $i \neq j$ gilt $f(a_1, \dots, a_n) = 0$.
- f ist **normiert**, d.h. $f(E) = 1$, wobei E die Einheitsmatrix ist.

Tatsächlich ist f durch diese drei Eigenschaften eindeutig festgelegt und wir bezeichnen $f(A)$ wie üblich mit $\det(A)$.

Eine wichtige Eigenschaft der Funktion $\det$ wird durch den Laplaceschen Entwicklungssatz beschrieben. Für $1 \leq i, j \leq n$ sei A_{ij} die durch Streichen der i -ten Zeile und j -ten Spalte aus A hervorgehende Matrix. Dann ist $\det(A) = a_{11}$, falls $n = 1$, und für $n > 1$ ist

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}),$$

wobei $i \in \{1, \dots, n\}$ beliebig wählbar ist (Entwicklung nach der i -ten Zeile). Das Produkt $(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ wird **Cofaktor** genannt und mit $\tilde{a}_{i,j}$.

Für die Dechiffrierung wird die zu k inverse Matrix k^{-1} benötigt, wofür effiziente Algorithmen bekannt sind (Gaußsches Eliminationsverfahren; siehe Übungen).

Satz 28. Sei A ein Alphabet und sei $k \in \mathbb{Z}_m^{l \times l}$ ($l \geq 1$, $m = \|A\|$). Die Abbildung $f : A^l \rightarrow A^l$ mit

$$f(x) = xk,$$

ist genau dann injektiv, wenn $\text{ggT}(\det(k), m) = 1$ ist.

Beweis. Siehe Übungen. □

Definition 29 (Hill-Chiffre). Sei $A = \{a_0, \dots, a_{m-1}\}$ ein beliebiges Alphabet und für eine natürliche Zahl $l \geq 2$ sei $M = C = A^l$. Bei der **Hill-Chiffre** ist $K = \{k \in \mathbb{Z}_m^{l \times l} \mid \text{ggT}(\det(k), m) = 1\}$ und es gilt

$$E(k, x) = xk \quad \text{und} \quad D(k, y) = yk^{-1}.$$

Beispiel 30 (Hill-Chiffre). Benutzen wir zur Chiffrierung von Klartextblöcken der Länge $l = 4$ über dem lateinischen Alphabet A_{lat} die Schlüsselmatrix

$$k = \begin{pmatrix} 11 & 13 & 8 & 21 \\ 24 & 17 & 3 & 25 \\ 18 & 12 & 23 & 17 \\ 6 & 15 & 2 & 15 \end{pmatrix},$$

so erhalten wir beispielsweise für den Klartext **HILL** wegen

$$(\mathbf{HILL}) \begin{pmatrix} 11 & 13 & 8 & 21 \\ 24 & 17 & 3 & 25 \\ 18 & 12 & 23 & 17 \\ 6 & 15 & 2 & 15 \end{pmatrix} = (\mathbf{NERX}) \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned} 11\mathbf{H} + 24\mathbf{I} + 18\mathbf{L} + 6\mathbf{L} &= \mathbf{N} \\ 13\mathbf{H} + 17\mathbf{I} + 12\mathbf{L} + 15\mathbf{L} &= \mathbf{E} \\ 8\mathbf{H} + 3\mathbf{I} + 23\mathbf{L} + 2\mathbf{L} &= \mathbf{R} \\ 21\mathbf{H} + 25\mathbf{I} + 17\mathbf{L} + 15\mathbf{L} &= \mathbf{X} \end{aligned}$$

den Kryptotext $E(k, \mathbf{HILL}) = \mathbf{NERX}$. Für die Entschlüsselung wird die inverse Matrix k^{-1} benötigt. Diese wird in den Übungen berechnet. $\triangleleft$

1.5 Die Vigenère-Chiffre und andere Stromsysteme

Bei der nach dem Franzosen Blaise de Vigenère (1523–1596) benannten Chiffre werden zwar nur einzelne Buchstaben chiffriert, aber je nach Position im Klartext unterschiedlich.

Definition 31 (Vigenère-Chiffre). Sei $A = B$ ein beliebiges Alphabet. Die **Vigenère-Chiffre** chiffriert unter einem Schlüssel $k = k_0 \dots k_{d-1} \in K = A^*$ einen Klartext $x = x_0 \dots x_{n-1}$ beliebiger Länge zu

$$E(k, x) = y_0 \dots y_{n-1}, \quad \text{wobei} \quad y_i = x_i + k_{(i \bmod d)} \quad \text{ist,}$$

und dechiffriert einen Kryptotext $y = y_0 \dots y_{n-1}$ zu

$$D(k, y) = x_0 \dots x_{n-1}, \quad \text{wobei} \quad x_i = y_i - k_{(i \bmod d)} \quad \text{ist.}$$

Beispiel 32 (Vigenère-Chiffre). Verwenden wir das lateinische Alphabet A_{lat} als Klartextalphabet und wählen wir als Schlüssel das Wort $k = \mathbf{WIE}$, so ergibt sich für den Klartext **VIGENERE** beispielsweise der Kryptotext

$$\begin{aligned} E(\mathbf{WIE}, \mathbf{VIGENERE}) &= \underbrace{\mathbf{V}+\mathbf{W}}_{\mathbf{R}} \underbrace{\mathbf{I}+\mathbf{I}}_{\mathbf{Q}} \underbrace{\mathbf{G}+\mathbf{E}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\mathbf{E}+\mathbf{W}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\mathbf{N}+\mathbf{I}}_{\mathbf{V}} \underbrace{\mathbf{E}+\mathbf{E}}_{\mathbf{I}} \underbrace{\mathbf{R}+\mathbf{W}}_{\mathbf{N}} \underbrace{\mathbf{E}+\mathbf{I}}_{\mathbf{M}} \\ &= \mathbf{RQKAVINM} \end{aligned}$$

$\triangleleft$

Um einen Klartext x zu verschlüsseln, wird also das Schlüsselwort $k = k_0 \dots k_{d-1}$ so oft wiederholt, bis der dabei entstehende **Schlüsselstrom** $\hat{k} = k_0, k_1, \dots, k_{d-1}, k_0, \dots$ die Länge von x erreicht. Dann werden x und $\hat{k}$ zeichenweise addiert, um den zugehörigen Kryptotext y zu bilden. Aus diesem kann der ursprüngliche Klartext x zurückgewonnen werden, indem man den Schlüsselstrom $\hat{k}$ wieder subtrahiert.

Beispiel 33. *Vigenère-Chiffre**Chiffrierung:*

$$\begin{array}{rcl}
 & \text{VIGENERE} & (\text{Klartext } x) \\
 + & \underline{\text{WIEWIEWI}} & (\text{Schlüsselstrom } \hat{k}) \\
 & \text{RQKAVINM} & (\text{Kryptotext } y)
 \end{array}$$

Dechiffrierung:

$$\begin{array}{rcl}
 & \text{RQKAVINM} & (\text{Kryptotext } y) \\
 - & \underline{\text{WIEWIEWI}} & (\text{Schlüsselstrom } \hat{k}) \\
 & \text{VIGENERE} & (\text{Klartext } x)
 \end{array}$$

<

Die Chiffrierarbeit lässt sich durch Benutzung einer Additionstabelle erleichtern (auch als **Vigenère-Tableau** bekannt).

+	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
A	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
B	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A
C	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B
D	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C
E	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D
F	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E
G	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F
H	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G
I	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H
J	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I
K	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
L	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
M	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
N	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
O	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
P	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
Q	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
R	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
S	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
T	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
U	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
V	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
W	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
X	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
Y	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
Z	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y

Um eine involutorische Chiffre zu erhalten, schlug Sir Francis Beaufort, ein Admiral der britischen Marine, vor, den Schlüsselstrom nicht auf den Klartext zu addieren, sondern letzteren von ersterem zu subtrahieren.

Beispiel 34 (Beaufort-Chiffre). Verschlüsseln wir den Klartext **BEAUFORT** beispielsweise unter dem Schlüsselwort $k = \text{WIE}$, so erhalten wir den Kryptotext **XMEQNSNB**. Eine erneute Verschlüsselung liefert wieder den Klartext **BEAUFORT**:

Chiffrierung:

$$\begin{array}{rcl}
 & \text{WIEWIEWI} & (\text{Schlüsselstrom}) \\
 - & \text{BEAUFORT} & (\text{Klartext}) \\
 & \text{VEECDQFP} & (\text{Kryptotext})
 \end{array}$$

Dechiffrierung:

$$\begin{array}{rcl}
 & \text{WIEWIEWI} & (\text{Schlüsselstrom}) \\
 - & \text{VEECDQFP} & (\text{Kryptotext}) \\
 & \text{BEAUFORT} & (\text{Klartext})
 \end{array}$$

<

Bei den bisher betrachteten Chiffren wird aus einem Schlüsselwort $k = k_0 \dots k_{d-1}$ ein **periodischer Schlüsselstrom** $\hat{k} = \hat{k}_0 \dots \hat{k}_{n-1}$ erzeugt, das heißt, es gilt $\hat{k}_i = \hat{k}_{i+d}$ für alle $i = 0, \dots, n - d - 1$. Da eine kleine Periode das Brechen der Chiffre erleichtert, sollte entweder ein Schlüsselstrom mit sehr großer Periode oder noch besser ein **fortlaufender Schlüsselstrom** zur Chiffrierung benutzt werden. Ein solcher nichtperiodischer Schlüsselstrom lässt sich beispielsweise ohne großen Aufwand erzeugen, indem man an das Schlüsselwort den Klartext oder den Kryptotext anhängt (sogenannte **Autokey-Chiffrierung**).[†]

Beispiel 35 (Autokey-Chiffre). *Benutzen wir wieder das Schlüsselwort **WIE**, um den Schlüsselstrom durch Anhängen des Klar- bzw. Kryptotextes zu erzeugen, so erhalten wir für den Klartext **VIGENERE** folgende Kryptotexte:*

<i>Klartext-Schlüsselstrom:</i>	<i>Kryptotext-Schlüsselstrom:</i>
$\text{VIGENERE} \quad (\text{Klartext})$	$\text{VIGENERE} \quad (\text{Klartext})$
$+ \text{WIEVIGEN} \quad (\text{Schlüsselstrom})$	$+ \text{WIERQKVD} \quad (\text{Schlüsselstrom})$
$\hline \text{RQKZVKVR} \quad (\text{Kryptotext})$	$\hline \text{RQKVDOMH} \quad (\text{Kryptotext})$

◁

Auch die Dechiffrierung ist in beiden Fällen einfach. Bei der ersten Alternative kann der Empfänger durch Subtraktion des Schlüsselworts den Anfang des Klartextes bilden und gleichzeitig den Schlüsselstrom verlängern, so dass sich auf diese Weise Stück für Stück der gesamte Kryptotext entschlüsseln lässt. Noch einfacher gestaltet sich die Dechiffrierung im zweiten Fall, da sich hier der Schlüsselstrom vom Kryptotext nur durch das vorangestellte Schlüsselwort unterscheidet.

1.6 Der One-Time-Pad

Es besteht auch die Möglichkeit, eine Textstelle in einem Buch als Schlüssel zu vereinbaren und den dort beginnenden Text als Schlüsselstrom zu benutzen (Lauftextverschlüsselung). Besser ist es jedoch, aus einem relativ kurzen Schlüssel einen möglichst zufällig erscheinenden Schlüsselstrom zu erzeugen. Hierzu können beispielsweise Pseudozufallsgeneratoren eingesetzt werden. Absolute Sicherheit wird dagegen erreicht, wenn der Schlüsselstrom rein zufällig erzeugt und nach einmaliger Benutzung wieder vernichtet wird.[‡] Ein solcher „Wegwerfsschlüssel“ (*One-time-pad* oder *One-time-tape*, im Deutschen auch als **individueller Schlüssel** bezeichnet) lässt sich allerdings nur mit großem Aufwand generieren und verteilen, weshalb diese Chiffre nur wenig praktikabel ist. Dennoch wurde diese Methode beispielsweise beim „heißen Draht“, der 1963 eingerichteten, direkten Fernschreibverbindung zwischen dem Weißen Haus in Washington und dem Kreml in Moskau, angewandt.

Beispiel 36 (One-time-pad). *Sei $A = \{a_0, \dots, a_{m-1}\}$ ein beliebiges Klartextalphabet. Um einen Klartext $x = x_0 \dots x_{n-1}$ zu verschlüsseln, wird auf jeden Klartextbuchstaben x_i*

[†]Die Idee, den Schlüsselstrom durch Anhängen des Klartextes an ein Schlüsselwort zu bilden, stammt von Vigenère, während er mit der Erfindung der nach ihm benannten Vigenère-Chiffre „nichts zu tun“ hatte. Diese wird vielmehr Giovan Batista Belaso (1553) zugeschrieben.

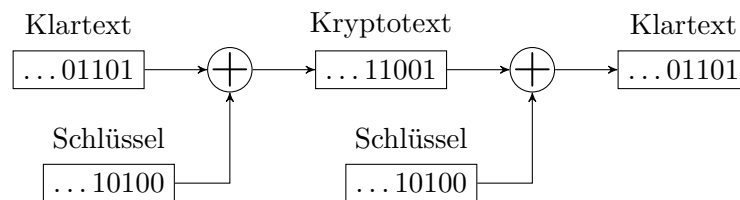
[‡]Diese Art der Schlüsselerzeugung schlug der amerikanische Major Joseph O. Mauborgne im Jahr 1918 vor, nachdem ihm ein von Gilbert S. Vernam für den Fernschreibverkehr entwickeltes Chiffriersystem vorgestellt wurde.

ein neuer, zufällig generierter Schlüsselbuchstabe k_i addiert,

$$y = y_0 \dots y_{n-1}, \text{ wobei } y_i = x_i + k_i.$$

<

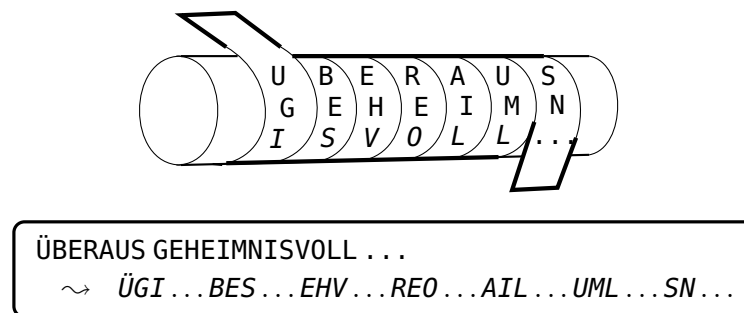
Der Klartext wird also wie bei einer additiven Chiffre verschlüsselt, nur dass der Schlüssel nach einmaligem Gebrauch gewechselt wird. Dies entspricht dem Gebrauch einer Vigenère-Chiffre, falls als Schlüssel ein zufällig gewähltes Wort von der Länge des Klartextes benutzt wird. Wie diese ist der One-time-pad im Binärfall also involutorisch.



1.7 Klassifikation von Kryptosystemen

Bei den bisher betrachteten Chiffrierfunktionen handelt es sich um **Substitutionen**, d.h. sie erzeugen den Kryptotext aus dem Klartext, indem sie Klartextzeichen – einzeln oder in Gruppen – durch Kryptotextzeichen ersetzen. Dagegen verändern **Transpositionen** lediglich die Reihenfolge der einzelnen Klartextzeichen.

Beispiel 37 (Skytale-Chiffre). Die älteste bekannte Verschlüsselungstechnik stammt aus der Antike und wurde im 5. Jahrhundert v. Chr. von den Spartanern entwickelt: Der Sender wickelt einen Papierstreifen spiralförmig um einen Holzstab (die sogenannte **Skytale**) und beschreibt ihn in Längsrichtung mit der Geheimbotschaft.



Besitzt der Empfänger eines auf diese Weise beschrifteten Papierstreifens einen Stab mit dem gleichen Umfang, so kann er ihn auf dieselbe Art wieder entziffern. <

Als Schlüssel fungiert hier also der Stabumfang bzw. die Anzahl k der Zeilen, mit denen der Stab beschrieben wird. Findet der gesamte Klartext x auf der Skytale Platz und beträgt seine Länge ein Vielfaches von k , so geht x bei der Chiffrierung in den Kryptotext

$$E(k, x_1 \dots x_{km}) = x_1 x_{m+1} x_{2m+1} \dots x_{(k-1)m+1} x_2 x_{m+2} x_{2m+2} \dots x_{(k-1)m+2} \dots x_m x_{2m} x_{3m} \dots x_{km}$$

über. Dasselbe Resultat stellt sich ein, wenn wir x zeilenweise in eine $k \times m$ -Matrix schreiben und spaltenweise wieder auslesen (sogenannte **Spaltentransposition**):

x_1	x_2	$\cdots$	x_m
x_{m+1}	x_{m+2}	$\cdots$	x_{2m}
x_{2m+1}	x_{2m+2}	$\cdots$	x_{3m}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$x_{(k-1)m+1}$	$x_{(k-1)m+2}$	$\cdots$	x_{km}

Ist die Klartextlänge kein Vielfaches von k , so kann der Klartext durch das Ein- bzw. Anfügen von sogenannten **Blendern** (Füllzeichen) verlängert werden. Damit der Empfänger diese Füllzeichen nach der Entschlüsselung wieder entfernen kann, ist lediglich darauf zu achten, dass sie im Klartext leicht als solche erkennbar sind.

Von der Methode, die letzte Zeile nur zum Teil zu füllen, ist dagegen abzuraten. In diesem Fall würden nämlich auf dem abgewickelten Papierstreifen Lücken entstehen, aus deren Anordnung man Schlüsse auf den benutzten Schlüssel k ziehen könnte. Andererseits ist nichts dagegen einzuwenden, dass der Sender die letzte Spalte der Skytale nur zum Teil beschriftet.

Eng verwandt mit der Skytale-Chiffre ist die Zick-Zack-Transposition.

Beispiel 38. Bei Ausführung einer **Zick-Zack-Transposition** wird der Klartext in eine Zick-Zack-Linie geschrieben und horizontal wieder ausgelesen. Die Höhe der Zick-Zack-Linie kann als Schlüssel vereinbart werden.

Z	I	K	Z	A	L	K	I	I	E
	C			C			N		

ZICKZACKLINIE $\leadsto$ ZZLEIKAKIICCN

<

Bei einer Zick-Zack-Transposition werden Zeichen im vorderen Klartextbereich bis fast ans Ende des Kryptotextes verlagert und umgekehrt. Dies hat den Nachteil, dass für die Generierung des Kryptotextes der gesamte Klartext gepuffert werden muss. Daher werden meist **Blocktranspositionen** verwendet, bei denen die Zeichen nur innerhalb fester Blockgrenzen transponiert werden.

Definition 39 (Blocktranspositionschiffre). Sei $A = B$ ein beliebiges Alphabet und für eine natürliche Zahl $l \geq 2$ sei $M = C = A^l$. Bei einer **Blocktranspositionschiffre** wird durch jeden Schlüssel $k \in K$ eine Permutation π beschrieben, so dass für alle Zeichenfolgen $x_1 \cdots x_l \in M$ und $y_1 \cdots y_l \in C$

$$E(k, x_1 \cdots x_l) = x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(l)}$$

und

$$D(k, y_1 \cdots y_l) = y_{\pi^{-1}(1)} \cdots y_{\pi^{-1}(l)}$$

gilt.

Eine Blocktransposition mit Blocklänge l lässt sich durch eine Permutation $\pi \in S_l$ (also auf der Menge $\{1, \dots, l\}$) beschreiben.

Beispiel 40. Eine Skytale, die mit 4 Zeilen der Länge 6 beschrieben wird, realisiert beispielsweise folgende Blocktransposition:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$\pi(i)$	1	7	13	19	2	8	14	20	3	9	15	21	4	10	16	22	5	11	17	23	6	12	18	24

<

Für die Entschlüsselung muss die zu π **inverse Permutation** π^{-1} benutzt werden. Wird π durch Zyklen $(i_1 i_2 i_3 \dots i_n)$ dargestellt, wobei i_1 auf i_2 , i_2 auf i_3 usw. und schließlich i_3 auf i_1 abgebildet wird, so ist π^{-1} sehr leicht zu bestimmen.

Beispiel 41.

i	1	2	3	4	5	6
$\pi(i)$	4	6	1	3	5	2

i	1	2	3	4	5	6
$\pi^{-1}(i)$	3	6	4	1	5	2

Obiges π hat beispielsweise die Zyklendarstellung

$$\pi = (1\ 4\ 3)\ (2\ 6)\ (5) \text{ oder } \pi = (1\ 4\ 3)\ (2\ 6),$$

wenn, wie allgemein üblich, Einerzyklen weggelassen werden. Daraus erhalten wir unmittelbar π^{-1} zu

$$\pi^{-1} = (3\ 4\ 1)\ (6\ 2) \text{ oder } (1\ 3\ 4)\ (2\ 6),$$

wenn wir jeden Zyklus mit seinem kleinsten Element beginnen lassen und die Zyklen nach der Größe dieser Elemente anordnen. <

Beispiel 42. Bei der **Matrix-Transposition** wird der Klartext zeilenweise in eine $k \times m$ -Matrix eingelesen und der Kryptotext spaltenweise gemäß einer Spaltenpermutation π , die als Schlüssel dient, wieder ausgelesen. Für $\pi = (1\ 4\ 3)\ (2\ 6)$ wird also zuerst Spalte $\pi(1) = 4$, dann Spalte $\pi(2) = 6$ und danach Spalte $\pi(3) = 1$ usw. und zuletzt Spalte $\pi(6) = 2$ ausgelesen.

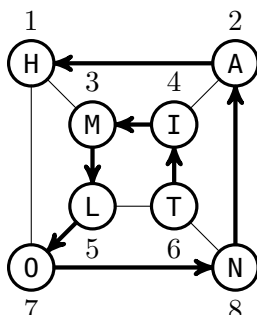
3	6	4	1	5	2
D	I	E	S	E	R
K	L	A	R	T	E
X	T	I	S	T	N
I	C	H	T	S	E
H	R	L	A	N	G

DIESER KLARTEXT IST NICHT SEHR LANG

~ SRSTA RENEG DKXIH EAIHL ETTSN ILTCR

<

Beispiel 43. Bei der **Weg-Transposition** wird als Schlüssel eine Hamiltonlinie in einem Graphen mit den Knoten $1, \dots, l$ benutzt. (Eine Hamiltonlinie ist eine Anordnung aller Knoten, in der je zwei aufeinanderfolgende Knoten durch eine Kante verbunden sind.) Der Klartextblock $x_1 \dots x_l$ wird gemäß der Knotennummerierung in den Graphen eingelesen und der zugehörige Kryptotext entlang der Hamiltonlinie wieder ausgelesen.



HAMILTON ~ TIMLONAH

<

Es ist leicht zu sehen, dass sich jede Blocktransposition durch eine Hamiltonlinie in einem geeigneten Graphen realisieren lässt. Der Vorteil, eine Hamiltonlinie als Schlüssel zu benutzen, besteht offenbar darin, dass man sich den Verlauf einer Hamiltonlinie bildhaft vorstellen und daher besser einprägen kann als eine Zahlenfolge.

Sehr beliebt ist auch die Methode, eine Permutationen in Form eines **Schlüsselworts** (oder einer aus mehreren Wörtern bestehenden **Schlüsselphrase**) im Gedächtnis zu behalten. Aus einem solchen Schlüsselwort lässt sich die zugehörige Permutation σ leicht rekonstruieren, indem man das Wort auf Papier schreibt und in der Zeile darunter für jeden einzelnen Buchstaben seine Position i innerhalb des Wortes vermerkt.

Schlüsselwort für σ	C A E S A R
i	1 2 3 4 5 6
$\sigma(i)$	3 1 4 6 2 5
Zyklendarstellung von σ	(1 3 4 6 5 2)

DIE BLOCKLÄNGE IST SECHS $\leadsto$
 EDBOIL L CANKE IGSSET EXCSYH

Die Werte $\sigma(i)$, die σ auf diesen Nummern annimmt, werden nun dadurch ermittelt, dass man die Schlüsselwort-Buchstaben in alphabetischer Reihenfolge durchzählt. Dabei werden mehrfach vorkommende Buchstaben gemäß ihrer Position im Schlüsselwort an die Reihe genommen. Alternativ kann man auch alle im Schlüsselwort wiederholt vorkommenden Buchstaben streichen, was im Fall des Schlüsselworts **CAESAR** auf eine Blocklänge von 5 führen würde.

Wir wenden uns nun der Klassifikation von Substitutionschiffren zu. Ein wichtiges Unterscheidungsmerkmal ist z.B. die Länge der Klartexteinheiten, auf denen die Chiffre operiert.

Monografische Substitutionen ersetzen Einzelbuchstaben.

Polygrafische Substitutionen ersetzen dagegen aus mehreren Zeichen bestehende Klartextsegmente auf einmal.

Eine polygrafische Substitution, die auf Buchstabenpaaren operiert, wird **digrafisch** genannt. Das älteste bekannte polygrafische Chiffrierverfahren wurde von Giovanni Porta im Jahr 1563 veröffentlicht. Dabei werden je zwei aufeinanderfolgende Klartextbuchstaben durch ein einzelnes Kryptotextzeichen ersetzt.

Beispiel 44. Bei der **Porta-Chiffre** werden 400 (!) unterschiedliche von Porta für diesen Zweck entworfene Kryptotextzeichen verwendet. Diese sind in einer 20×20 -Matrix $M = (y_{ij})$ angeordnet, deren Zeilen und Spalten mit den 20 Klartextbuchstaben A, ..., I, L, ..., T, V, Z indiziert sind. Zur Ersetzung des Buchstabenpaars $a_i a_j$ wird das in Zeile i und Spalte j befindliche Kryptotextzeichen

$$E(M, a_i a_j) = y_{ij}$$

benutzt.

◀

Eine Substitution heißt **monopartit**, falls sie die Klartextsegmente durch Einzelzeichen ersetzt, sonst **multipartit**. Wird der Kryptotext aus Buchstabenpaaren zusammengesetzt, so spricht man von einer **bipartiten** Substitution.

Ein frühes (monografisches) Beispiel einer bipartiten Chiffriermethode geht auf Polybios (circa 200 – 120 v. Chr.) zurück:

	0	1	2	3	4
0	A	B	C	D	E
1	F	G	H	I	J
2	K	L	M	N	O
3	P	Q	R	S	T
4	U	V	W	X/Y	Z

POLYBIOS $\rightsquigarrow$ 30 24 21 43 01 13 24 33

Bei der **Polybios-Chiffre** dient eine 5×5 -Matrix, die aus sämtlichen Klartextbuchstaben gebildet wird, als Schlüssel.[§] Die Verschlüsselung des Klartextes erfolgt buchstabenweise, indem man einen in Zeile i und Spalte j eingetragenen Klartextbuchstaben durch das Koordinatenpaar ij ersetzt. Der Kryptotextraum besteht also aus den Ziffernpaaren $\{00, 01, \dots, 44\}$.

Die Frage, ob bei der Ersetzung der einzelnen Segmente des Klartextes eine einheitliche Strategie verfolgt wird oder ob diese von Segment zu Segment verändert wird, führt uns auf ein weiteres wichtiges Unterscheidungsmerkmal bei Substitutionen.

Monoalphabetische Substitutionen ersetzen die einzelnen Klartextsegment unabhängig von ihrer Position im Klartext.

Polyalphabetische Substitutionen verwenden dagegen eine variable Ersetzungsregel, auf die sich auch die bereits verarbeiteten Klartextsegmente auswirken.

Die Bezeichnung „monoalphabetisch“ bringt zum Ausdruck, dass der Ersetzungsmechanismus auf einem einzelnen Alphabet beruht (sofern wir das Klartextalphabet als bekannt voraussetzen). Die von Caesar benutzte Chiffriermethode kann beispielsweise vollständig durch Angabe des Ersetzungsalphabets

$$\{D, E, F, G, W, \dots, Y, Z, A, B, C\}$$

beschrieben werden. Auch im Fall, dass nicht einzelne Zeichen, sondern ganze Buchstabengruppen auf einmal ersetzt werden, genügt im Prinzip ein einzelnes Alphabet zur Beschreibung. Hierzu sortiert man die Klartexteinheiten, auf denen der Ersetzungsmechanismus operiert, und bildet die Folge (sprich: das Alphabet) der zugeordneten Kryptotextsegmente.

Monoalphabetische Chiffrierverfahren ersetzen meist Texteinheiten einer festen Länge $l \geq 1$ durch Kryptotextsegmente derselben Länge.

Definition 45 (Blockchiffre). Sei A ein beliebiges Alphabet und es gelte $M = C = A^l$, $l \geq 1$. Eine **Blockchiffre** realisiert für jeden Schlüssel $k \in K$ eine bijektive Abbildung g auf A^l und es gilt

$$E(k, x) = g(x) \quad \text{und} \quad D(k, y) = g^{-1}(y)$$

für alle $x \in M$ und $y \in C$. Im Fall $l = 1$ spricht man auch von einer **einfachen Substitutionschiffre**.

Polyalphabetische Substitutionen greifen im Wechsel auf verschiedene Ersetzungsalphabete zurück, so dass unterschiedliche Vorkommen eines Zeichens (oder einer Zeichenkette) auch auf unterschiedliche Art ersetzt werden können. Welches Ersetzungsalphabet wann an der Reihe ist, wird dabei in Abhängigkeit von der Länge oder der Gestalt des bereits verarbeiteten Klartextes bestimmt.

[§]Da nur 25 Plätze zur Verfügung stehen, muss bei Benutzung des lateinischen Alphabets entweder ein Buchstabe weggelassen oder ein Platz mit zwei Buchstaben besetzt werden.

Fast alle polyalphabetischen Chiffrierverfahren operieren – genau wie monoalphabetische Substitutionen – auf Klartextblöcken einer festen Länge l , die sie in Kryptotextblöcke einer festen Länge l' überführen, wobei meist $l = l'$ ist. Da diese Blöcke jedoch vergleichsweise kurz sind, kann der Klartext der Chiffrierfunktion ungepuffert zugeführt werden. Man nennt die einzelnen Klartextblöcke in diesem Zusammenhang auch nicht ‚Blöcke‘ sondern ‚Zeichen‘ und spricht von **sequentiellen Chiffren** oder von **Stromchiffren**.

Definition 46 (Stromchiffre). Sei A ein beliebiges Alphabet und sei $M = C = A^l$ für eine natürliche Zahl $l \geq 1$. Weiterhin seien K und $\hat{K}$ Schlüsselräume. Eine **Stromchiffre** wird durch eine Verschlüsselungsfunktion $E : \hat{K} \times M \rightarrow C$ und einen Schlüsselstromgenerator $g : K \times A^* \rightarrow \hat{K}$ beschrieben. Der Generator g erzeugt aus einem externen Schlüssel $k \in K$ für einen Klartext $x = x_0 \dots x_{n-1}$, $x_i \in M$, eine Folge $\hat{k}_0, \dots, \hat{k}_{n-1}$ von internen Schlüsseln $\hat{k}_i = g(k, x_0 \dots x_{i-1}) \in \hat{K}$, unter denen x in den Kryptotext

$$E_g(k, x) = E(\hat{k}_0, x_0) \dots E(\hat{k}_{n-1}, x_{n-1})$$

überführt wird.

Der interne Schlüsselraum kann also wie bei der Blockchiffre eine maximale Größe von $(m^l)!$ annehmen (im häufigen Spezialfall $l = 1$ also $m!$). Die Aufgabe des Schlüsselstromgenerators g besteht darin, aus dem externen Schlüssel k und dem bereits verarbeiteten Klartext $x_0 \dots x_{i-1}$ den aktuellen internen Schlüssel $\hat{k}_i$ zu berechnen. Die bisher betrachteten Stromchiffren benutzen z.B. die folgenden Schlüsselstromgeneratoren.

Stromchiffre	Chiffrierfunktionen	Schlüsselstromgenerator
Vigenère	$E(\hat{k}, x) = x + \hat{k}$	$g(k_0 \dots k_{d-1}, x_0 \dots x_{i-1}) = k_{(i \bmod m)}$
Beaufort	$E(\hat{k}, x) = \hat{k} - x$	$g(k_0 \dots k_{d-1}, x_0 \dots x_{i-1}) = k_{(i \bmod m)}$
Autokey mit Klartext- Schlüsselstrom	$E(\hat{k}, x) = x + \hat{k}$	$g(k_0 \dots k_{d-1}, x_0 \dots x_{i-1}) = \begin{cases} k_i, & i < d \\ x_{i-d}, & i \geq d \end{cases}$
Autokey mit Kryptotext- Schlüsselstrom	$E(\hat{k}, x) = x + \hat{k}$	$g(k_0 \dots k_{d-1}, x_0 \dots x_{i-1}) = \begin{cases} k_i, & i < d \\ y_{i-d}, & i \geq d \end{cases}$ $= k_{(i \bmod d)} + \sum_{j=1}^{\lfloor i/d \rfloor} x_{i-jd}$

Bei der Vigenère- und Beaufortchiffre hängt der Schlüsselstrom nicht vom Klartext, sondern nur vom externen Schlüssel k ab, d.h. sie sind **synchron**. Die Autokey-Chiffren sind dagegen **asynchron** (und aperiodisch).

Gespreizte Substitutionen

Bei den bisher betrachteten Substitutionen haben die einzelnen Blöcke, aus denen der Kryptotext zusammengesetzt wird, eine einheitliche Länge. Es liegt nahe, einem Gegner die unbefugte Rekonstruktion des Klartextes dadurch zu erschweren, dass man Blöcke unterschiedlicher Länge verwendet. Man spricht hierbei auch von einer **Spreizung** (*straddling*) des Kryptotextalphabets. Ein bekanntes Beispiel für diese Technik ist die sogenannte Spionage-Chiffre, die vorzugsweise von der ehemaligen sowjetischen Geheimpolizei NKWD (*Naródný Komissariát Wnutrennich Del*; zu deutsch: Volkskommissariat des Innern) benutzt wurde.

Beispiel 47. Bei der **Spionage-Chiffre** wird in die erste Zeile einer 3×10 -Matrix ein Schlüsselwort w geschrieben, welches keinen Buchstaben mehrfach enthält und eine Länge von 6 bis 8 Zeichen hat (also zum Beispiel **SPIONAGE**). Danach werden die anderen beiden Zeilen der Matrix mit den restlichen Klartextbuchstaben (etwa in alphabetischer Reihenfolge) gefüllt.

	4	1	9	6	0	3	2	7	5	8
	S	P	I	O	N	A	G	E		
8	B	C	D	F	H	J	K	L	M	Q
5	R	T	U	V	W	X	Y	Z		

GESPREIZT
 $\leadsto$ 274154795751

<

Man überzeugt sich leicht davon, dass sich die von der Spionage-Chiffre generierten Kryptotexte wieder eindeutig dechiffrieren lassen, da die Kryptotextsegmente 1, 2, ..., 8, 01, 02, ..., 08, 91, 92, ..., 98, die für die Klartextbuchstaben eingesetzt werden, die **Fano-Bedingung** erfüllen: Keines von ihnen bildet den Anfang eines anderen. Da die Nummern 5 und 8 der beiden letzten Spalten der Matrix auch als Zeilennummern verwendet werden, liefert dies auch eine Erklärung dafür, warum keine Schlüsselwortbuchstaben in die beiden letzten Spalten eingetragen werden dürfen.

Verwendung von Blendern und Homophonen

Die Verwendung von gespreizten Chiffren zielt offenbar darauf ab, die „**Fuge**“ zwischen den einzelnen Kryptotextsegmenten, die von unterschiedlichen Klartextbuchstaben herühren, zu verdecken, um dem Gegner eine unbefugte Dechiffrierung zu erschweren. Dennoch bietet die Spionage-Chiffre noch genügend Angriffsfläche, da im Klartext häufig vorkommende Wortmuster auch im Kryptotext zu Textwiederholungen führen.

Eine Möglichkeit, diese Muster aufzubrechen, besteht darin, Blender in den Klartext einzustreuen. Abgesehen davon, dass das Entfernen der Blender auch für den rechtmäßigen Empfänger mit Mühe verbunden ist, muss für den Zugewinn an Sicherheit auch mit einer Expansion des Kryptotextes bezahlt werden.

Ist man bereit, dies in Kauf zu nehmen, so gibt es auch noch eine wirksamere Methode, die Übertragung struktureller und statistischer Klartextmerkmale auf den Kryptotext abzumildern. Die Idee dabei ist, zur Chiffrierung der einzelnen Klartextzeichen a nicht nur jeweils eines, sondern eine Menge $H(a)$ von Chiffrezeichen vorzusehen, und daraus für jedes Vorkommen von a im Klartext eines auszuwählen (am besten zufällig). Da alle Zeichen in $H(a)$ für dasselbe Klartextzeichen stehen, werden sie auch **Homophone** genannt.

Definition 48 (homophonen Substitutionschiffre). Sei A ein Klartextalphabet und sei $M = A$. Weiter sei C ein Kryptotextraum der Größe $\|C\| > \|A\| = m$. In einer (einfachen) **homophonen Substitutionschiffre** beschreibt jeder Schlüssel $k \in K$ eine Zerlegung von C in m disjunkte Mengen $H(a)$, $a \in A$.

Um ein Zeichen $a \in A$ unter k zu chiffrieren, wird nach einer bestimmten Methode ein Homophon y aus der Menge $H(a)$ gewählt und für a eingesetzt.

Durch den Einsatz einer homophonen Substitution wird also erreicht, dass verschiedene Vorkommen eines Klartextzeichens auch auf unterschiedliche Weise ersetzt werden können.

Damit der Empfänger den Kryptotext auch wieder eindeutig dechiffrieren kann, dürfen sich die Homophonmengen zweier verschiedener Klartextzeichen aber nicht überlappen. Daher kann es nicht vorkommen, dass zwei verschiedene Klartextbuchstaben durch dasselbe Geheimtextzeichen ersetzt werden. Man beachte, dass der Chiffriervorgang $x \mapsto E(k, x)$ nicht durch eine Funktion beschreibbar ist, da derselbe Klartext x in mehrere verschiedene Kryptotexte y übergehen kann.

Durch eine geringfügige Modifikation der Polybios-Chiffre lässt sich die folgende bipartite homophone Chiffre erhalten.

Beispiel 49 (homophone Substitution). Sei $A = \{A, \dots, Z\}$, $B = \{0, \dots, 9\}$ und $C = \{00, \dots, 99\}$.

	1,0 2,9 3,8 4,7 5,6				
1,6	A	F	K	P	U
2,7	B	G	L	Q	V
3,8	C	H	M	R	W
4,9	D	I	N	S	X/Y
5,0	E	J	O	T	Z

HOMOPHON $\leadsto$ 82 03 88 53 17 32 08 98

Genau wie bei Polybios wird eine 5×5 -Matrix M als Schlüssel benutzt. Die Zeilen und Spalten von M sind jedoch nicht nur mit jeweils einer, sondern mit zwei Ziffern versehen, so dass jeder Klartextbuchstabe x über vier verschiedene Koordinatenpaare ansprechbar ist. Der Kryptotextraum wird durch M also in 25 Mengen $H(a)$, $a \in A$, mit je 4 Homophonen partitioniert. $\triangleleft$

Wie wir noch sehen werden, sind homophone Chiffrierungen auch deshalb schwerer zu brechen, weil durch sie die charakteristische Häufigkeitsverteilung der Klartextbuchstaben zerstört wird. Dieser Effekt kann dadurch noch verstärkt werden, dass man für häufig vorkommende Klartextzeichen a eine entsprechend größere Menge $H(a)$ an Homophonen vorsieht. Damit lässt sich erreichen, dass die Verteilung der im Geheimtext auftretenden Zeichen weitgehend nivelliert wird.

Beispiel 50 (homophone Substitution, verbesserte Version). Ist $p(a)$ die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Zeichen $a \in A$ in der Klartextsprache auftritt, so sollte $\|H(a)\| \approx 100 \cdot p(a)$ sein.

a	$p(a)$	$H(a)$
A	0.0647	{15, 26, 44, 59, 70, 79}
B	0.0193	{01, 84}
C	0.0268	{13, 28, 75}
D	0.0483	{02, 17, 36, 60, 95}
E	0.1748	{04, 08, 12, 30, 43, 46, 47, 53, 61, 67, 69, 72, 80, 86, 90, 92, 97}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Da der Buchstabe **A** im Deutschen beispielsweise mit einer Wahrscheinlichkeit von $p(\mathbf{A}) = 0.0647$ auftritt, sind für ihn sechs verschiedene Homophone vorgesehen. $\triangleleft$

Um den Suchaufwand bei der Dechiffrierung zu reduzieren, empfiehlt es sich, eine 10×10 -Matrix anzulegen, in der jeder Klartextbuchstabe a an allen Stellen vorkommt, deren Koordinaten in $H(a)$ enthalten sind.

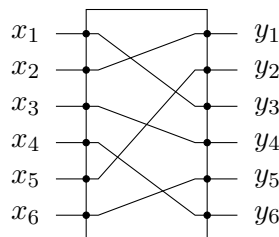
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	N	E	C	S	A	O	D	X	I	N
2	R	G	S	N	N	A	U	C	H	Y
3	T	L	I	O	U	D	Z	M	N	E
4	H	R	E	A	N	E	E	S	I	T
5	N	I	E	T	P	H	S	L	A	R
6	E	U	M	F	R	J	E	N	E	D
7	N	E	K	S	C	T	I	T	A	A
8	H	N	I	B	R	E	U	G	V	E
9	T	E	L	S	D	R	E	O	S	E
0	B	D	W	E	Q	I	F	E	I	R

HOMOPHON $\rightsquigarrow$ 5698633455291668

Offenbar kann man diese Matrix auch zur Chiffrierung benutzen, was sogar den positiven Nebeneffekt hat, dass dadurch eine zufällige Wahl der Homophone begünstigt wird.

1.8 Realisierung von Blocktranspositionen und einfachen Substitutionen

Abschließend möchten wir eine einfache elektronische Realisierungsmöglichkeit von Blocktranspositionen erwähnen, die auf binär kodierten Klartexten operieren (d.h. $A = \{0, 1\}$). Um einen Binärblock $x_1 \cdots x_l$ der Länge l zu permutieren, müssen die einzelnen Bits lediglich auf l Leitungen gelegt und diese gemäß π in einer sogenannten **Permutationsbox** (kurz **P-Box**) vertauscht werden.



Die Implementierung einer solchen P-Box kann beispielsweise auf einem VLSI-Chip erfolgen. Allerdings kann hierbei für größere Werte von l aufgrund der hohen Zahl von Überkreuzungspunkten ein hoher Flächenbedarf anfallen.

Blocktranspositionen können auch leicht durch Software als eine Folge von Zuweisungen

$$Y1 := X2; \quad Y2 := X5; \quad \dots \quad Y6 := X4;$$

implementiert werden. Bei großer Blocklänge und sequentieller Abarbeitung erfordert diese Art der Implementierung jedoch einen relativ hohen Zeitaufwand.

Von Alberti stammt die Idee, das Klartext- und Kryptotextalphabet auf zwei konzentrischen Scheiben unterschiedlichen Durchmessers anzuordnen. In Abbildung 1.1 ist gezeigt, wie sich mit einer solchen Drehscheibe beispielsweise die additive Chiffre realisieren lässt. Zur Einstellung des Schlüssels k müssen die Scheiben so gegeneinander verdreht werden, dass der Schlüsselbuchstabe a_k auf der inneren Scheibe mit dem Klartextzeichen $a_0 = A$ auf der äußeren Scheibe zur Deckung kommt. Auf der Drehscheibe in Abbildung 1.1 ist beispielsweise der Schlüssel $k = 2$ eingestellt, das heißt, $a_k = C$. Die Verschlüsselung geschieht nun durch bloßes Ablesen der zugehörigen Kryptotextzeichen auf der inneren

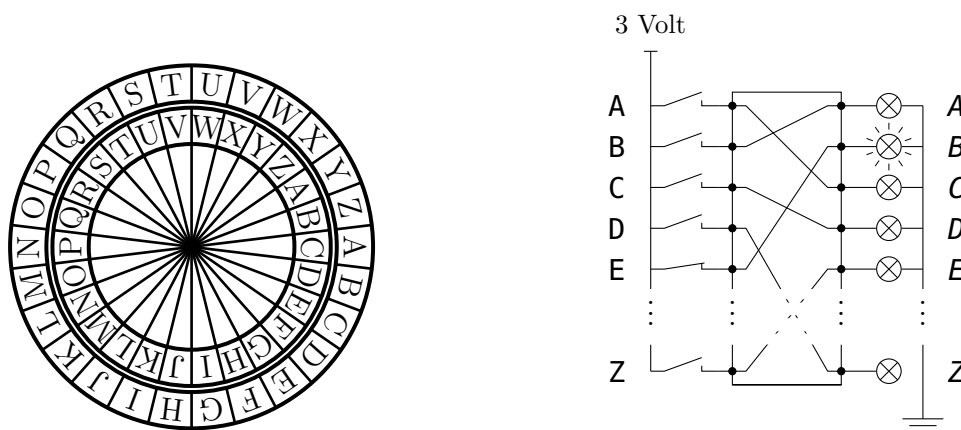


Abbildung 1.1: Realisierung von einfachen Substitutionen mit einer Drehscheibe und mit Hilfe von Steckverbindungen.

Scheibe, so dass von der Drehfunktion der Scheiben nur bei einem Schlüsselwechsel Gebrauch gemacht wird.

Aufgrund ihrer engen Verwandtschaft mit der Klasse der Blocktranspositionen lassen sich einfache Substitutionen auch mit Hilfe einer P-Box realisieren. Hierfür können beispielsweise zwei Steckkontakteleisten verwendet werden. Der aktuelle Schlüssel wird in diesem Fall durch Verbinden der entsprechenden Kontakte mit elektrischen Kabeln eingestellt (siehe Abbildung 1.1). Um etwa den Klartextbuchstaben **E** zu verschlüsseln, drückt man auf die entsprechende Taste, und das zugehörige Kryptotextzeichen **B** wird im selben Moment durch ein aufleuchtendes Lämpchen signalisiert.

Schließlich lassen sich Substitutionen auch leicht durch Software realisieren. Hierzu wird ein Feld (*array*) deklariert, dessen Einträge über die Klartextzeichen $x \in A$ adressierbar sind. Das mit x indizierte Feldelemente enthält das Kryptotextzeichen, durch welches x beim Chiffriervorgang zu ersetzen ist.

Ein Nachteil hierbei ist, dass das Feld nach jedem Schlüsselwechsel neu beschrieben werden muss. Um dies zu umgehen, kann ein zweidimensionales Feld deklariert werden, dessen Einträge zusätzlich über den aktuellen Schlüsselwert k adressierbar sind. Ist genügend Speicherplatz vorhanden, um für alle $x \in A$ und alle $k \in K$ die zugehörigen Kryptotextzeichen $E(k, x)$ abspeichern zu können, so muss das Feld nur einmal initialisiert und danach nicht mehr geändert werden.

Schlüssel- wert	Klartextbuchstabe			
	A	B	...	Z
0	U	H	...	C
1	E	H	...	A
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
63	Y	F	...	W

2 Kryptoanalyse der klassischen Verfahren

2.1 Klassifikation von Angriffen gegen Kryptosysteme

Die Erfolgsaussichten eines Angriffs gegen ein Kryptosystem hängen sehr stark davon ab, wie gut die Ausgangslage ist, in der sich der Gegner befindet. Prinzipiell sollte man die Fähigkeiten des Gegners genauso wenig unterschätzen wie die Unvorsichtigkeit der Anwender von Kryptosystemen. Bereits vor mehr als einem Jahrhundert postulierte Kerckhoffs, dass die Frage der Sicherheit keinesfalls von irgendwelchen obskuren Annahmen über den Wissensstand des Gegners abhängig gemacht werden darf.

Goldene Regel für Kryptosystem-Designer (Kerckhoffs' Prinzip)

*Unterschätze niemals den Kryptoanalytiker. Gehe insbesondere immer von der Annahme aus, dass dem Gegner das angewandte System bekannt ist.**

In der folgenden Liste sind eine Reihe von Angriffsszenarien mit zunehmender Gefährlichkeit aufgeführt. Auch wenn nicht alle Eventualitäten eines Angriffs vorhersehbar sind, so vermittelt diese Aufstellung doch eine gute Vorstellung davon, welchen unterschiedlichen Bedrohungen ein Kryptosystem im praktischen Einsatz ausgesetzt sein kann.

Angriff bei bekanntem Kryptotext (*ciphertext-only attack*)

Der Gegner fängt Kryptotexte ab und versucht, allein aus ihrer Kenntnis Rückschlüsse auf die zugehörigen Klartexte oder auf die benutzten Schlüssel zu ziehen.

Angriff bei bekanntem Klartext (*known-plaintext attack*)

Der Gegner ist im Besitz von einigen zusammengehörigen Klartext-Kryptotext-Paaren. Hierdurch wird erfahrungsgemäß die Entschlüsselung weiterer Kryptotexte oder die Bestimmung der benutzten Schlüssel wesentlich erleichtert.

Angriff bei frei wählbarem Klartext (*chosen-plaintext attack*)

Der Angriff des Gegners wird zusätzlich dadurch erleichtert, dass er in der Lage ist (oder zumindest eine Zeit lang war), sich zu Klartexten seiner Wahl die zugehörigen Kryptotexte zu besorgen. Kann hierbei die Wahl der Klartexte in Abhängigkeit von zuvor erhaltenen Verschlüsselungsergebnissen getroffen werden, so spricht man von einem **Angriff bei adaptiv wählbarem Klartext (*adaptive chosen-plaintext attack*)**.

Angriff bei frei wählbarem Kryptotext (*chosen-ciphertext attack*)

Vor der Beobachtung des zu entschlüsselnden Kryptotextes konnte sich der Gegner zu Kryptotexten seiner Wahl die zugehörigen Klartexte besorgen, ohne dabei jedoch in den Besitz des Dechiffrierschlüssels zu kommen (**Mitternachtsattacke**). Das dabei erworbene Wissen steht ihm nun bei der Durchführung seines Angriffs zur Verfügung. Auch in diesem Fall können sich die Erfolgsaussichten des Gegners erhöhen, wenn ein **Angriff bei adaptiv wählbarem Kryptotext (*adaptive chosen-ciphertext attack*)** möglich ist, also der Kryptotext in Abhängigkeit von den zuvor erzielten Entschlüsselungsergebnissen wählbar ist.

*Diese Annahme ergibt sich meist schon aus der Tatsache, dass die Prinzipien fast aller heute im Einsatz befindlichen Kryptosysteme allgemein bekannt sind.

Angriff bei frei (oder adaptiv) wählbarem Text (*chosen-text attack*)

Sowohl Klartexte als auch Kryptotexte sind frei (oder sogar adaptiv) wählbar.

Ohne Frage ist ein Kryptosystem, das bereits bei einem Angriff mit bekanntem Kryptotext Schwächen erkennen lässt, für den praktischen Einsatz vollkommen ungeeignet. Tatsächlich müssen aber an ein praxistaugliches Kryptosystem noch weit höhere Anforderungen gestellt werden. Denn häufig unterlaufen den Anwendern sogenannte **Chiffrierfehler**, die einen Gegner leicht in eine sehr viel günstigere Ausgangsposition versetzen als dies sonst der Fall wäre. So ermöglicht beispielsweise das Auftreten stereotyper Klartext-Formulierungen einen Angriff bei bekanntem Klartext, sofern der Gegner diese Formulierungen kennt oder auch nur errät. Begünstigt durch derartige Unvorsichtigkeiten, die im praktischen Einsatz nicht vollständig vermeidbar sind, können sich selbst winzige Konstruktionsschwächen eines Kryptosystems sehr schnell zu einer ernsthaften Bedrohung der damit verfolgten Sicherheitsinteressen auswachsen. Die Geschichte der Kryptografie belegt sehr eindrucksvoll, dass es häufig die Anwender eines Kryptosystems selbst sind, die – im unerschütterlichen Glauben an seine kryptografische Stärke – dem Gegner zum Erfolg verhelfen.

Zusammenfassend lässt sich also festhalten, dass die Gefährlichkeit von Angriffen, denen ein Kryptosystem im praktischen Einsatz ausgesetzt ist, kaum zu überschätzen ist. Andererseits kann selbst das beste Kryptosystem keinen Schutz vor einer unbefugten Dechiffrierung mehr bieten, wenn es dem Gegner etwa gelingt, in den Besitz des geheimen Schlüssels zu kommen – sei es aus Unachtsamkeit der Anwender oder infolge einer Gewaltandrohung des Gegners (**kompromittierte Schlüssel**).

2.2 Kryptoanalyse von einfachen Substitutionschiffren

Durch eine Häufigkeitsanalyse können insbesondere einfache Substitutionen g leicht gebrochen werden, sofern die einzelnen Buchstaben a in der benutzten Klartextsprache mit voneinander differierenden Häufigkeiten $p(a)$ auftreten (vergleiche Tabelle 2.1). Selbst wenn, was insbesondere bei kurzen Texten zu erwarten ist, die tatsächliche Häufigkeitsverteilung nur in etwa der vom Gegner angenommenen Verteilung entspricht, reduziert sich dadurch die Zahl der in Frage kommenden einfachen Substitutionen ganz erheblich. Berechnet man die relativen Häufigkeiten h der Kryptotextbuchstaben im Kryptotext, so gilt $p(a) \approx h(g(a))$ (vorausgesetzt der Kryptotext ist genügend lang). Für die Schilderung einer nach dieser Methode durchgeführten Kryptoanalyse sei auf die Erzählung „Der Goldkäfer“ von Edgar Allan Poe verwiesen.

Tabelle 2.1: Einteilung von Buchstaben in Cliques mit vergleichbaren Häufigkeitswerten.

	Deutsch	Englisch	Französisch
sehr häufig	E	E	E
häufig	N I R S A T	T A O I N S R H	N A R S I T U
durchschnittlich	D H U L G O C M	L D C U M F	L D C M P
selten	B F W K Z P V	P G W Y B V K	V F B G Q H X
sehr selten	J Y X Q	X J Q Z	J Y Z K W

Manche der bisher betrachteten Chiffrierverfahren verwenden einen so kleinen Schlüsselraum, dass ohne großen Aufwand eine vollständige Schlüsselsuche ausgeführt werden kann.

Beispiel 51 (vollständige Schlüsselsuche). *Es sei bekannt, dass das Kryptotextstück $y = \text{SAXP}$ mit einer additiven Chiffre erzeugt wurde ($K = A = B = A_{\text{lat}}$). Entschlüsseln wir y probeweise mit allen möglichen Schlüsselwerten, so erhalten wir folgende Zeichenketten.*

k	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
$D(k, y)$	RZWO	QYVN	PXUM	OWTL	NVSK	MURJ	LTQI	KSPH	JROG	IQNF	HPME	GOLD
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
FNKC	EMJB	DLIA	CKHZ	BJGY	AIFX	ZHEW	YGDV	XFCU	WEBT	VDAS	UCZR	TBYQ

Unter diesen springen vor allem die beiden Klartextkandidaten $x = \text{GOLD}$ (Schlüsselwert $k = M$) und $x = \text{WEBT}$ ($k = W$) ins Auge. ◁

Ist $s = \|K\|$ die Größe des Schlüsselraums, so kann der Gegner bei bekanntem Kryptotext y die Suche nach dem zugehörigen Klartext x auf eine Menge von maximal s Texten $x_1, \dots, x_s$ beschränken. Daneben hat der Gegner ein gewisses *a priori* Wissen über den Klartext, wie zum Beispiel dass er in deutscher Sprache verfasst ist, das es ihm gestattet, einen Großteil der Texte x_i auszuschließen. Ferner erscheinen aufgrund dieses Hintergrundwissens manche der übrig gebliebenen Klartextkandidaten plausibler als andere (sofern nicht nur ein einziger übrig bleibt). Mit jedem Text x_i , der nicht als Klartext in Frage kommt, kann auch mindestens ein Schlüssel ausgeschlossen werden. Sind noch mehrere Schlüsselwerte möglich, so kann weiteres Kryptotextmaterial Klarheit bringen. Manchmal hilft aber auch eine Inspektion der verbliebenen Schlüsselwerte weiter, etwa wenn der Schlüssel nicht rein zufällig erzeugt wurde, sondern aus einem einprägsamen Schlüsselwort ableitbar ist.

Meist kennt der Gegner zumindest die Sprache, in der der gesuchte Klartext abgefasst ist. Mit zunehmender Länge gleichen sich die Häufigkeitsverteilungen der Buchstaben in natürlichsprachigen Texten einer „Grenzverteilung“ an, die in erster Linie von der benutzten Sprache und nur in geringem Umfang von der Art des Textes abhängt. Diese Verteilungen weisen typischerweise eine sehr starke Ungleichmäßigkeit auf, was darauf zurückzuführen ist, dass in natürlichen Sprachen relativ viel Redundanz enthalten ist.

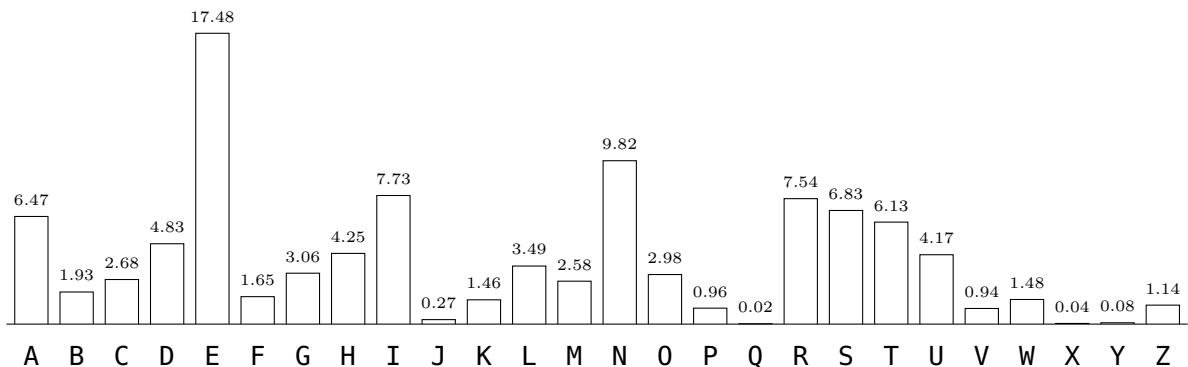


Abbildung 2.1: Häufigkeitsverteilung der Einzelbuchstaben im Deutschen (in %).

Die Abbildungen 2.1, 2.2 und 2.3, zeigen typische Verteilungen von Einzelbuchstaben in der deutschen, englischen und französischen Sprache (ohne Berücksichtigung von

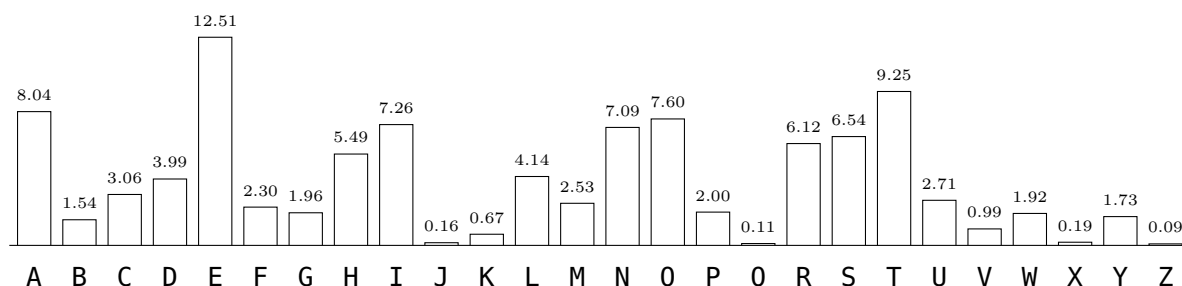


Abbildung 2.2: Häufigkeitsverteilung der Buchstaben im Englischen (in %).

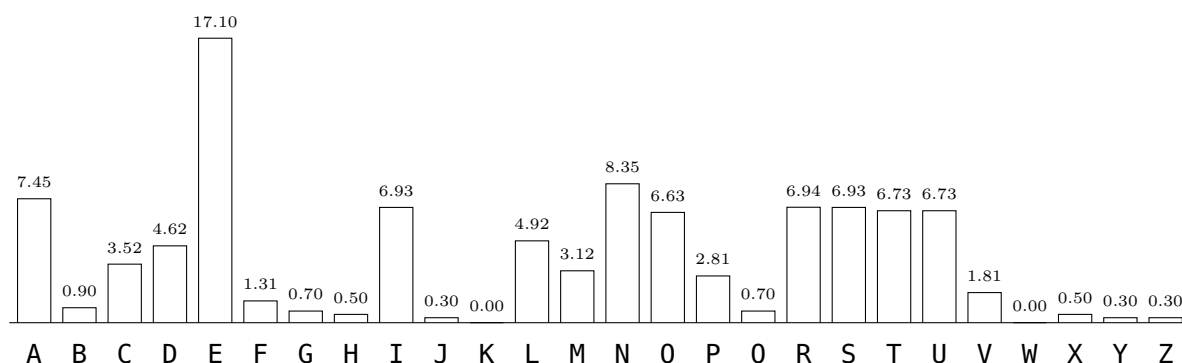


Abbildung 2.3: Häufigkeitsverteilung der Buchstaben im Französischen (in %).

Interpunktions- und Leerzeichen). Ein typischer deutscher Text besteht demnach zu 62% aus den sieben häufigsten Zeichen E, N, I, R, S, A, T (das sind nicht einmal 27% der Klartextzeichen).

Bei additiven Chiffren reicht es oftmals, den häufigsten Buchstaben im Kryptotext zu bestimmen, und davon den häufigsten Buchstaben der Klartextsprache zu subtrahieren, um den Schlüssel k zu erhalten. Bei affinen Chiffren müssen gewöhnlich nur die beiden häufigsten Buchstaben bestimmt werden; dadurch erhält man zwei Verschlüsselungsgleichungen. Dieses Gleichungssystem muss gelöst werden, und man erhält das gesuchte Schlüsselpaar.

Beispiel 52 (Analyse einer affinen Chiffre mittels Buchstabenhäufigkeiten). *Es sei bekannt, dass sich hinter dem Kryptotext*

*laoea ehoap hwvae ixobg jcbho thlob lokhe ixope vbcix ockix qoppo boapo
mohqc euogk opeho jhkpl eappj seobe ixoap opmcu*

ein deutscher Klartext verbirgt, der mit einer affinen Chiffre verschlüsselt wurde. Berechnen wir für jedes Chiffrezeichen b die (absolute) Häufigkeit $H_y(b)$ seines Auftretens in obigem Kryptotext y ,

b	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
$H(b)$	7	6	5	0	10	0	2	8	5	3	4	4	2	0	19	11	2	0	1	1	2	2	1	5	0	0

so liegt die Vermutung nahe, dass das am häufigsten vorkommende Chiffrezeichen O für das Klartextzeichen E und das am zweithäufigsten vorkommende P für N steht. Unter

dieser Annahme kann der gesuchte Schlüssel $k = (b, c)$ als Lösung der beiden Gleichungen

$$b \cdot \mathbf{E} + c = \mathbf{0}$$

$$b \cdot \mathbf{N} + c = \mathbf{P}$$

bestimmt werden. Subtrahieren wir nämlich die erste von der zweiten Gleichung, so erhalten wir die Kongruenz $9 \cdot b \equiv_{26} 1$, woraus sich $b = 3$ und damit $c = 2$ ergibt. Tatsächlich weist der Schlüssel $k = (3, 2)$ nicht nur für die beiden Paare $(\mathbf{E}, \mathbf{0})$ und $(\mathbf{N}, \mathbf{P})$, sondern auch für alle übrigen Paare (a, b) eine gute Übereinstimmung zwischen der Häufigkeit $H_y(b)$, mit der $b = E(k, a)$ im Kryptotext vorkommt, und der erwarteten Häufigkeit $H_{100}(a)$ auf, mit der a in einem typischen deutschen Text der Länge 100 vorkommt (die Tabelle zeigt die Werte von $H_{100}(a)$ gerundet):

b	$\mathbf{0}$	$\mathbf{P}$	$\mathbf{E}$	$\mathbf{H}$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{C}$	$\mathbf{X}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{L}$	$\mathbf{K}$	$\mathbf{J}$	$\mathbf{U}$	$\mathbf{M}$	$\mathbf{G}$	$\mathbf{V}$	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{S}$	$\mathbf{T}$	$\mathbf{W}$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{N}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Y}$	$\mathbf{D}$
$H_y(b)$	19	11	10	8	7	6	5	5	5	4	4	3	2	2	2	2	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0
$H_{100}(a)$	17	10	7	6	8	8	6	4	3	5	4	3	3	3	1	1	1	3	0	0	2	2	1	1	0	0
a	$\mathbf{E}$	$\mathbf{N}$	$\mathbf{S}$	$\mathbf{T}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{H}$	$\mathbf{C}$	$\mathbf{D}$	$\mathbf{U}$	$\mathbf{L}$	$\mathbf{G}$	$\mathbf{M}$	$\mathbf{K}$	$\mathbf{P}$	$\mathbf{W}$	$\mathbf{O}$	$\mathbf{X}$	$\mathbf{Y}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{V}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{J}$

<

2.3 Kryptoanalyse von Blocktranspositionen

Mit Hilfe von Bigrammhäufigkeiten, die manchmal auch als Kontakthäufigkeiten bezeichnet werden, lassen sich Blocktranspositionen sehr leicht brechen, sofern genügend Kryptotext vorliegt. Ist die Blocklänge l bekannt, so trägt man hierzu den Kryptotext zeilenweise in eine Matrix $S = (s_{ij})$ mit l Spalten $S_1, \dots, S_l$ ein. Da jede Zeile dieser Matrix aus dem zugehörigen Klartextblock mit derselben Permutation π erzeugt wurde, müssen die Spalten S_j jetzt nur noch in die „richtige“ Reihenfolge gebracht werden, um den gesuchten Klartext zu erhalten. Der Nachfolger S_k von S_j (bzw. der Vorgänger S_j von S_k) kann sehr gut anhand der Werte von $\hat{p}(S_j, S_k) = \sum_i p(s_{ij}, s_{ik})$ bestimmt werden.

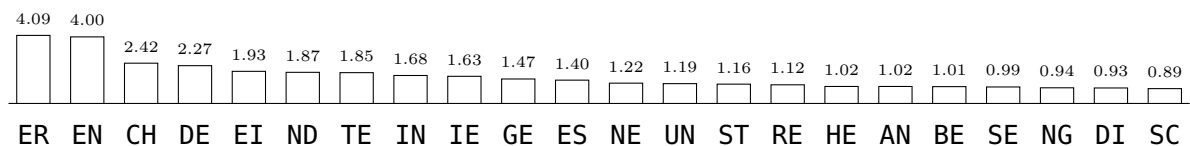


Abbildung 2.4: Die häufigsten Bigramme im Deutschen (Angaben in %).



Abbildung 2.5: Die häufigsten Bigramme im Englischen (in %; nach O.P. Meaker, 1939).

Beispiel 53 (Häufigkeitsanalyse von Bigrammen). Für den mit einer Blocktransposition (mit vermuteter Blocklänge 5) erzeugten Kryptotext

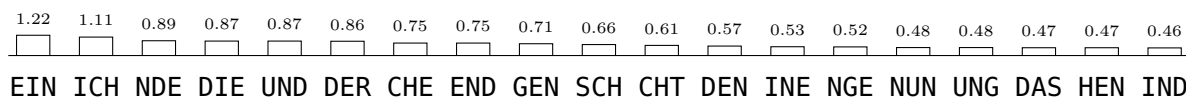


Abbildung 2.6: Die häufigsten Trigramme im Deutschen (in %).



Abbildung 2.7: Die häufigsten Trigramme im Englischen (in %).

IHEHR BWEAN RNEII NRKEU ELNZK RXTAE VLOTR ENGIE

erhalten wir eine Matrix S mit den folgenden fünf Spalten.

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
I	H	E	H	R
B	W	E	A	N
R	N	E	I	I
N	R	K	E	U
E	L	N	Z	K
R	X	T	A	E
V	L	O	T	R
E	N	G	I	E

Um die richtige Vorgänger- oder Nachfolgerspalte von S_1 zu finden, bestimmen wir für jede potentielle Spalte S_j , $j = 2, \dots, 5$, wieviele der Bigramme $s_{ij}s_{i1}$ (bzw. $s_{i1}s_{ij}$) zu den 20 häufigsten (aus Abbildung 2.4) gehören.

					↓	↓					
S_2	S_3	S_4	S_5	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5			
H	E	H	R	I	H	E	H	R			
W	E	A	N	B	W	E	A	N			
N	E	I	I	R	N	E	I	I			
R	K	E	U	N	R	K	E	U			
L	N	Z	K	E	L	N	Z	K			
X	T	A	E	R	X	T	A	E			
L	O	T	R	V	L	O	T	R			
N	G	I	E	E	N	G	I	E			
1	4	2	2		1	4	2	1			

Da die beiden Spaltenpaare (S_3, S_1) und (S_1, S_3) jeweils vier häufige Bigramme bilden, können wir annehmen, dass im Klartext S_1 auf S_3 oder S_3 auf S_1 folgen muss. Entscheiden wir uns für die zweite Möglichkeit, so sollten wir als nächstes die Spaltenpaare (S_j, S_1) und (S_3, S_j) , $j = 2, 4, 5$ betrachten.

S_2	S_4	S_5	S_1	S_3	S_2	S_4	S_5	
H	H	R	I	E	H	H	R	
W	A	N	B	E	W	A	N	
N	I	I	R	E	N	I	I	
R	E	U	N	K	R	E	U	
L	Z	K	E	N	L	Z	K	
X	A	E	R	T	X	A	E	
L	T	R	V	O	L	T	R	
N	I	E	E	G	N	I	E	
1	2	2			1	1	5	

Aufgrund des hohen Wertes von $\hat{p}(S_3, S_5)$ können wir annehmen, dass auf S_3 die Spalte S_5 folgt. Im nächsten Schritt erhalten wir daher die folgende Tabelle.

S_2	S_4	S_1	S_3	S_5	S_2	S_4	
H	H	I	E	R	H	H	
W	A	B	E	N	W	A	
N	I	R	E	I	N	I	
R	E	N	K	U	R	E	
L	Z	E	N	K	L	Z	
X	A	R	T	E	X	A	
L	T	V	O	R	L	T	
N	I	E	G	E	N	I	
1	2				2	1	

Diese lässt die Spaltenanordnung S_4, S_1, S_3, S_5, S_2 vermuten, welche tatsächlich auf den gesuchten Klartext führt:

S_4	S_1	S_3	S_5	S_2	
H	I	E	R	H	
A	B	E	N	W	
I	R	E	I	N	
E	N	K	U	R	
Z	E	N	K	L	
A	R	T	E	X	
T	V	O	R	L	
I	E	G	E	N	

◁

2.4 Kryptoanalyse von polygrafischen Chiffren

Blocksysteme mit kleiner Blocklänge l (beispielsweise bigrafische Systeme) lassen sich ähnlich wie einfache Substitutionen durch Häufigkeitsanalysen brechen. Wird bei Hill-Chiffren l sehr groß gewählt, so ist eine solche statistische Analyse nicht mehr möglich. Das Hill-System kann dann zwar einem Kryptotextangriff widerstehen, jedoch kaum einem Angriff mit bekanntem Klartext und schon gar nicht einem Angriff mit gewähltem Klartext.

Angriff mit gewähltem Klartext O. B. d. A. sei $A = \{0, 1, \dots, m-1\}$. Bei einem GK-Angriff verschafft sich der Gegner den Kryptotext zu $100 \dots 0, 010 \dots 0, \dots, 0 \dots 001 \in A^l$:

$$\begin{aligned} g(100 \dots 0) &= k_{11} k_{12} \dots k_{1l} \\ g(010 \dots 0) &= k_{21} k_{22} \dots k_{2l} \\ &\vdots \\ g(0 \dots 001) &= k_{l1} k_{l2} \dots k_{ll} \end{aligned}$$

und erhält damit die Schlüsselmatrix k .

BK-Angriff (bekannter Klartext). Sind bei einem BK-Angriff ausreichend geeignete Klartext-Kryptotextpaare bekannt, so kann das Hill-System folgendermaßen gebrochen werden: Sind x_i, y_i ($i = 1, \dots, \mu$) Paare mit $x_i k = y_i$ und gilt $\text{ggT}(\det X, m) = 1$ für eine aus l Blöcken $x_i, i \in I$, als Zeilen gebildete Matrix X , so lässt sich die Schlüsselmatrix k zu $k = YX^{-1}$ bestimmen (Y ist die aus den Blöcken $y_i, i \in I$, gebildete Matrix).

2.5 Kryptoanalyse von polyalphabetischen Chiffren

Die Vigenère-Chiffre galt bis ins 19. Jahrhundert als sicher. Da der Schlüsselstrom bei der Vigenère-Chiffre periodisch ist, lassen sie sich mit statistischen Methoden ebenfalls leicht brechen, insbesondere wenn der Kryptotext im Verhältnis zur Periode d (Länge des Schlüsselwortes) genügend lang ist.

Bestimmung der Schlüsselwortlänge

Es gibt mehrere Methoden, eine Vigenère-Chiffre zu brechen, sobald die Länge des Schlüsselwortes bekannt ist. So kann man beispielsweise den Kryptotext zeilenweise in eine d -spaltige Matrix schreiben. Verfahrensbedingt wurden dann die einzelnen Spalten $y_1, \dots, y_d$ durch eine monoalphabetische Substitution (genauer: durch eine Verschiebechiffre) verschlüsselt. Sie können daher einzeln wie eine additive Chiffre durch eine Häufigkeitsanalyse gebrochen werden. Hierbei liefert jede Spalte y_i einen Buchstaben k_i des Schlüsselwortes der Vigenère-Chiffre.

Zur Bestimmung der Schlüsselwortlänge betrachten wir zwei Vorgehensweisen: den Kasiski-Test und die Koinzidenzindex-Untersuchung.

Der Kasiski-Test. Die früheste generelle Methode zur Bestimmung der Periode bei der Vigenère-Chiffre stammt von Friedrich W. Kasiski (1860). Kommt ein Wort an zwei verschiedenen Stellen im Kryptotext vor, so kann es sein, dass die gleiche Klartextsequenz zweimal auf die gleiche Weise, d. h. mit der gleichen Schlüsselsequenz, verschlüsselt wurde. In diesem Fall ist die Entfernung δ der beiden Vorkommen ein Vielfaches der Periode d . Werden mehrere Paare mit verschiedenen Entfernungen δ_i gefunden, so liegt die Vermutung nahe, dass d gemeinsamer Teiler aller (oder zumindest vieler) δ_i ist, was die Anzahl der noch in Frage kommenden Werte für d stark einschränkt.

Beispiel 54 (Kasiski-Test).

$$\begin{array}{ll} \text{DERERSTEUNDLETZTEVERS...} & (\text{Klartext } x) \\ + \text{KASKASKASKASKASKAS...} & (\text{Schlüsselstrom } \hat{k}) \\ \hline \text{NEJORKDEM\ddot{X}DDOTR\ddot{D}ENORK...} & (\text{Kryptotext } y) \end{array}$$

Da die Textstücke **ORK**, bzw. **DE** im Kryptotext in den Entfernungen $\delta_1 = 15$ und $\delta_2 = 9$ vorkommen, liegt die Vermutung nahe, dass die Periode $d = \text{ggT}(9, 15) = 3$ ist. $\triangleleft$

Koinzidenzindex-Untersuchungen. Zur Bestimmung der Periode d gibt es neben heuristischen Methoden auch folgenden statistischen Ansatz, der erstmals von William Frederick Friedman im Jahr 1920 beschrieben wurde. Er basiert auf der Beobachtung, dass eine längere Periode eine zunehmende *Glättung* der Buchstabenhäufigkeiten im Kryptotext bewirkt.

Definition 55 (Koinzidenzindex). Der **Koinzidenzindex** (engl. *index of coincidence*) eines Textes y der Länge n über dem Alphabet $\mathcal{B}$ ist definiert als

$$IC(y) = \frac{1}{n \cdot (n - 1)} \cdot \sum_{a \in \mathcal{B}} H_y(a) \cdot (H_y(a) - 1).$$

Hierbei ist $H_y(a)$ die absolute Häufigkeit des Buchstabens a im Text y .

$IC(y)$ gibt also die Wahrscheinlichkeit an, mit der man im Text y an zwei zufällig gewählten Positionen den gleichen Buchstaben vorfindet. Er ist umso größer, je ungleichmäßiger die Häufigkeiten $H_y(a)$ sind (siehe unten).

Um die Periode d einer Vigenère-Chiffre zu bestimmen, schreibt man den Kryptotext y für $d = 1, 2, 3, \dots$ in eine Matrix mit d Spalten und berechnet für jede Spalte y_i den Koinzidenzindex $IC(y_i)$. Für genügend lange Kryptotexte ist dasjenige d , welches das maximale arithmetische Mittel der Spaltenindizes $IC(y_i)$ liefert mit hoher Wahrscheinlichkeit die gesuchte Periode. Enthält eine Spalte nämlich nur Kryptozeichen, die alle mit demselben Schlüsselbuchstaben k erzeugt wurden, so stimmt der Koinzidenzindex dieser Spalte mit dem Koinzidenzindex des zugehörigen Klartextes überein, nimmt also einen relativ großen Wert an. Wurden dagegen die Kryptozeichen einer Spalte mit unterschiedlichen Schlüsselbuchstaben generiert, so wird hierdurch eine Glättung der Häufigkeitsverteilung bewirkt, weshalb der Spaltenindex kleiner ausfällt.

Ist die Einzelbuchstabenverteilung $p : A \rightarrow [0, 1]$ der Klartextsprache bekannt, so kann der Suchraum für den Wert der Periode d erheblich eingeschränkt werden. Hierzu berechnet man den erwarteten Koinzidenzindex

$$E_{d,n}(IC) = E(IC(Y)),$$

wobei Y ein mittels einer Vigenère-Chiffre mit einem zufälligen Schlüsselwort der Länge d aus einem zufälligen Klartext der Länge n generierter Kryptotext ist. Im Fall $d = 1$ gilt $IC(y) = IC(x)$. Zudem können wir bei längeren Texten von den gegenseitigen Abhängigkeiten der Zeichen im Text absehen und erhalten

$$E_{1,\infty}(IC) = \sum_{a \in A} p(a)^2.$$

Dieser Wert wird auch als Koinzidenzindex der zugrunde liegenden Sprache bezeichnet.

Definition 56 (Koinzidenzindex einer Sprache). Der **Koinzidenzindex** IC_L einer Sprache mit Buchstabenverteilung $p : A \rightarrow [0, 1]$ ist definiert als

$$IC_L = \sum_{a \in A} p(a)^2.$$

IC_L ist zudem ein Maß für die Rauheit der Verteilung p :

Definition 57 (Rauheitsgrad; Measure of Roughness). Der **Rauheitsgrad** MR_L einer Sprache L mit Einzelbuchstabenverteilung p ist

$$MR_L = \sum_{a \in A} (p(a) - 1/m)^2 = \sum_{a \in A} p(a)^2 - 1/m = IC_L - 1/m,$$

wobei $m = \|A\|$ ist.

Beispiel 58. Für die englische Sprache ($m = 26$) gilt beispielsweise $IC_{\text{Englisch}} \approx 0.0687$ und $MR_{\text{Englisch}} \approx 0.0302$. $\triangleleft$

Übersteigt dagegen die Periode d die Klartextlänge n , so ist der Kryptotext bei zufälliger Wahl des Schlüsselwortes ebenfalls rein zufällig, was auf einen erwarteten Koinzidenzindex von

$$E_{d,n}(IC) = \sum_{a \in A} \|A\|^{-2} = \|A\|^{-1} = 1/m, \quad d \geq n \geq 2$$

führt. Allgemein gilt für hinreichend großes n ,

$$E_{d,n}(IC) = \frac{n-d}{d \cdot (n-1)} \cdot IC_L + \frac{n \cdot (d-1)}{d \cdot (n-1)} \cdot m^{-1}, \quad 1 \leq d \leq n,$$

da von den $\binom{n}{2}$ möglichen Positionspaaren ungefähr $d \cdot \binom{n/d}{2} = n(n-d)/2d$ Paare nur eine Spalte (was einem Anteil von $(n-d)/d(n-1)$ entspricht) und $\binom{d}{2}(n/d)^2 = n^2(d-1)/2d$ Paare zwei unterschiedliche Spalten betreffen (was einem Anteil von $n(d-1)/d(n-1)$ entspricht).

Untenstehende Tabelle gibt den Erwartungswert $E_{d,n}(IC)$ des Koinzidenzindex für Kryptotexte der Länge $n = 100$ in Abhängigkeit von der Periodenlänge d einer Vigenère-Chiffre wieder (in Promille; Klartext ist ein zufällig gewählter Text der englischen Sprache mit 100 Buchstaben).

d	1	2	3	4	5	6	8	10	100
$E_{d,100}(IC)$	69	54	48	46	44	43	42	41	39

Beispiel 59. Berechnet sich der Koinzidenzindex eines Vigenère-Kryptotextes der Länge 100 zu 0.045, so liegt die Vermutung nahe, dass das verwendete Schlüsselwort die Länge vier oder fünf hat, falls y aus einem Klartext der englischen Sprache erzeugt wurde. $\triangleleft$

Der Koinzidenzindex kann auch Hinweise dafür liefern, mit welchem Kryptoverfahren ein vorliegender Kryptotext erzeugt wurde. Bei Transpositionschiffren sowie bei einfachen Substitutionen bleibt nämlich der Koinzidenzindex im Gegensatz zu polyalphabetischen und polygrafischen Verfahren erhalten. Erstere lassen sich von letzteren zudem dadurch unterscheiden, dass bei ihnen sogar die Buchstabenhäufigkeiten unverändert bleiben.

Zur Bestimmung des Schlüsselwortes bei bekannter Periode d kann auch wie folgt vorgegangen werden. Man schreibt den Kryptotext y in Spalten y_i auf und berechnet für $a \in A$ und $i = 1, \dots, d$ die relativen Häufigkeiten $h_i(a)$ von a in y_i . Da y_i aus dem Klartext durch Addition von k_i entstanden ist, kommt die Verteilung

$$h_i(a + k), a \in A$$

für $k = k_i$ der Klartextverteilung $p(a)$, $a \in A$ näher als für $k \neq k_i$. Da

$$\alpha_i(k) := \sum_{a \in A} p(a) h_i(a+k)$$

ein Maß für die Ähnlichkeit der beiden Verteilungen $p(a)$ und $h_i(a+k)$ ist (siehe Übungen), wird der Wert von $\alpha_i(k)$ wahrscheinlich für $k = k_i$ maximal werden.

Beispiel 60. *Der folgende Kryptotext y*

HUDS KUAE ZGXR AVTF PGWS WGWS ZHTP PBIL LRTZ PZHW LOIJ VFIC
VBTH LUGI LGPR KHWM YHTI UAXR BHTW UCGX OSPW AOCH IMCS YHWQ
HWCF YOCG OGTZ LBIL SWBF LOHX ZWSI ZVDS ATGS THWI SSUX LMTS
MHWI KSPX OGWI HRPF LSAM USUV VAIL LHGI LHWV VIVL AVTW OCIJ
PTIC MSTX VII

der Länge 203 wurde von einer Vigenère-Chiffre mit Schlüssellänge $d = 4$ aus englischem Klartext erzeugt. Schreiben wir den Kryptotext in vier Spalten $y_1, \dots, y_4$ der Länge $|y_1| = |y_2| = |y_3| = 51$ und $|y_4| = 50$, so ergeben sich folgende Werte für $\alpha_i(k)$ (in Promille):

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$\alpha_1(k)$	36	31	31	45	38	26	42	73	44	26	36	47	30	32	36	29	28	39	48	42	42	39	42	42	35	31
$\alpha_2(k)$	44	41	40	51	41	31	37	43	34	28	36	26	28	43	68	45	35	27	42	43	40	35	30	24	31	45
$\alpha_3(k)$	47	41	48	37	49	40	35	30	48	32	25	42	31	26	43	76	37	31	39	45	35	34	37	26	30	25
$\alpha_4(k)$	38	40	27	41	65	47	28	34	39	33	35	36	30	30	48	44	35	42	47	38	39	34	27	38	36	37

Da $\alpha_1(k)$ für $k = 7 = H$, $\alpha_2(k)$ für $k = 14 = O$, $\alpha_3(k)$ für $k = 15 = P$ und $\alpha_4(k)$ für $k = 4 = E$ einen Maximalwert annimmt, lautet das Schlüsselwort **HOPE**. Damit ergibt sich folgender Klartext (aus der Erzählung „Der Goldkäfer“ von Edgar Allan Poe).

A GOOD GLASS IN THE BISHOPS HOSTEL IN THE DEVILS SEAT
FORTYONE DEGREES AND THIRTEEN MINUTES NORTH EAST AND
BY NORTH MAIN BRANCH SEVENTH LIMB EAST SIDE SHOOT FROM
THE LEFT EYE OF THE DEATHS HEAD A BEE LINE FROM THE TREE
THROUGH THE SHOT FIFTY FEET OUT

◁

Zur Bestimmung des Schlüsselwortes kann man auch die Methode des *gegenseitigen Koinzidenzindex* verwenden. Dabei ist die verwendete Klartextsprache (und somit deren Häufigkeitsverteilung) irrelevant, da die Spalten – wie der Name schon sagt – gegenseitig in Relation gesetzt werden. Aber zuerst die Definition.

Definition 61 (Gegenseitiger Koinzidenzindex). *Der **gegenseitige Koinzidenzindex** von zwei Texten y und y' mit den Längen n und n' über dem Alphabet $\mathcal{B}$ ist definiert als*

$$IC(y, y') = \frac{1}{n \cdot n'} \cdot \sum_{a \in \mathcal{B}} H_y(a) \cdot H_{y'}(a).$$

$IC(y, y')$ ist also die Wahrscheinlichkeit, dass bei zufälliger Wahl einer Position in y und einer Position in y' der gleiche Buchstabe vorgefunden wird. $IC(y, y')$ ist umso größer, je besser die Häufigkeitsverteilung von y und y' (d. h. H_y und $H_{y'}$) übereinstimmen.

Ist nun y ein Kryptotext, der mit einem Schlüsselwort bekannter Länge d erzeugt wurde, und sind y_i , $i = 1, \dots, d$ die zugehörigen Spalten, so gibt der gegenseitige Koinzidenzindex der Spalten $y_i + \delta$ und y_j (für $1 \leq i < j \leq d$ und $0 \leq \delta \leq 25$) die Wahrscheinlichkeit an, dass man bei zufälliger Wahl einer Position in $y_i + \delta$ und in y_j denselben Buchstaben vorfindet. Da die Einzelzeichenverteilungen von $y_i - k_i$ und von $y_j - k_j$ der der Klartextsprache entsprechen, haben $y_i + \delta$ und y_j für $\delta = k_j - k_i$ eine ähnliche Verteilung. Mit großer Wahrscheinlichkeit nimmt also $IC(y_i + \delta, y_j)$ für $\delta = \delta_{ij} = k_j - k_i$ einen relativ großen Wert an, während für $\delta \neq \delta_{ij}$ mit kleinen Werten zu rechnen ist.

Beispiel 62. Betrachten wir den Kryptotext aus vorigem Beispiel, so ergeben sich für $IC(y_i + \delta, y_j)$ die folgenden Werte (in Promille):

δ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$IC(y_1 + \delta, y_2)$	40	31	25	38	25	21	46	74	50	33	31	44	43	34	31	28	24	31	44	45	37	48	64	44	25	31
$IC(y_1 + \delta, y_3)$	26	47	25	21	47	32	18	49	91	42	27	51	45	31	29	32	23	29	27	39	45	46	39	58	44	24
$IC(y_1 + \delta, y_4)$	38	40	29	31	35	24	32	58	42	32	44	50	43	39	31	20	34	36	30	40	45	24	42	78	47	22
$IC(y_2 + \delta, y_3)$	50	85	49	21	28	35	24	34	46	25	24	27	59	50	50	53	51	24	22	26	43	36	35	32	24	34
$IC(y_2 + \delta, y_4)$	46	53	40	37	51	42	29	23	24	32	40	55	38	31	32	45	67	49	25	27	29	29	34	37	38	35
$IC(y_3 + \delta, y_4)$	49	36	38	60	36	25	34	19	29	42	41	33	54	27	36	78	47	25	29	33	27	28	47	32	27	54

Also ist (mit großer Wahrscheinlichkeit)

$$\delta_{12} = 7, \delta_{13} = 8, \delta_{14} = 23, \delta_{23} = 1, \delta_{24} = 16, \delta_{34} = 15.$$

Wir können nun alle Spalten relativ zur ersten Spalte so verschieben, dass der ganze Text eine einheitliche Verschiebung δ hat, also die zweite Spalte um -7 , die dritte um -8 und die vierte um -23 . Für die Bestimmung von δ , muss man nur den häufigsten Buchstaben in dem auf diese Weise erzeugten Text bestimmen (oder eine vollständige Suche durchführen). Dieser ist **L** (16,3%). Also ist $\delta = \mathbf{L} - \mathbf{E} = \mathbf{H} = 7$ und das Schlüsselwort lautet **HOPE** ($\mathbf{H} + 7 = \mathbf{O}$, $\mathbf{H} + 8 = \mathbf{P}$, $\mathbf{H} + 23 = \mathbf{E}$). $\triangleleft$

Analyse der Lauftextverschlüsselung

Zum Brechen einer Stromchiffre mit Klartextschlüsselstrom kann man so vorgehen: Man geht zunächst davon aus, dass jeder Kryptotextbuchstabe durch Summation eines Klartext- und Schlüsselstrombuchstabens mit jeweils mittlerer bis hoher Wahrscheinlichkeit entstanden ist. Dies sind beispielsweise im Englischen die Buchstaben **E, T, A, O, I, N, S, R, H**. Zu einem Teilwort w des Kryptotextes bestimmt man dann alle Paare von Wörtern (w_1, w_2) mit $w_1 + w_2 = w$ und $w_1, w_2 \in \{\mathbf{E, T, A, O, I, N, S, R, H}\}$. In der Regel ergeben sich nur sehr wenige sinnvolle Paare, aus denen durch Kontextbetrachtungen und Erweitern von w nach links und rechts der Kryptotext entschlüsselt werden kann. Wird die Analyse durch ein Computerprogramm durchgeführt, kann an die Stelle der Kontextbetrachtungen auch die Häufigkeitsverteilung von n -Grammen der Sprache treten. Das Programm wählt dann solche Wortpaare (w_1, w_2) , die eine hohe Wahrscheinlichkeit haben.

Beispiel 63. Gegeben ist der Kryptotext **MOQKTHCBLMWXF**. . . Wir beginnen die Untersuchung mit einer Wortlänge von vier Buchstaben, also $w = \mathbf{MOQK}$. Der erste Buchstabe **M** kann nur auf eine der folgenden Arten zustande gekommen sein:

$$\begin{array}{rcl}
 & ABCDE \dots I \dots T \dots Z & \text{(Klartextzeichen)} \\
 + & MLKJI \dots E \dots T \dots N & \text{(Schlüsselzeichen)} \\
 = & MMMM \dots M \dots M \dots M & \text{(Kryptotextzeichen)}
 \end{array}$$

Es ergeben sich folgende wahrscheinliche Paare für die Einzelbuchstaben von w :

$$\begin{array}{lll}
 M: & (E, I) & O: (A, O) \quad Q: (I, I) \quad K: (R, T) \\
 & (I, E) & (H, H) \quad (S, S) \\
 & (T, T) & (O, A) \quad (T, R)
 \end{array}$$

Diese führen auf folgende $3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3 = 27$ Wortpaare (w_1, w_2) :

w_1	EAIR	EAIS	EAIT	EHIR	...	THIS	...	TOIT
w_2	IOIT	IOIS	IOIR	IHIT	...	THIS	...	TAIR

Als sinnvoll stellt sich aber nur die Wahl $w_1 = w_2 = \text{THIS}$ heraus. ◁

Autokey Chiffren

Kryptotextschlüsselstrom. Diese Systeme bieten eigentlich keinen großen kryptografischen Schutz, da sie ohne Kenntnis des Schlüsselwortes sehr leicht entschlüsselt werden können (falls die Länge des Schlüsselwortes im Verhältnis zur Länge des Kryptotextes relativ kurz ist). Man subtrahiert dazu den Kryptotext y für $\delta = 1, 2, \dots$ von dem um δ Positionen verschobenen Kryptotext – also $y_{0+\delta} y_{1+\delta} y_{2+\delta} y_{3+\delta} \dots$ minus $y_0 y_1 y_2 y_3 \dots$ –, bis sinnvoller (Klar-) Text erscheint:

$$\begin{array}{rcl}
 & DUMSQMOZKFN \dots & \text{(Kryptotext } y) \\
 - & DUMSQMO \dots & \text{ („Kryptotextschlüsselstrom“)} \\
 = & \dots \text{NSCHUTZ} \dots & \text{(Klartext } x)
 \end{array}$$

Klartextschlüsselstrom. Neben der oben beschriebenen Analyse der Lauftextverschlüsselung kann das Brechen der Autokey-Systeme mit Klartextschlüsselstrom auch analog zur Kasiski-Methode erfolgen: Sei d die Länge des Schlüsselwortes $k_0 \dots k_{d-1}$. Falls im Klartext die gleiche Buchstabenfolge $x_i \dots x_{i+l-1}$ im Abstand $2d$ auftritt (beispielsweise $d = 3$ und $l = 2$),

$$\begin{array}{rcl}
 & \downarrow \downarrow & \downarrow \downarrow \\
 & x_0 x_1 x_2 x_3 \underline{x_4 x_5} x_6 x_7 x_8 & x_9 \underline{x_{10} x_{11}} x_{12} x_{13} x_{14} \dots \quad \text{Klartext } x \\
 + & k_0 k_1 k_2 x_0 x_1 x_2 & x_3 \underline{x_4 x_5} x_6 x_7 x_8 \quad x_9 \underline{x_{10} x_{11}} \dots \quad \text{Klartextschlüsselstrom } kx \\
 = & y_0 y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 & y_6 \underline{y_7 y_8} y_9 \underline{y_{10} y_{11}} y_{12} y_{13} y_{14} \dots \quad \text{Kryptotext } y
 \end{array}$$

so tritt im Kryptotext die gleiche Buchstabenfolge im Abstand d auf, d. h. d kann auf diese Art unter Umständen leicht bestimmt werden. Ist d bekannt, so können die Buchstaben $k_1 \dots k_d$ des Schlüsselwortes der Reihe nach bestimmt werden: Da durch k_i die Klartextzeichen an den Positionen $i, d+i, 2d+i, \dots$ eindeutig festgelegt sind, kann jedes einzelne k_i unabhängig von den anderen Schlüsselwortbuchstaben durch eine statistische Analyse bestimmt werden.

3 Sicherheit von Kryptosystemen

3.1 Informationstheoretische Sicherheit

Claude E. Shannon untersuchte die Sicherheit kryptografischer Systeme auf informationstheoretischer Basis (1945, freigegeben 1949). Seinen Untersuchungen liegt das Modell einer Nachrichtenquelle X zugrunde, die einzelne Klartextnachrichten x aus dem Klartextrraum M unter einer bestimmten Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(x) = \Pr[X = x]$ generiert.

Zudem nehmen wir an, dass der zur Verschlüsselung benutzte Schlüssel $k \in K$ von einem Schlüsselgenerator S unter einer bekannten Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(k) = \Pr[S = k]$ erzeugt wird. Da der Schlüssel unabhängig vom Klartext gewählt wird, ist $p(k, x) = p(k)p(x)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X den Klartext x generiert und dieser mit dem Schlüssel k verschlüsselt wird. Dabei gehen wir davon aus, dass für jede Nachricht $x \in M$ ein neuer Schlüssel gewählt wird. Dies bedeutet, dass wir beispielsweise bei der additiven Chiffre den Klartextrraum auf $M = A^n$ vergrößern müssen, falls der Schlüssel nach jeweils n Zeichen gewechselt wird.

Die Zufallsvariablen X und S induzieren eine Verteilung auf dem Kryptotextrraum, die wir durch die Zufallsvariable Y beschreiben. Für einen Kryptotext y berechnet sich die Wahrscheinlichkeit zu

$$p(y) = \Pr[Y = y] = \sum_{k, x: E(k, x) = y} p(k, x)$$

und für einen beobachteten Kryptotext y (mit $p(y) > 0$) ist

$$p(x|y) = \frac{p(x, y)}{p(y)} = \sum_{k: E(k, x) = y} \frac{p(k, x)}{p(y)}$$

die (bedingte) Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich hinter dem Kryptotext y der Klartext x verbirgt.

Definition 64 (informationstheoretisch sicher). *Ein Kryptosystem heißt unter einem Schlüsselgenerator S **absolut sicher** (**informationstheoretisch sicher**), falls X bei jeder Klartextverteilung stochastisch unabhängig von Y ist, d.h. es gilt für jeden Klartext $x \in M$ und jeden Kryptotext $y \in C$ mit $p(y) > 0$,*

$$p(x) = p(x|y).$$

Bei einem absolut sicheren Kryptosystem ist demnach die *a posteriori* Wahrscheinlichkeit $p(x|y)$ einer Klartextnachricht x gleich der *a priori* Wahrscheinlichkeit $p(x)$, d.h. die Wahrscheinlichkeit von x ändert sich nicht, ob nun der Kryptotext y bekannt ist oder nicht. Die Kenntnis von y erlaubt somit keinerlei Rückschlüsse auf die gesendete Nachricht x . Dies bedeutet, dass es dem Gegner nicht möglich ist – auch nicht mit unbegrenzten Rechenressourcen – das System zu brechen. Wie wir sehen werden, lässt sich dieses Maß an Sicherheit nur mit einem sehr hohen Aufwand realisieren.

Sind $p(x), p(y) > 0$, so gilt wegen $p(x|y)p(y) = p(x, y) = p(y|x)p(x)$ die Gleichheit

$$p(x|y) = \frac{p(y|x)p(x)}{p(y)}$$

(Satz von Bayes) und daher ist die Bedingung $p(x) = p(x|y)$ gleichbedeutend mit $p(y) = p(y|x)$.

Beispiel 65. Sei (M, C, E, D, K) ein Kryptosystem mit $M = \{x_1, \dots, x_4\}$, $K = \{k_1, \dots, k_4\}$, $C = \{y_1, \dots, y_4\}$ und

E	x_1	x_2	x_3	x_4
k_1	y_1	y_4	y_3	y_2
k_2	y_2	y_1	y_4	y_3
k_3	y_3	y_2	y_1	y_4
k_4	y_4	y_3	y_2	y_1

Weiter sei $p(k_1) = 1/2$, $p(k_2) = 1/4$ und $p(k_3) = p(k_4) = 1/8$. Unter der Klartextverteilung $p(x_1) = 1/2$, $p(x_2) = p(x_3) = p(x_4) = 1/6$ ergibt sich dann folgende Verteilung der Kryptotexte:

$$\begin{aligned} p(y_1) &= 1/2 \cdot 1/2 + (1/4 + 1/8 + 1/8) \cdot 1/6 = 1/3 \\ p(y_2) &= 1/4 \cdot 1/2 + (1/8 + 1/8 + 1/2) \cdot 1/6 = 1/4 \\ p(y_3) &= 1/8 \cdot 1/2 + (1/8 + 1/2 + 1/4) \cdot 1/6 = 5/24 \\ p(y_4) &= 1/8 \cdot 1/2 + (1/2 + 1/4 + 1/8) \cdot 1/6 = 5/24 \end{aligned}$$

Die bedingten Wahrscheinlichkeiten $p(x|y_1)$ berechnen sich wie folgt:

$$\begin{aligned} p(x_1|y_1) &= p(k_1, x_1)/p(y_1) = (1/2)(1/2)/(1/3) = 3/4 \\ p(x_2|y_1) &= p(k_2, x_2)/p(y_1) = (1/4)(1/6)/(1/3) = 1/8 \\ p(x_3|y_1) &= p(k_3, x_3)/p(y_1) = (1/8)(1/6)/(1/3) = 1/16 \\ p(x_4|y_1) &= p(k_4, x_4)/p(y_1) = (1/8)(1/6)/(1/3) = 1/16 \end{aligned}$$

Wegen $p(x_1) = 1/2 \neq 3/4 = p(x_1|y_1)$ ist das Kryptosystem nicht absolut sicher, zumindest nicht unter der gegebenen Schlüsselverteilung.

Die Bedingung $p(x) = p(x|y)$ ist nach dem Satz von Bayes genau dann erfüllt, wenn $p(y) = p(y|x)$ ist. Da jedoch für jedes Paar (x, y) genau ein Schlüssel $k = k_{x,y} \in K$ mit $E(k, x) = y$ existiert, also $p(y|x) = p(k_{x,y})$ ist, ist dies äquivalent zu $p(y) = p(k_{x,y})$. Für $y = y_1$ bedeutet dies, dass alle Schlüssel $k_i = k_{x_i, y_1}$ die gleiche Wahrscheinlichkeit $p(k_i) = 1/4$ haben müssen. Eine leichte Rechnung zeigt, dass dann auch $p(y_i) = 1/4$ für $i = 1, \dots, 4$ ist. Somit ist das betrachtete Kryptosystem genau dann absolut sicher, wenn der Schlüssel unter Gleichverteilung gewählt wird. $\triangleleft$

Wie in diesem Beispiel lässt sich allgemein folgende hinreichende Bedingung für die absolute Sicherheit von Kryptosystemen zeigen.

Satz 66. Ein Kryptosystem mit $\|M\| = \|C\| = \|K\|$, in dem es für jeden Klartext x und jeden Kryptotext y genau einen Schlüssel k mit $E(k, x) = y$ gibt, ist absolut sicher, wenn die Schlüssel unter Gleichverteilung gewählt werden.

Beweis. Bezeichne $k_{x,y}$ den eindeutig bestimmten Schlüssel, der den Klartext x auf den Kryptotext y abbildet. Wegen $p(k_{x,y}) = \|K\|^{-1}$ für alle x, y folgt zunächst

$$p(y|x) = \sum_{k:E(k,x)=y} p(k) = p(k_{x,y}) = \|K\|^{-1}$$

und

$$p(y) = \sum_x p(x)p(y|x) = \|K\|^{-1} \sum_x p(x) = \|K\|^{-1},$$

also $p(x|y) = p(x)p(y|x)/p(y) = p(x)$. □

In den Übungen wird gezeigt, dass auch die Umkehrung dieses Satzes gilt.

Verwendet man beim One-time-pad nur Klartexte einer festen Länge n , so ist dieser nach obigem Satz absolut sicher (vorausgesetzt, der Schlüssel wird rein zufällig, also unter Gleichverteilung gewählt). Variiert die Klartextlänge, so kann ein Gegner aus y nur die Länge des zugehörigen Klartextes x ableiten. Wird jedoch derselbe Schlüssel k zweimal verwendet, so kann aus den Kryptotexten die Differenz der zugehörigen Klartexte ermittelt werden:

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = E(x_1, k) = x_1 + k \\ y_2 = E(x_2, k) = x_2 + k \end{array} \right\} \leadsto y_1 - y_2 = x_1 - x_2$$

Sind die Klartexte natürlichsprachig, so können aus $y_1 - y_2$ die beiden Nachrichten x_1 und x_2 ähnlich wie bei der Analyse einer Lauftextverschlüsselung (siehe Abschnitt 2.5) rekonstruiert werden.

Da in einem absolut sicheren Kryptosystem der Schlüsselraum K mindestens die Größe des Klartextes X haben muss (siehe Übungen), ist der Aufwand extrem hoch. Vor der Kommunikation muss ein Schlüssel, dessen Länge der des zu übertragenden Klartextes entspricht, zufällig generiert und zwischen den Partnern auf einem sicheren Kanal ausgetauscht werden. Wird hingegen keine absolute Sicherheit angestrebt, so kann der Schlüsselstrom auch von einem Pseudo-Zufallsgenerator erzeugt werden. Dieser erhält als Eingabe eine Zufallsfolge s_0 (den sogenannten *Keim*) und erzeugt daraus eine lange Folge $v_0 v_1 \dots$ von Pseudo-Zufallszahlen. Als Schlüssel muss jetzt nur noch das Wort s_0 ausgetauscht werden.

In der Informationstheorie wird die Unsicherheit, mit der eine durch X beschriebene Quelle ihre Nachrichten aussendet, nach ihrer Entropie bemessen. Das heißt, die Unsicherheit über X entspricht genau dem Informationsgewinn, der sich aus der Beobachtung der Quelle X ziehen lässt. Dabei wird die in einer einzelnen Nachricht x steckende Information um so höher bemessen, je seltener x auftritt. Tritt eine Nachricht x mit einer positiven Wahrscheinlichkeit $p(x) = \Pr[X = x] > 0$ auf, dann ist

$$\text{Inf}_X(x) = \log_2(1/p(x))$$

der **Informationsgehalt** von x . Ist dagegen $p(x) = 0$, so sei $\text{Inf}_X(x) = 0$. Dieser Wert des Informationsgehalts ergibt sich zwangsläufig aus den beiden folgenden Forderungen:

- Der gemeinsame Informationsgehalt $\text{Inf}_{X,Y}(x, y)$ von zwei Nachrichten x und y , die aus stochastisch unabhängigen Quellen X und Y stammen, sollte gleich $\text{Inf}_X(x) + \text{Inf}_Y(y)$ sein;
- der Informationsgehalt einer Nachricht, die mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ auftritt, soll genau 1 (bit) betragen.

Die Einheit, in der der Informationsgehalt gemessen wird, ist bit (basic indissoluble information unit). Die Entropie von X ist nun der erwartete Informationsgehalt einer von X stammenden Nachricht.

Definition 67 (Entropie). Sei X eine Zufallsvariable mit Wertebereich $W(X) = \{x_1, \dots, x_n\}$ und sei $p_i = \Pr[X = x_i]$. Dann ist die **Entropie** von X definiert als

$$\mathcal{H}(X) = \sum_{i=1}^n p_i \ln_X(x_i) = \sum_{i=1}^n p_i \log_2(1/p_i).$$

Beispiel 68. Sei X eine Zufallsvariable mit der Verteilung

x_i	sonnig	leicht bewölkt	bewölkt	stark bewölkt	Regen	Schnee	Nebel
p_i	$1/4$	$1/4$	$1/8$	$1/8$	$1/8$	$1/16$	$1/16$

Dann ergibt sich die Entropie von X zu

$$\mathcal{H}(X) = 1/4 \cdot (2 + 2) + 1/8 \cdot (3 + 3 + 3) + 1/16 \cdot (4 + 4) = 2.625.$$

◁

Die Entropie nimmt im Fall $p_1 = \dots = p_n = 1/n$ den Wert $\log_2(n)$ an. Für jede andere Verteilung $p_1, \dots, p_n$ gilt dagegen $\mathcal{H}(X) < \log_2(n)$ (Beweis unten). Generell ist die Unsicherheit über X um so kleiner, je ungleichmäßiger X verteilt ist. Bringt X nur einen einzigen Wert mit positiver Wahrscheinlichkeit hervor, dann (und nur dann) nimmt $\mathcal{H}(X)$ den Wert 0 an. Für den Nachweis von oberen Schranken für die Entropie benutzen wir folgende Hilfsmittel aus der Analysis.

Definition 69 (konkav). Eine reellwertige Funktion f ist **konkav** auf einem Intervall I , falls für alle $x \neq y \in I$ und $0 \leq t \leq 1$ gilt:

$$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Gilt sogar „>“ anstelle von „≥“, so heißt f **streng konkav** auf I .

Beispiel 70. Die Funktion $f(x) = \log_2(x)$ ist streng konkav auf $(0, \infty)$.

◁

Für den Beweis des nächsten Satzes benötigen wir die Jensensche Ungleichung, die wir ohne Beweis angeben.

Satz 71 (Jensensche Ungleichung). Sei f eine streng konkave Funktion auf I und seien $0 < a_1, \dots, a_n < 1$ reelle Zahlen mit $\sum_{i=1}^n a_i = 1$. Dann gilt für alle $x_1, \dots, x_n \in I$,

$$f\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^n a_i f(x_i).$$

Hierbei tritt Gleichheit genau dann ein, wenn alle x_i den gleichen Wert haben.

Satz 72. Sei X eine Zufallsvariable mit endlichem Wertebereich $W(X) = \{x_1, \dots, x_n\}$ und Verteilung $\Pr[X = x_i] = p_i$, $i = 1, \dots, n$. Dann ist $\mathcal{H}(X) \leq \log_2(n)$, wobei Gleichheit genau im Fall $p_i = 1/n$ für $i = 1, \dots, n$ eintritt.

Beweis. Es gilt

$$\mathcal{H}(X) = \sum_{i=1}^n p_i \log_2(1/p_i) \leq \log_2 \sum_{i=1}^n p_i/p_i = \log_2 n.$$

Nach obigem Satz tritt Gleichheit genau im Fall $1/p_1 = \dots = 1/p_n$ ein, was mit $p_i = 1/n$ für $i = 1, \dots, n$ gleichbedeutend ist. $\square$

Eine wichtige Eigenschaft der Entropie ist, dass sie eine untere Schranke für die mittlere Codewortlänge von Binärcodes bildet. Ein **Binär-code** für X ist eine (geordnete) Menge $C = \{y_1, \dots, y_n\}$ von binären Codewörtern y_i für die Nachrichten x_i mit der Eigenschaft, dass die Abbildung $c : X^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ mit $c(x_{i_1} \dots x_{i_k}) = y_{i_1} \dots y_{i_k}$ injektiv ist. Die Injektivität von c stellt sicher, dass jede Folge $y_{i_1} \dots y_{i_k}$ von Codewörtern eindeutig decodierbar ist.

Die **mittlere Codewortlänge** von C unter X ist

$$L(C) = \sum_{i=1}^n p_i \cdot |y_i|.$$

C heißt **optimal**, wenn kein anderer Binär-code für X eine kürzere mittlere Codewortlänge besitzt. Für einen optimalen Binär-code C für X gilt (ohne Beweis)

$$\mathcal{H}(X) \leq L(C) < \mathcal{H}(X) + 1.$$

Beispiel 73. Sei X die Zufallsvariable aus dem letzten Beispiel. Betrachten wir die beiden Codes $C_1 = \{001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$ und $C_2 = \{00, 01, 100, 101, 110, 1110, 1111\}$, so erhalten wir für die mittlere Codewortlänge von C_1 den Wert $L(C_1) = 3$, während C_2 wegen $|y_i| = \log_2(1/p_i)$ den Wert $L(C_2) = \mathcal{H}(X)$ erreicht und somit optimal ist. $\triangleleft$

Die Redundanz eines Codes für eine Zufallsvariable X ist um so höher, je größer seine mittlere Codewortlänge im Vergleich zur Entropie von X ist. Um auch Codes über unterschiedlichen Alphabeten miteinander vergleichen zu können, ist es notwendig, die Codewortlänge in einer festen Einheit anzugeben. Hierzu berechnet man die **Bitlänge** eines Wortes x über einem Alphabet A mit $m > 2$ Buchstaben zu $|x|_2 = |x| \log_2(m)$. Beispielsweise ist die Bitlänge von **GOLD** (über dem lateinischen Alphabet) $|\mathbf{GOLD}|_2 = 4 \log_2(26) = 18,8$. Entsprechend berechnet sich für einen Code $C = \{y_1, \dots, y_n\}$ unter einer Verteilung $p_1, \dots, p_n$ die mittlere Codewortlänge (in bit) zu

$$L_2(C) = \sum_{i=1}^n p_i \cdot |y_i|_2.$$

Damit können wir die Redundanz eines Codes als den mittleren Anteil der Codewortbuchstaben definieren, die keine Information tragen.

Definition 74 (Redundanz). Die **(relative) Redundanz** eines Codes C für X ist definiert als

$$\mathcal{R}(C) = \frac{L_2(C) - \mathcal{H}(X)}{L_2(C)}.$$

Beispiel 75. Während eine von X generierte Nachricht im Durchschnitt $\mathcal{H}(X) = 2.625$ bit an Information enthält, haben die Codewörter von C_1 eine Bitlänge von 3. Der Anteil an „überflüssigen“ Zeichen pro Codewort beträgt also

$$\mathcal{R}(C_1) = \frac{3 - 2.625}{3} = 12,5\%,$$

wogegen C_2 keine Redundanz besitzt. ◁

Auch Schriftsprachen wie Deutsch oder Englisch und Programmiersprachen wie C oder PASCAL können als eine Art Code aufgefasst werden. Um die statistischen Eigenschaften einer solchen Sprache L zu erforschen, erweist es sich als zweckmäßig, die Textstücke der Länge n (n -Gramme) von L für unterschiedliche n getrennt voneinander zu betrachten. Sei also L_n die Zufallsvariable, die die Verteilung aller n -Gramme in L beschreibt. Interpretieren wir diese n -Gramme als Codewörter einer einheitlichen Codewortlänge n , so ist

$$\mathcal{R}(L_n) = \frac{n \log_2 m - \mathcal{H}(L_n)}{n \log_2 m}$$

die Redundanz dieses Codes. Es ist zu erwarten, dass eine Sprache umso mehr Redundanz aufweist, je restriktiver die Gesetzmäßigkeiten sind, unter denen in ihr Worte und Sätze gebildet werden.

Definition 76 (Entropie einer Sprache). Für eine Sprache L über einem Alphabet A mit $\|A\| = m$ ist $\mathcal{H}(L_n)/n$ die **n -Gramm-Entropie von L** (pro Buchstabe). Falls dieser Wert für n gegen ∞ gegen einen Grenzwert

$$\mathcal{H}(L) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}(L_n)/n$$

konvergiert, so wird dieser Grenzwert als die **Entropie von L** bezeichnet. In diesem Fall konvergiert $\mathcal{R}(L_n)$ gegen den Grenzwert

$$\mathcal{R}(L) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{R}(L_n) = \frac{\log_2 m - \mathcal{H}(L)}{\log_2 m},$$

der als die **(relative) Redundanz** von L bezeichnet wird. Der Zähler $\mathcal{R}_{abs}(L) = \log_2 m - \mathcal{H}(L)$ in diesem Ausdruck wird auch als die **absolute Redundanz** der Klartextsprache (gemessen in bit/Buchstabe) bezeichnet.

Für eine Reihe von natürlichen Sprachen wurden die Redundanzen $\mathcal{R}(L_n)$ der n -Gramme (für nicht allzu große Werte von n) empirisch bestimmt, woraus sich $\mathcal{R}(L)$ näherungsweise bestimmen lässt.

Beispiel 77. Im Deutschen hat die Einzelbuchstabenverteilung eine Entropie von $\mathcal{H}(L_1) = 4,1$ bit, während eine auf A_{lat} gleichverteilte Zufallsvariable U einen Entropiewert von $\mathcal{H}(U) = \log(26) = 4,7$ hat. Für die Bigramme ergibt sich ein Entropiewert von $\mathcal{H}(L_2)/2 = 3,5$ bit pro Buchstabe. Mit wachsender Länge sinkt die Entropie von deutschsprachigen Texten weiter ab und strebt gegen einen Grenzwert $\mathcal{H}(L)$ von 1,5 bit

pro Buchstabe.

n	$\mathcal{H}(L_n)$	$\mathcal{H}(L_n)/n$	$\mathcal{R}_{abs}(L_n)/n$	$\mathcal{R}(L_n)$
1	4,1	4,1	0,6	13%
2	7,0	3,5	1,2	26%
3	9,6	3,2	1,5	32%
6	12,2	2,0	2,7	57%
15	27,6	1,8	2,9	62%
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
∞	∞	$\mathcal{H}(L) = 1,5$	$\mathcal{R}_{abs}(L) = 3,2$	$\mathcal{R}(L) = 67\%$

Ein durchschnittlicher deutscher Text hinreichender Länge enthält also einen Redundanzanteil von ca. 67%, so dass er sich bei optimaler Kodierung auf circa 1/3 seiner ursprünglichen Länge komprimieren lässt. $\triangleleft$

Wir betrachten nun den Fall, dass mit einem Kryptosystem Klartexte der Länge n verschlüsselt werden, ohne dass dabei der Schlüssel gewechselt wird. D. h. die Chiffrierfunktion hat die Form

$$E_n : K \times A^n \rightarrow C_n,$$

wobei wir die Klartextlänge n variabel halten und der Einfachheit halber annehmen, dass die Menge C_n der zugehörigen Kryptotexte die gleiche Kardinalität $\|C_n\| = \|A^n\| = m^n$ wie der Klartextrraum hat. Ist y ein abgefangener Kryptotext, so ist

$$K(y) = \{k \in K \mid \exists x \in A^n : E_n(k, x) = y \wedge p(x) > 0\}$$

die Menge aller in Frage kommenden Schlüssel für y . $K(y)$ besteht aus einem „echten“ (d. h. dem zur Generierung von y tatsächlich benutzten) und $\|K(y)\| - 1$ so genannten „unechten“ Schlüsseln. Aus informationstheoretischer Sicht ist das Kryptosystem desto unsicherer, je kleiner die erwartete Anzahl

$$\bar{s}_n = \sum_{y \in C_n} p(y) \cdot (\|K(y)\| - 1) = \sum_{y \in C_n} p(y) \cdot \|K(y)\| - 1$$

der unechten Schlüssel ist. Ist $\bar{s}_n$ gleich 0, so liefert der abgefangene Kryptotext y dem Gegner genügend Information, um den benutzten Schlüssel und somit den zu y gehörigen Klartext eindeutig bestimmen zu können (sofern er über unbegrenzte Ressourcen an Rechenkraft und Zeit verfügt).

Definition 78 (Eindeutigkeitsdistanz). Die **Eindeutigkeitsdistanz** n_0 eines Kryptosystems ist der kleinste Wert von n , für den $\bar{s}_n = 0$ wird.

Als nächstes wollen wir eine untere Schranke für $\bar{s}_n$ (und damit für n_0) herleiten. Hierzu benötigen wir den Begriff der bedingten Entropie $\mathcal{H}(X|Y)$ von X , wenn Y bereits bekannt ist.

Definition 79 (bedingte Entropie). Seien X, Y Zufallsvariablen. Dann ist die **bedingte Entropie** von X unter Y definiert als

$$\mathcal{H}(X|Y) = \sum_{y \in W(Y)} p(y) \cdot \mathcal{H}(X|y),$$

wobei $X|y$ die Zufallsvariable mit der Verteilung $\Pr[X|y = x] = p(x|y) = \Pr[X = x \mid Y = y]$ ist (d. h. $\mathcal{H}(X|y) = \sum_{x \in W(X)} p(x|y) \cdot \log_2(1/p(x|y))$).

Satz 80.

1. $\mathcal{H}(X, Y) = \mathcal{H}(Y) + \mathcal{H}(X|Y)$.
2. $\mathcal{H}(X, Y) \leq \mathcal{H}(X) + \mathcal{H}(Y)$, wobei Gleichheit genau dann eintritt, wenn X und Y stochastisch unabhängig sind.

Beweis. s. Übungen. □

Korollar 81. $\mathcal{H}(X|Y) \leq \mathcal{H}(X)$, wobei Gleichheit genau dann eintritt, wenn X und Y stochastisch unabhängig sind.

Satz 82. In jedem Kryptosystem gilt für die Klartextentropie $\mathcal{H}(X)$, die Schlüssellentropie $\mathcal{H}(S)$ und die Kryptotextentropie $\mathcal{H}(Y)$

$$\mathcal{H}(S|Y) = \mathcal{H}(S) + \mathcal{H}(X) - \mathcal{H}(Y).$$

Beweis. Zunächst ist $\mathcal{H}(S|Y) = \mathcal{H}(S, Y) - \mathcal{H}(Y)$. Es reicht also zu zeigen, dass

$$\mathcal{H}(S, Y) = \mathcal{H}(S) + \mathcal{H}(X)$$

ist. Da bei Kenntnis des Schlüssels der Wert von X bereits eindeutig durch Y und der Wert von Y eindeutig durch X festgelegt ist, folgt unter Berücksichtigung der gemachten Annahme, dass X und S unabhängig sind,

$$\mathcal{H}(S, Y) = \mathcal{H}(S, X, Y) - \underbrace{\mathcal{H}(X|S, Y)}_{=0} = \mathcal{H}(S, X) + \underbrace{\mathcal{H}(Y|S, X)}_{=0} = \mathcal{H}(S) + \mathcal{H}(X).$$

□

Jetzt verfügen wir über alle Hilfsmittel, um die erwartete Anzahl

$$\bar{s}_n = \sum_{y \in C_n} p(y) \cdot \|K(y)\| - 1$$

der unechten Schlüssel nach unten abschätzen zu können. Seien X_n und Y_n die Zufallsvariablen, die die Verteilungen der n -Gramme der Klartextsprache und der zugehörigen Kryptotexte beschreiben.

Lemma 83.

1. $\mathcal{H}(S|Y_n) \leq \log_2(\bar{s}_n + 1)$,
2. $\mathcal{H}(S|Y_n) \geq \mathcal{H}(S) - n\mathcal{R}(L) \log_2 m$.

Beweis.

1. Unter Verwendung der Jensenschen Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(S|Y_n) &= \sum_{y \in C_n} p(y) \cdot \mathcal{H}(S|y) \\ &\leq \sum_{y \in C_n} p(y) \cdot \log_2 \|K(y)\| \\ &\leq \log_2 \sum_{y \in C_n} p(y) \cdot \|K(y)\| \\ &= \log_2(\bar{s}_n + 1). \end{aligned}$$

2. Mit Satz 82 folgt

$$\mathcal{H}(S|Y_n) = \mathcal{H}(S) + \mathcal{H}(X_n) - \mathcal{H}(Y_n).$$

Die Klartextentropie $\mathcal{H}(X_n)$ lässt sich durch

$$\mathcal{H}(X_n) = \mathcal{H}(L_n) \geq n\mathcal{H}(L) = n(1 - \mathcal{R}(L)) \log_2 m$$

abschätzen, wobei $m = \|A\|$ ist. Zudem lässt sich die Kryptotextentropie $\mathcal{H}(Y_n)$ wegen $W(Y_n) = C_n$ und $\|C_n\| = m^n$ durch

$$\mathcal{H}(Y_n) \leq n \log_2 m$$

abschätzen. Somit ist

$$\mathcal{H}(S|Y_n) = \mathcal{H}(S) + \underbrace{\mathcal{H}(X_n) - \mathcal{H}(Y_n)}_{\geq -n\mathcal{R}(L) \log_2 m}.$$

□

Zusammen ergibt sich also

$$\log_2(\bar{s}_n + 1) \geq \mathcal{H}(S) - n\mathcal{R}(L) \log_2 m.$$

Im Fall, dass der Schlüssel unter Gleichverteilung gezogen wird, erreicht $\mathcal{H}(S)$ den maximalen Wert $\log_2 \|K\|$, was auf die gesuchte Abschätzung für $\bar{s}_n$ führt. Wir fassen zusammen.

Satz 84. *Werden mit einem Kryptosystem Klartexte $x \in A^n$ der Länge n mit einem unter Gleichverteilung gezogenen Schlüssel $k \in K$ verschlüsselt, und ist $\|C_n\| = \|A^n\| = m^n$ für den zugehörigen Kryptotextraum $C_n = \{E(k, x) \mid k \in K, x \in A^n\}$, so gilt für die erwartete Anzahl $\bar{s}_n$ der unechten Schlüssel,*

$$\bar{s}_n \geq \frac{\|K\|}{m^{n\mathcal{R}(L)}} - 1.$$

Setzen wir in obiger Abschätzung $\bar{s}_n = 0$, so erhalten wir folgende untere Schranke für die Eindeigkeitsdistanz n_0 des Kryptosystems.

Korollar 85. *Unter den Bedingungen des obigen Satzes gilt*

$$n_0 \geq \frac{\log_2 \|K\|}{\mathcal{R}(L) \log_2 m} = \frac{\log_2 \|K\|}{\log_2 m - \mathcal{H}(L)} = \frac{\log_2 \|K\|}{\mathcal{R}_{abs}(L)}.$$

Man beachte, dass wir nur die Mindestmenge an Kryptotext zur eindeutigen Bestimmung des *Schlüssels* abgeschätzt haben. Natürlich erlaubt die eindeutige Bestimmung des Schlüssels auch die eindeutige Bestimmung des Klartexts. Unter Umständen kann jedoch der *Klartext* auch schon bei Kenntnis von wesentlich weniger Kryptotext eindeutig bestimmbar sein.

Beispiel 86. *Für Substitutionen bei deutschsprachigem Klartext ergeben sich folgende Werte $\log_2 \|K\|/\mathcal{R}_{abs}(L)$ als untere Schranke für die Eindeigkeitsdistanz n_0 (wobei wir von einer absoluten Redundanz von $\mathcal{R}_{abs}(L) = 3.2$ bit/Zeichen ausgehen, was einer relativen Redundanz von $\mathcal{R}(L) = 3,2/4,7 \approx 67\%$ entspricht):*

Kryptosystem	Schlüssellänge $\ K\ $	$\log_2 \ K\ $	$\log_2 \ K\ /\mathcal{R}_{abs}(L)$
additive Chiffre	26	4.7	$\frac{4.7}{3.2} \approx 1.5$
affine Chiffre	$12 \cdot 26 = 312$	8.3	2.6
einfache Substitution	$26!$	88.4	27.6
Vigenère-Chiffre	26^d	$4.7 \cdot d$	$1.5 \cdot d$

Dagegen erhalten wir für Blocktranspositionen folgende unteren Schranken für die Mindestmenge an Kryptotext, die zur eindeutigen Bestimmung des Schlüssels benötigt wird. Hierbei unterscheiden wir die Analyse danach, welche n -Grammhäufigkeiten dabei benutzt werden, was einer Analyse von Blocktranspositionen entspricht, falls jedes Klartextzeichen höchstens von den $n - 1$ vorhergehenden Zeichen abhängt.

Analyse auf der Basis von relativen Häufigkeiten der	$\mathcal{R}_{abs}(L)$	Blocklänge l				
		10	20	50	100	1000
Einzelzeichen	0,6	59	165	578	1415	22 986
Bigrammen	1,2	40	111	390	954	15 502
Trigrammen	1,5	24	65	226	553	9 473
n -Grammen, $n \rightarrow \infty$	3,2	7	19	67	164	2 665

Auch wenn in obiger Tabelle die angegebenen unteren Schranken für n_0 bei der Analyse auf der Basis von Einzelzeichenhäufigkeiten endlich sind, gilt in diesem Fall $n_0 = \infty$, da eine solche Analyse nicht zum Ziel führen kann, und zwar unabhängig davon, über wie viel Kryptotext der Gegner verfügt. In diesem Fall stimmt nämlich die Klartextentropie $\mathcal{H}(X_n)$ mit der Kryptotextentropie $\mathcal{H}(Y_n)$ überein, weshalb sich in Lemma 83 die (schärfere) Schranke $\log_2(\bar{s}_n + 1) \geq \mathcal{H}(S)$ ergibt. Diese ist bei Verwendung eines unter Gleichverteilung gewählten Schlüssels mit der Abschätzung $\bar{s}_n + 1 \geq \|K\|$ äquivalent, weshalb $\bar{s}_n$ höchstens im Fall $\|K\| = 1$ den Wert Null annehmen kann (was wiederum $l = 1$ impliziert). $\triangleleft$

3.2 Weitere Sicherheitsbegriffe

Wie wir gesehen haben, muss für die Benutzung eines informationstheoretisch sicheren Kryptosystems ein immenser Aufwand betrieben werden. Daher begnügt man sich in der Praxis meist mit schwächeren Sicherheitsanforderungen.

- Ein Kryptosystem gilt als **komplexitätstheoretisch sicher** oder als **berechnungssicher** (**computationally secure**), falls es dem Gegner nicht möglich ist, das System mit einem für ihn lohnenswerten Aufwand zu brechen. Das heißt, der Zeitaufwand und die Kosten für einen erfolgreichen Angriff (sofern er überhaupt möglich ist) übersteigen den potentiellen Nutzen bei weitem.
- Ein Kryptosystem gilt als **nachweisbar sicher** (**provably secure**), wenn seine Sicherheit mit bekannten komplexitätstheoretischen Hypothesen verknüpft werden kann, deren Gültigkeit gemeinhin akzeptiert wird.
- Als **praktisch sicher** (**practically secure**) werden dagegen Kryptosysteme eingestuft, die über mehrere Jahre hinweg jedem Versuch einer erfolgreichen Kryptanalyse widerstehen konnten, obwohl sie bereits eine weite Verbreitung gefunden haben und allein schon deshalb ein lohnenswertes Ziel für einen Angriff darstellen.

Die Komplexitätstheoretische Analyse eines Kryptosystems ist äußerst schwierig. Dies hängt damit zusammen, daß der Aufwand eines erfolgreichen Angriffs unabhängig von der vom Gegner angewandten Strategie abgeschätzt werden muss. Das heißt, es müssen nicht nur alle derzeit bekannten kryptoanalytischen Ansätze, sondern alle *möglichen* in Betracht gezogen werden. Dabei darf sich die Aufwandsanalyse nicht ausschließlich an einer vollständigen Rekonstruktion des Klartextes orientieren, da bereits ein geringfügiger Unterschied zwischen dem a posteriori und dem a priori Wissen für den Gegner einen Vorteil bedeuten kann.

Aus den genannten Gründen ist es bis heute noch für kein praktikables Kryptosystem gelungen, seine Komplexitätstheoretische Sicherheit mathematisch zu beweisen. Damit ist auch nicht so schnell zu rechnen, zumindest nicht solange der Status fundamentaler Komplexitätstheoretischer Fragen wie etwa des berühmten $P \stackrel{?}{=} NP$ -Problems offen ist. Dagegen gibt es eine ganze Reihe praktikabler Kryptosysteme, die als nachweisbar sicher oder praktisch sicher gelten.

Wir schließen diesen Abschnitt mit einer Präzisierung des Komplexitätstheoretischen Sicherheitsbegriffs, die unter dem Namen IND-CPA (indistinguishability under a chosen-plaintext attack) bekannt ist. Hierzu ist es erforderlich, die Verletzung der Vertraulichkeit als ein algorithmisches Problem für den Gegner zu formulieren.

Definition 87 (Vorteil eines Gegners). Sei (M, C, E, D, K) ein Kryptosystem mit Schlüsselgenerator S . Ein Gegner ist ein Paar $G = (X, V)$ von probabilistischen Algorithmen, wobei $X = (X_0, X_1)$ zwei Klartexte $x_0 \neq x_1 \in M$ generiert und V bei Eingabe zweier Klartexte $x_0, x_1 \in M$ und eines Kryptotextes $y \in C$ ein Bit ausgibt. Der Vorteil von G ist

$$\alpha_G = \Pr[V(X_0, X_1, E(S, X_B)) = B] - 1/2,$$

wobei B eine auf $\{0, 1\}$ gleichverteilte Zufallsvariable ist (d.h. $\Pr[B = 0] = \Pr[B = 1] = 1/2$), die von X und V stochastisch unabhängig ist.

Wird bspw. eine Blockchiffre zur Verschlüsselung von Klartextblöcken $x[1], x[2], \dots$ benutzt, indem die einzelnen Blöcke unabhängig voneinander mit demselben Schlüssel k zu einer Folge $y[1], y[2], \dots$ von Kryptotextblöcken $y[i] = E(k, x[i])$ verschlüsselt werden (so genannter *ECB-Mode*; electronic code book mode), so kann ein Gegner ohne großen Aufwand einen Vorteil von $1/2$ erzielen. Hierzu wählt er (deterministisch) zwei beliebige Klartexte $x_0 = x[1]_0 x[2]_0 \dots$ und $x_1 = x[1]_1 x[2]_1 \dots$ mit der Eigenschaft $x[1]_0 = x[2]_0$ und $x[1]_1 \neq x[2]_1$. Dann kann er bei Vorlage eines Kryptotextes $y = y[1]y[2] \dots$ leicht erkennen, aus welchem der beiden Klartexte sie generiert wurde:

$$V(x_0, x_1, y) = \begin{cases} 0, & y[1] = y[2] \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Satz 88. Bei einem absolut sicheren Kryptosystem kann kein Gegner einen Vorteil größer als 0 erzielen.

Beweis. Bei einem absolut sicheren Kryptosystem sind der Kryptotext $Y = E(S, X)$ und der Klartext X stochastisch unabhängig. Daher sind auch die Zufallsvariablen

$V(X_0, X_1, E(S, X_B))$ und B stochastisch unabhängig und es folgt

$$\begin{aligned}
 & \Pr[V(X_0, X_1, E(S, X_B)) = B] \\
 &= \Pr[V(X_0, X_1, E(S, X_B)) = B = 0] + \Pr[V(X_0, X_1, E(S, X_B)) = B = 1] \\
 &= \Pr[V(X_0, X_1, E(S, X_B)) = 0] \cdot \underbrace{\Pr[B = 0 \mid V(X_0, X_1, E(S, X_B)) = 0]}_{= \Pr[B=0] = 1/2} \\
 &\quad + \Pr[V(X_0, X_1, E(S, X_B)) = 1] \cdot \underbrace{\Pr[B = 1 \mid V(X_0, X_1, E(S, X_B)) = 1]}_{= \Pr[B=1] = 1/2} \\
 &= 1/2.
 \end{aligned}$$

□

In den Übungen wird auch die umgekehrte Implikation bewiesen. Ein Kryptosystem ist somit genau dann absolut sicher, wenn kein Gegner einen Vorteil größer 0 erzielt. Für die Präzisierung des komplexitätstheoretischen Sicherheitsbegriffs sind nun die beiden folgenden Fragen von entscheidender Bedeutung:

- Über welche Rechenressourcen verfügt ein Gegner realistischweise?
- Wie groß darf der vom Gegner erzielte Vorteil höchstens sein, damit die Vertraulichkeit der Nachricht noch gewahrt bleibt?

Eine Antwort auf diese Fragen liefert Definition 89. Dabei gehen wir davon aus, dass das gewünschte Maß an Sicherheit durch einen Parameter $s \in \mathbb{N}$ regulierbar ist. Aus Praktikabilitätsgründen sollten dann alle legalen Operationen (wie die Chiffrierung oder die Schlüsselgenerierung) effizient (d.h. in Zeit $s^{O(1)}$) durchführbar sein. Natürlich hängt dann auch der Gegner G^s vom Parameterwert s ab. Typischerweise werden Kryptosysteme nach ihrer Schlüssellänge $s = |k|$ parameterisiert.

Definition 89 (komplexitätstheoretisch sicher). Sei S ein Kryptosystem mit variablem Sicherheitsparameter $s \in \mathbb{N}$.

- Eine Funktion $\varepsilon : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **vernachlässigbar**, wenn für jedes Polynom p eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $\varepsilon(n) < 1/p(n)$ für alle $n \geq n_0$ ist.
- Ein Gegner $G^s = (X^s, V^s)$, $s \in \mathbb{N}$, heißt **effizient**, wenn sowohl das Klartextpaar X^s als auch V^s durch probabilistische Schaltkreise der Größe $s^{O(1)}$ berechenbar sind.
- Das Kryptosystem S heißt **komplexitätstheoretisch sicher**, wenn jeder effiziente Gegner G^s nur einen vernachlässigbaren Vorteil erzielen kann (d.h. die Funktion $s \mapsto \alpha_{G^s}$ ist vernachlässigbar).

4 Moderne symmetrische Kryptosysteme & ihre Analyse

4.1 Produktchiffren

Produktchiffren erhält man durch die sequentielle Anwendung mehrerer Verschlüsselungsverfahren. Sie können extrem schwer zu brechen sein, auch wenn die einzelnen Komponenten leicht zu brechen sind.

Definition 90 (Produktkryptosystem). Seien $S_1 = (M_1, C_1, E_1, D_1, K_1)$ und $S_2 = (M_2, C_2, E_2, D_2, K_2)$ Kryptosysteme mit $C_1 = M_2$. Dann ist das **Produktkryptosystem** von S_1 und S_2 definiert als $S_1 \times S_2 = (M_1, C_2, E, D, K_1 \times K_2)$ mit

$$E(k_1, k_2; x) = E_2(k_2, E_1(k_1, x)) \text{ und } D(k_1, k_2; y) = D_1(k_1, D_2(k_2, y))$$

für alle $x \in M_1$, $y \in C_2$ und $(k_1, k_2) \in K_1 \times K_2$.

Der Schlüsselraum von $S_1 \times S_2$ umfasst also alle Paare (k_1, k_2) von Schlüsseln $k_1 \in K_1$ und $k_2 \in K_2$, wobei wir voraussetzen, dass die Schlüssel unabhängig gewählt werden (d.h. es gilt $p(k_1, k_2) = p(k_1)p(k_2)$).

Beispiel 91. Sei $A = \{a_0, \dots, a_{m-1}\}$. Man sieht leicht, dass die affine Chiffre $S = (M, C, K, E, D)$ mit $M = C = \mathcal{A}$ und $K = \mathbb{Z}_m^* \times \mathbb{Z}_m$ das Produkt $S = S_1 \times S_2$ der multiplikativen Chiffre $S_1 = (M, C, K_1, E_1, D_1)$ mit der additiven Chiffre $S_2 = (M, C, K_2, E_2, D_2)$ ist, da für jeden Schlüssel $k = (k_1, k_2) \in K = K_1 \times K_2 = \mathbb{Z}_m^* \times \mathbb{Z}_m$ gilt:

$$E(k, x) = k_1 x + k_2 = E_2(k_2, E_1(k_1, x)).$$

Für $S' = S_2 \times S_1$ erhalten wir das Kryptosystem $S' = (M, C, K', E', D')$ mit $K' = K_2 \times K_1 = \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m^*$ und

$$E'(k_2, k_1; x) = k_1(x + k_2) = k_1 x + k_1 k_2 = E(k_1, k_1 k_2; x)$$

für jeden Schlüssel $(k_2, k_1) \in K'$. Da die Abbildung

$$(k_2, k_1) \mapsto (k_2, k_1 k_2)$$

eine Bijektion zwischen den Schlüsselräumen K' und K ist und der Schlüssel (k_2, k_1) im System S' die gleiche Chiffrierfunktion realisiert wie der Schlüssel $(k_2, k_1 k_2)$ in S , sind die Kryptosysteme $S = S_1 \times S_2$ und $S' = S_2 \times S_1$ als gleich (genauer: äquivalent, siehe Übungen) anzusehen, d.h. S_1 und S_2 kommutieren. $\triangleleft$

Definition 92 (endomorph, idempotent). Ein Kryptosystem $S = (M, C, K, D, E)$ mit $M = C$ heißt **endomorph**. Ein endomorphes Kryptosystem S heißt **idempotent**, falls $S \times S = S$ ist.

Beispiel 93. Eine leichte Rechnung zeigt, dass die additive, die multiplikative und die affine Chiffre idempotent sind. Ebenso die Blocktransposition sowie die Vigenère- und Hill-Chiffre. $\triangleleft$

Will man durch mehrmalige Anwendung (Iteration) derselben Chiffriermethode eine höhere Sicherheit erreichen, so darf diese nicht idempotent sein. Man kann beispielsweise versuchen, ein nicht idempotentes System S durch die Kombination $S = S_1 \times S_2$ zweier idempotenter Verfahren S_1 und S_2 zu erhalten. Da S im Fall $S_1 \times S_2 = S_2 \times S_1$ wegen

$$\begin{aligned} (S_1 \times S_2) \times (S_1 \times S_2) &= S_1 \times (S_2 \times S_1) \times S_2 \\ &= S_1 \times (S_1 \times S_2) \times S_2 \\ &= (S_1 \times S_1) \times (S_2 \times S_2) \\ &= S_1 \times S_2 \end{aligned}$$

idempotent ist, dürfen hierbei S_1 und S_2 jedoch nicht kommutieren.

Im Rest dieses Kapitels werden wir nur noch das Binäralphabet $A = \{0, 1\}$ als Klar- und Kryptotextalphabet benutzen und auch der Schlüsselraum wird von der Form $\{0, 1\}^k$ sein, wobei k die Schlüssellänge bezeichnet.

Eine iterierte Blockchiffre wird typischerweise durch eine Rundenfunktion (*round function*) g und einen Schlüsselgenerator (*key schedule algorithm*) f beschrieben. Ist N die Rundenzahl, so erzeugt f bei Eingabe eines Schlüssels K eine Folge $f(K) = (K^1, \dots, K^N)$ von N Rundenschlüsseln K^i für g . Mit diesen wird ein Klartext $x = w^0$ durch N -malige Anwendung der Rundenfunktion g zu einem Kryptotext $y = w^N$ verschlüsselt:

$$\begin{aligned} w^1 &:= g(K^1, w^0) \\ &\vdots \\ w^N &:= g(K^N, w^{N-1}) \end{aligned}$$

Um y wieder zu entschlüsseln, muss die inverse Rundenfunktion g^{-1} mit umgekehrter Rundenschlüsselfolge $K^N, \dots, K^1$ benutzt werden:

$$\begin{aligned} w^{N-1} &:= g^{-1}(K^N, w^N) \\ &\vdots \\ w^0 &:= g^{-1}(K^1, w^1) \end{aligned}$$

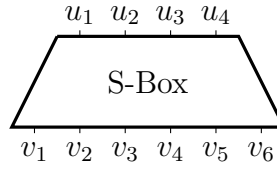
Beispiele für iterierte Chiffren sind der aus 16 Runden bestehende DES-Algorithmus und der AES mit einer variablen Rundenzahl $N \in \{10, 12, 14\}$, die wir in späteren Abschnitten behandeln werden.

4.2 Substitutions-Permutations-Netzwerke

In diesem Abschnitt betrachten wir den prinzipiellen Aufbau von iterierten Blockchiffren. Als Basisbausteine für die Rundenfunktion eignen sich Substitutionen und Transpositionen besonders gut. Aus Effizienzgründen sollten die Substitutionen nur eine relativ kleine Blocklänge l haben.

Definition 94 (Teilwort). Für ein Wort $u = u_1 \cdots u_n \in \{0, 1\}^n$ und Indizes $1 \leq i \leq j \leq n$ bezeichne $u[i, j]$ das **Teilwort** $u_i \cdots u_j$ von u . Im Fall $n = lm$ bezeichnen wir das Teilwort $u[(i-1)l+1, il]$ auch einfach mit $u_{(i)}$, d.h. es gilt $u = u_{(1)} \cdots u_{(m)}$, wobei $|u_{(i)}| = l$.

Sei $\alpha_S : \{0, 1\}^l \rightarrow \{0, 1\}^{l'}$ eine Substitution, die Binärblöcke u der Länge l in Binärblöcke $v = \alpha_S(u)$ der Länge l' überführt (engl. auch als **S-Box** bezeichnet).



Durch parallele Anwendung von m dieser S-Boxen erhalten wir folgende Substitution $S : \{0, 1\}^{lm} \rightarrow \{0, 1\}^{l'm}$,

$$S(u_1 \cdots u_{lm}) = \alpha_S(u_{(1)}) \cdots \alpha_S(u_{(m)}).$$

Für die Speicherung einer S-Box $\alpha_S : \{0, 1\}^l \rightarrow \{0, 1\}^{l'}$ auf einem Speicherchip werden $l'2^l$ Bit Speicherplatz benötigt (im Fall $l = l'$ also $l2^l$ Bit). Für $l = l' = 16$ wären dies beispielsweise 2^{20} Bit, was Smartcard-Anwendungen bereits ausschließen würde.

Für eine Transposition P auf $\{0, 1\}^{lm}$ bezeichnen wir die zugehörige Permutation auf $\{1, \dots, lm\}$ mit π_P , d.h.

$$P(u_1 \cdots u_{lm}) = u_{\pi_P(1)} \cdots u_{\pi_P(lm)}.$$

Definition 95 (Substitutions-Permutations-Netzwerk). Sei $M = C = \{0, 1\}^{lm}$ für natürliche Zahlen $l, m \geq 1$. Ein **Substitutions-Permutations-Netzwerk** (SPN) wird durch Permutationen $\pi_S : \{0, 1\}^l \rightarrow \{0, 1\}^l$ und $\pi_P : \{1, \dots, lm\} \rightarrow \{1, \dots, lm\}$ sowie durch einen Schlüsselgenerator $f : \{0, 1\}^k \rightarrow \{0, 1\}^{lm(N+1)}$ beschrieben. Der Generator f erzeugt aus einem (externen) Schlüssel $K \in \{0, 1\}^k$ eine Folge $f(K) = (K^1, \dots, K^{N+1})$ von $N + 1$ Rundenschlüsseln K^r , unter denen ein Klartext $x \in \{0, 1\}^{lm}$ gemäß folgendem Algorithmus in einen Kryptotext $y = E_{f, \pi_S, \pi_P}(K, x) \in \{0, 1\}^{lm}$ überführt wird.

Chiffrierfunktion $E_{f, \pi_S, \pi_P}(K, x)$

```

1   $w^0 := x$ 
2  for  $r := 1$  to  $N - 1$  do
3     $u^r := w^{r-1} \oplus K^r$ 
4     $v^r := S(u^r)$ 
5     $w^r := P(v^r)$ 
6   $u^N := w^{N-1} \oplus K^N$ 
7   $v^N := S(u^N)$ 
8   $y := v^N \oplus K^{N+1}$ 

```

Zu Beginn jeder Runde $r \in \{1, \dots, N\}$ wird w^{r-1} zunächst einer XOR-Operation mit dem Rundenschlüssel K^r unterworfen (dies wird *round key mixing* genannt), deren Resultat u^r den S-Boxen zugeführt wird. Auf die Ausgabe v^r der S-Boxen wird in jeder Runde $r \leq N - 1$ die Transposition P angewendet, was die Eingabe w^r für die nächste Runde $r + 1$ liefert.

Am Ende der letzten Runde $r = N$ wird nicht die Transposition P angewandt, sondern der Rundenschlüssel K^{N+1} auf v^N addiert. Durch diese (*whitening* genannte) Vorgehensweise wird einerseits erreicht, dass auch für den letzten Chiffrierschritt der Schlüssel benötigt und somit der Gegner von einer partiellen Entschlüsselung des Kryptotexts abgehalten wird. Zum Zweiten ermöglicht dies eine (legale) Entschlüsselung nach fast demselben Verfahren (siehe Übungen).

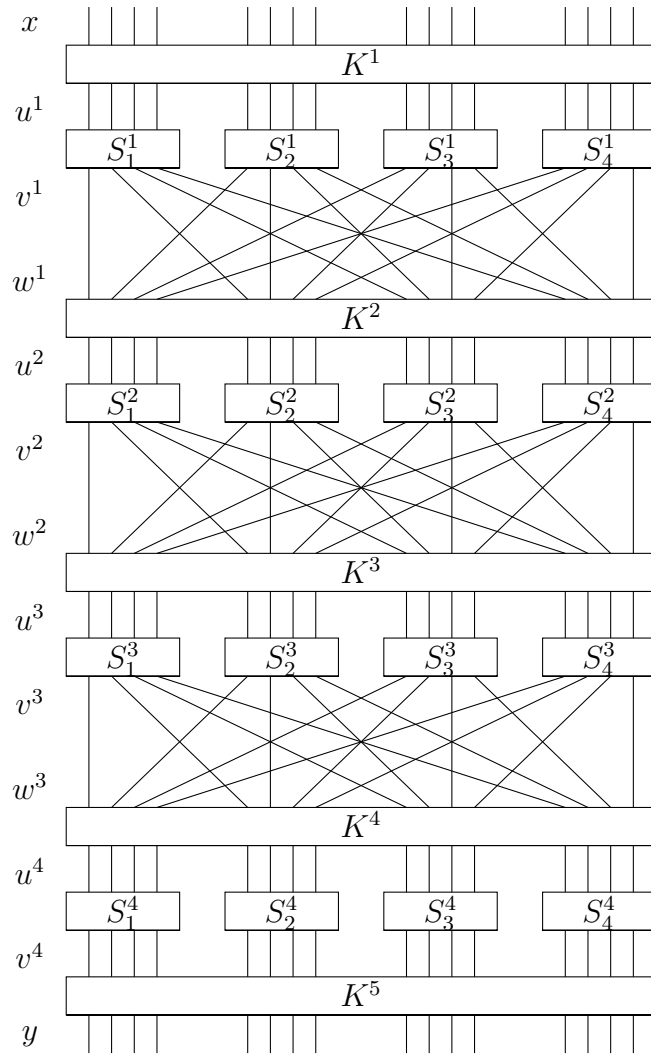


Abbildung 4.1: Ein Substitutions-Permutations-Netzwerk.

Beispiel 96. Sei $l = m = N = 4$ und sei $k = 32$. Für f wählen wir die Funktion $f(K) = (K^1, \dots, K^5)$ mit $K^r = K[4(r-1)+1, 4(r-1)+16]$. Weiter seien $\pi_S : \{0, 1\}^4 \rightarrow \{0, 1\}^4$ und $\pi_P : \{1, \dots, 16\} \rightarrow \{1, \dots, 16\}$ die folgenden Permutationen (wobei die Argumente und Werte von π_S hexadezimal dargestellt sind; siehe auch Abbildung 4.1):

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
$\pi_S(z)$	E	4	D	1	2	F	B	8	3	A	6	C	5	9	0	7

und

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\pi_P(i)$	1	5	9	13	2	6	10	14	3	7	11	15	4	8	12	16

Für den Schlüssel $K = 0011\ 1010\ 1001\ 0100\ 1101\ 0110\ 0011\ 1111$ liefert f beispielsweise

die Rundenschlüssel $f(K) = (K^1, \dots, K^5)$ mit

$$K^1 = 0011\ 1010\ 1001\ 0100,$$

$$K^2 = 1010\ 1001\ 0100\ 1101,$$

$$K^3 = 1001\ 0100\ 1101\ 0110,$$

$$K^4 = 0100\ 1101\ 0110\ 0011,$$

$$K^5 = 1101\ 0110\ 0011\ 1111,$$

unter denen der Klartext $x = 0010\ 0110\ 1011\ 0111$ die folgenden Chiffrierschritte durchläuft:

$$\begin{aligned} x &= 0010\ 0110\ 1011\ 0111 = w^0 \\ w^0 \oplus K^1 &= 0001\ 1100\ 0010\ 0011 = u^1 \\ S(u^1) &= 0100\ 0101\ 1101\ 0001 = v^1 \\ P(v^1) &= 0010\ 1110\ 0000\ 0111 = w^1 \\ &\vdots \\ P(v^3) &= 1110\ 0100\ 0110\ 1110 = w^3 \\ w^3 \oplus K^4 &= 1010\ 1001\ 0000\ 1101 = u^4 \\ S(u^4) &= 0110\ 1010\ 1110\ 1001 = v^4 \\ u^4 \oplus K^5 &= 1011\ 1100\ 1101\ 0110 = y. \end{aligned}$$

◁

4.3 Lineare Approximationen

Sei $f : \{0, 1\}^l \rightarrow \{0, 1\}^{l'}$ eine Abbildung. Wählen wir für f eine zufällige Eingabe $U = U_1 \cdots U_l$ unter Gleichverteilung, so gilt für die zugehörige Ausgabe $V = f(U) = V_1 \cdots V_{l'}$,

$$\Pr[V = v \mid U = u] = \begin{cases} 1 & \pi_S(u) = v, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $u \in \{0, 1\}^l$ und $v \in \{0, 1\}^{l'}$. Wegen $\Pr[U = u] = 2^{-l}$ folgt

$$\Pr[V = v, U = u] = \begin{cases} 2^{-l} & \pi_S(u) = v, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist f linear, so sind die Zufallsvariablen V_j in der Form

$$V_j = U_{i_1} \oplus \cdots \oplus U_{i_k}$$

für geeignete Indizes $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq l$ darstellbar. Die Idee hinter der linearen Kryptoanalyse ist nun, Gleichungen der Form

$$V_{j_1} \oplus \cdots \oplus V_{j_{k'}} = U_{i_1} \oplus \cdots \oplus U_{i_k} \oplus c$$

mit $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq l$, $1 \leq j_1 < \cdots < j_{k'} \leq l'$ und $c \in \{0, 1\}$ zu finden, die mit großer Wahrscheinlichkeit gelten. Definieren wir für $a \in \{0, 1\}^l$ und $b \in \{0, 1\}^{l'}$ die Zufallsvariablen

$$U_a = \bigoplus_{i=1}^l a_i U_i \quad \text{und} \quad V_b = \bigoplus_{i=1}^{l'} b_i V_i,$$

so sind wir also an solchen Werten für a und b interessiert, für die das Ereignis $V_b = U_a$ (oder gleichbedeutend: $U_a \oplus V_b = 0$) eine möglichst große oder möglichst kleine Wahrscheinlichkeit besitzt. In beiden Fällen lässt sich nämlich der Wert von V_b in Abhängigkeit von U_a relativ gut vorhersagen. Die durch das Paar (a, b) beschriebene **lineare Approximation** $U_a \oplus V_b$ ist also um so besser, je stärker die Wahrscheinlichkeit $\Pr[U_a \oplus V_b = 0]$ von $1/2$ abweicht.

Definition 97. Für eine Zufallsvariable X mit Wertebereich $W(X) = \{0, 1\}$ bezeichne $\varepsilon(X)$ den Wert $\varepsilon(X) = \Pr[X = 0] - 1/2$ (auch Bias von X genannt).

Unter Benutzung dieser Notation lässt sich also die Güte einer linearen Approximation $U_a \oplus V_b$ durch den Absolutbetrag $|\varepsilon(U_a \oplus V_b)|$ ihres Bias-Wertes bemessen.

Beispiel 98. Wir betrachten die S-Box $\pi_S : \{0, 1\}^4 \rightarrow \{0, 1\}^4$ aus Beispiel 96. Dann nimmt die Zufallsvariable $(U_1, \dots, U_4, V_1, \dots, V_4)$ die folgenden 16 Werte jeweils mit Wahrscheinlichkeit $2^{-4} = 1/16$ an.

U_1	U_2	U_3	U_4	V_1	V_2	V_3	V_4	$U_3 \oplus U_4 \oplus V_1 \oplus V_4$
0	0	0	0	1	1	1	0	1
0	0	0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	0	1	1	1	1

Um nun $\varepsilon(U_a \oplus V_b)$ zu berechnen, genügt es, die Anzahl $L(a, b)$ der Zeilen zu bestimmen, für die $U_a = V_b$ ist. Dann gilt $\Pr[U_a \oplus V_b = 0] = \Pr[U_a = V_b] = L(a, b)/16$ und somit

$$\varepsilon(U_a \oplus V_b) = L(a, b)/16 - 1/2 = (L(a, b) - 8)/16.$$

Für $a = 0011$ und $b = 1001$ gibt es z.B. $L(a, b) = 2$ Zeilen (Zeile 5 und Zeile 10) mit $U_a = U_3 \oplus U_4 = V_b = V_1 \oplus V_4$, d.h. $\varepsilon(U_3 \oplus U_4 \oplus V_1 \oplus V_4) = (L(a, b) - 8)/16 = -3/8$. Die folgende Tabelle zeigt für alle Werte von a und b (hexadezimal dargestellt) die Anzahlen $L(a, b)$.

a	b															
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	16	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
1	8	8	6	6	8	8	6	14	10	10	8	8	10	10	8	8
2	8	8	6	6	8	8	6	6	8	8	10	10	8	8	2	10
3	8	8	8	8	8	8	8	8	10	2	6	6	10	10	6	6
4	8	10	8	6	6	4	6	8	8	6	8	10	10	4	10	8
								$\vdots$								
B	8	12	8	4	12	8	12	8	8	8	8	8	8	8	8	8
								$\vdots$								
F	8	6	4	6	6	8	10	8	8	6	12	6	6	8	10	8

<

4.4 Lineare Kryptoanalyse eines SPN

Wir betrachten nun das SPN aus Beispiel 96 und führen eine lineare Kryptoanalyse durch. Dabei handelt es sich um einen Angriff bei bekanntem Klartext, d.h. es steht eine Menge M von t Klartext-Kryptotext-Paaren (x, y) zur Verfügung, die alle mit dem gleichen unbekannten Schlüssel K erzeugt wurden.

Seien $K^1, \dots, K^5$ die zu K gehörigen Rundenschlüssel (diese sind wie K unbekannt, aber konstant). Das Ziel besteht zunächst einmal darin, eine lineare Approximation für die Abbildung $x \mapsto u^4$ zu finden, bei der nur die ersten vier Rundenschlüssel $K^1, \dots, K^4$ benutzt werden (siehe Abbildung 4.2). Hierzu verwenden wir die beiden linearen Approximationen

$$T = U_1 \oplus U_3 \oplus U_4 \oplus V_2 \quad \text{und} \quad T' = U_2 \oplus V_2 \oplus V_4$$

an die S-Box S mit den Bias-Werten $\varepsilon(T) = (L(B, 4) - 8)/16 = (12 - 8)/16 = 1/4$ und $\varepsilon(T') = (L(4, 5) - 8)/16 = (4 - 8)/16 = -1/4$ (also $\Pr[T = 0] = \Pr[T' = 1] = 3/4$).

Konkret verwenden wir T für die S-Box S_2^1 ,

$$T_1 = U_5^1 \oplus U_7^1 \oplus U_8^1 \oplus V_6^1$$

und T' für die drei S-Boxen S_2^2, S_2^3, S_4^3 ,

$$T_2 = U_6^2 \oplus V_6^2 \oplus V_8^2, \quad T_3 = U_6^3 \oplus V_6^3 \oplus V_8^3, \quad T_4 = U_{14}^3 \oplus V_{14}^3 \oplus V_{16}^3.$$

Nun schalten wir diese vier linearen Approximationen an die S-Boxen S_2^1, S_2^2, S_2^3 und S_4^3 zu einer linearen Approximation $X_a \oplus U_b^4$ an die Abbildung $x \mapsto u^4$ zusammen und erhalten für ein Bit $c \in \{0, 1\}$ die Gleichung

$$\underbrace{X_5 \oplus X_7 \oplus X_8}_{=X_a \text{ für } a=0B00} \oplus \underbrace{U_6^4 \oplus U_8^4 \oplus U_{14}^4 \oplus U_{16}^4}_{=U_b^4 \text{ für } b=0505} = T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 \oplus T_4 \oplus c \quad (4.1)$$

An dieser Stelle ergeben sich nun folgende drei Fragen.

1. Warum gilt (4.1)?
2. Wie gut ist die lineare Approximation $X_a \oplus U_b^4$ an die Abbildung $x \mapsto u^4$?
3. Wie können wir mit ihrer Hilfe einzelne Schlüsselbits bestimmen?

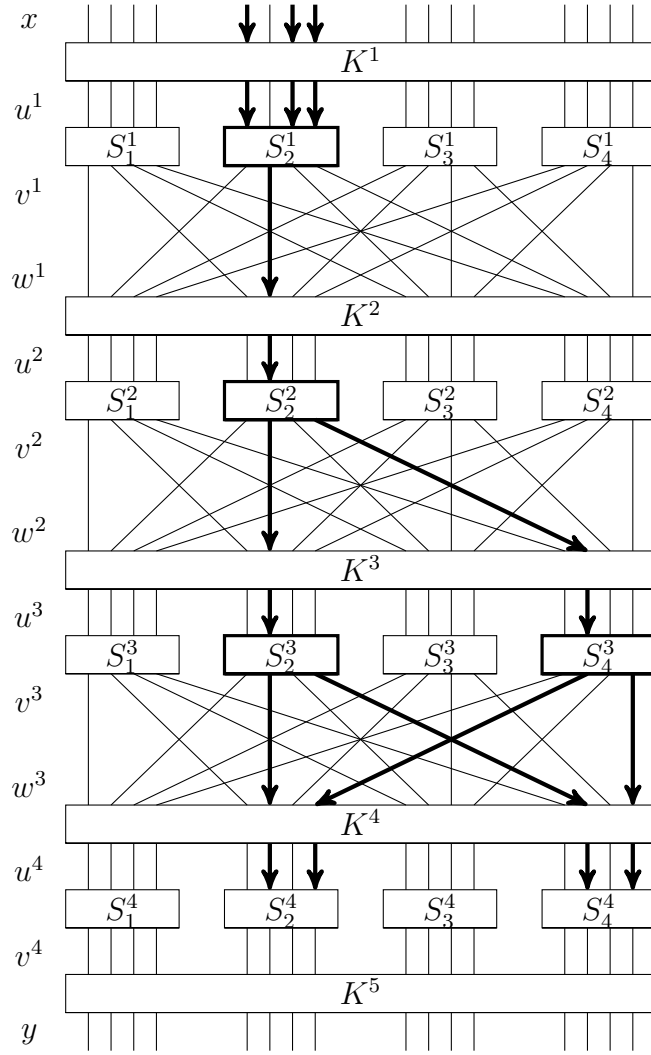


Abbildung 4.2: Eine lineare Approximation an ein Substitutions-Permutations-Netzwerk.

Wir gehen zunächst auf Frage 1 ein. Seien $c_1, \dots, c_4$ die Schlüsselbitsummen

$$c_1 = K_5^1 \oplus K_7^1 \oplus K_8^1, \quad c_2 = K_6^2, \quad c_3 = K_6^3 \oplus K_{14}^3, \quad c_4 = K_6^4 \oplus K_8^4 \oplus K_{14}^4 \oplus K_{16}^4$$

(man beachte, dass die Schlüsselbits K_i^r konstant sind) und sei $c = c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 \oplus c_4$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 X_5 \oplus X_7 \oplus X_8 &= U_5^1 \oplus U_7^1 \oplus U_8^1 \oplus c_1 \\
 &= T_1 \oplus V_6^1 \oplus c_1 \\
 &= T_1 \oplus W_6^1 \oplus c_1 \\
 &= T_1 \oplus U_6^2 \oplus c_1 \oplus c_2 \\
 &= T_1 \oplus T_2 \oplus V_6^2 \oplus V_8^2 \oplus c_1 \oplus c_2 \\
 &= T_1 \oplus T_2 \oplus W_6^2 \oplus W_{14}^2 \oplus c_1 \oplus c_2 \\
 &= T_1 \oplus T_2 \oplus U_6^3 \oplus U_{14}^3 \oplus c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 \\
 &= T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 \oplus T_4 \oplus V_6^3 \oplus V_8^3 \oplus V_{14}^3 \oplus V_{16}^3 \oplus c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 \\
 &= T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 \oplus T_4 \oplus W_6^3 \oplus W_8^3 \oplus W_{14}^3 \oplus W_{16}^3 \oplus c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 \\
 &= T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 \oplus T_4 \oplus U_6^4 \oplus U_8^4 \oplus U_{14}^4 \oplus U_{16}^4 \oplus \underbrace{c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 \oplus c_4}_c
 \end{aligned}$$

Nun zu Frage 2: Wären die Zufallsvariablen $T_1, \dots, T_4$ unabhängig, so würde uns das folgende Piling-up-Lemma den Bias-Wert $2^3(1/4)(-1/4)^3 = -1/32$ für deren Summe $T_1 \oplus \dots \oplus T_4$ und somit den Bias-Wert $(-1)^{c+1}/32$ für die lineare Approximation $X_a \oplus U_b^4$ liefern. Sind nämlich X_1, X_2 unabhängige Zufallsvariablen mit Wertebereich $W(X_i) = \{0, 1\}$ und Bias $\varepsilon_i = \varepsilon(X_i)$, dann ist

$$\begin{aligned} \Pr[X_1 \oplus X_2 = 0] &= \Pr[X_1 = X_2 = 0] + \Pr[X_1 = X_2 = 1] \\ &= (1/2 + \varepsilon_1)(1/2 + \varepsilon_2) + (1/2 - \varepsilon_1)(1/2 - \varepsilon_2) \\ &= 1/2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 \end{aligned}$$

und $\Pr[X_1 \oplus X_2 = 1] = 1/2 - 2\varepsilon_1\varepsilon_2$, d.h. es gilt $\varepsilon(X_1 \oplus X_2) = 2\varepsilon_1\varepsilon_2$. Diese Beobachtung lässt sich leicht verallgemeinern.

Lemma 99 (Piling-up Lemma).

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige $\{0, 1\}$ -wertige Zufallsvariablen mit Bias $\varepsilon_i = \varepsilon(X_i)$. Dann gilt

$$\varepsilon(X_1 \oplus \dots \oplus X_n) = 2^{n-1} \prod_{i=1}^n \varepsilon_i.$$

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion über n .

Induktionsanfang ($n = 1$): Klar.

Induktionsschritt ($n \rightsquigarrow n + 1$): Nach Induktionsvoraussetzung hat die Zufallsvariable $Z = X_1 \oplus \dots \oplus X_n$ den Bias $\varepsilon(Z) = 2^{n-1}\varepsilon(X_1) \dots \varepsilon(X_n)$ und daher folgt

$$\varepsilon(X_1 \oplus \dots \oplus X_{n+1}) = \varepsilon(Z \oplus X_{n+1}) = 2\varepsilon(Z)\varepsilon_{n+1} = 2^n \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n+1}.$$

□

Beispiel 100. Seien X_1, X_2, X_3 paarweise unabhängige Zufallsvariablen mit $\varepsilon(X_i) = 1/4$ für $i = 1, 2, 3$. Dann liefert das Piling-up Lemma die Bias-Werte $\varepsilon(X_i \oplus X_j) = 1/8$ für $1 \leq i < j \leq 3$. Man beachte, dass die Zufallsvariablen $Y = X_1 \oplus X_2$ und $Z = X_2 \oplus X_3$ nicht unabhängig sind und somit das Piling-up-Lemma in diesem Fall nicht anwendbar ist. Dieses würde nämlich für $Y \oplus Z$ einen Bias-Wert von $2(1/8)^2 = 1/32$ ergeben, wogegen

$$Y \oplus Z = (X_1 \oplus X_2) \oplus (X_2 \oplus X_3) = X_1 \oplus X_3$$

und daher $\varepsilon(Y \oplus Z) = \varepsilon(X_1 \oplus X_3) = 1/8$ ist. ◁

Zwar sind die Zufallsvariablen T_i , aus denen eine lineare Approximation $X_a \oplus U_b^N = T_1 \oplus \dots \oplus T_k \oplus c$ an die Abbildung $x \mapsto u^N$ gebildet wird, in der Regel nicht unabhängig. Dennoch zeigt sich in praktischen Anwendungen, dass der Bias-Wert $\varepsilon(T_1 \oplus \dots \oplus T_k)$ von $T_1 \oplus \dots \oplus T_k$ meist nicht zu sehr von dem “hypothetischen” Wert $2^{k-1} \prod_{i=1}^k \varepsilon(T_i)$ abweicht, welcher sich aus dem Piling-up Lemma ergeben würde. Daher können wir

$$\varepsilon(X_{0B00} \oplus U_{0505}^4) \approx (-1)^{c+1}/32 \quad \text{bzw.} \quad \Pr[U_{0505}^4 = X_{0B00} \oplus c \oplus 1] \approx 1/2 + 1/32$$

annehmen.

Und schließlich zu Frage 3:

Wir wissen bereits, dass ein zufälliger Klartext X entweder mit hoher (falls $c = 1$ ist) oder mit niedriger Wahrscheinlichkeit (falls $c = 0$ ist) auf ein Zwischenresultat U^4 mit

$$X_5 \oplus X_7 \oplus X_8 \oplus U_6^4 \oplus U_8^4 \oplus U_{14}^4 \oplus U_{16}^4 = 0 \tag{4.2}$$

führt. Gehen wir also davon aus, dass M eine repräsentative Auswahl von Klartext-Kryptotext-Paaren (x, y) darstellt, so wird die Anzahl der Paare (x, y) in M , die (4.2) erfüllen, ebenfalls eine Mehrheit oder eine Minderheit in M bilden. Man beachte, dass sich für jeden Subschlüssel-Kandidaten (engl. *candidate subkey*) (L_1, L_2) für $(K_{(2)}^5, K_{(4)}^5)$ die zu einem Kryptotext y gehörigen Werte u_6^4, u_8^4, u_{14}^4 und u_{16}^4 leicht berechnen lassen, da π_S^{-1} bekannt ist.

Die Idee besteht nun darin, für jeden Kandidaten (L_1, L_2) die Anzahl $\alpha(L_1, L_2)$ aller Paare (x, y) in M zu bestimmen, für die der Kandidat (L_1, L_2) die Gleichung (4.2) erfüllt. Für den richtigen Subschlüssel (L_1, L_2) wird diese Anzahl ungefähr bei $t/2 \pm t/32$ liegen, wogegen bei einem falschen Subschlüssel (L_1, L_2) mit einer Anzahl von circa $t/2$ zu rechnen ist. Für genügend große Werte von t lassen sich auf diese Weise 8 Bit von K^5 (und damit von K) bestimmen.

Algorithmus LINEARATTACK

```

1  for  $(L_1, L_2) := (0, 0)$  to  $(F, F)$  do
2     $\alpha(L_1, L_2) := 0$ 
3  for each  $(x, y) \in M$  do
4    for  $(L_1, L_2) := (0, 0)$  to  $(F, F)$  do
5       $v_{(2)}^4 := L_1 \oplus y_{(2)}$ 
6       $v_{(4)}^4 := L_2 \oplus y_{(4)}$ 
7       $u_{(2)}^4 := \pi_S^{-1}(v_{(2)}^4)$ 
8       $u_{(4)}^4 := \pi_S^{-1}(v_{(4)}^4)$ 
9      if  $x_5 \oplus x_7 \oplus x_8 \oplus u_6^4 \oplus u_8^4 \oplus u_{14}^4 \oplus u_{16}^4 = 0$  then
10        $\alpha(L_1, L_2) := \alpha(L_1, L_2) + 1$ 
11   $max := -1$ 
12  for  $(L_1, L_2) := (0, 0)$  to  $(F, F)$  do
13     $\beta(L_1, L_2) := |\alpha(L_1, L_2) - t/2|$ 
14    if  $\beta(L_1, L_2) > max$  then
15       $max := \beta(L_1, L_2)$ 
16       $maxkey := (L_1, L_2)$ 
17  output( $maxkey$ )

```

Im allgemeinen werden für eine erfolgreiche lineare Attacke circa $t \approx c\varepsilon^{-2}$ Klartext-Kryptotext-Paare benötigt, wobei c eine „kleine“ Konstante ist (im Beispielfall reichen $t \approx 8000$ Paare, d.h. $c \approx 8$, da $\varepsilon^{-2} = 1024$ ist).

4.5 Differentielle Kryptoanalyse von SPNs

Bei der differentiellen Kryptoanalyse handelt es sich um einen Angriff bei frei wählbarem Klartext. Genauer gesagt, basiert der Angriff auf einer Menge M von t Klartext-Kryptotext-Doppelpaaren (x, x^*, y, y^*) mit der Eigenschaft, dass alle Klartext-Paare (x, x^*) die gleiche Differenz $x' = x \oplus x^*$ bilden.

Definition 101 (Eingabe- und Ausgabedifferenz). Seien $u, u^* \in \{0, 1\}^l$ zwei Eingaben für eine S -Box $\pi_S : \{0, 1\}^l \rightarrow \{0, 1\}^{l'}$ und seien $v = \pi_S(u)$ und $v^* = \pi_S(u^*)$ die zugehörigen Ausgaben. Dann wird $u' = u \oplus u^*$ die **Eingabedifferenz** (engl. *input-xor*) und $v' = \pi_S(u) \oplus \pi_S(u^*)$ die **Ausgabedifferenz** (engl. *output-xor*) des Paares (u, u^*)

genannt. Für eine vorgegebene Eingabedifferenz $a' \in \{0, 1\}^l$ sei weiter

$$\Delta(a') = \{(u, u^*) \mid u, u^* \in \{0, 1\}^l, u \oplus u^* = a'\} = \{(u, u \oplus a') \mid u \in \{0, 1\}^l\}$$

die Menge aller Eingabepaare, die die Differenz a' realisieren.

Berechnen wir für alle Eingabepaare $(u, u^*) \in \Delta(a')$ die zugehörigen Ausgabedifferenzen, so verteilen sich diese mehr oder weniger gleichmäßig auf die 2^l möglichen Werte in $\{0, 1\}^l$. Man beachte, dass im Fall einer affinen S-Box nur die Ausgabedifferenz $\pi_S(a')$ auftritt, da dann $\pi_S(u) \oplus \pi_S(u^*) = \pi_S(u \oplus u^*)$ ist. Ist dagegen π_S nicht linear, so kann die Eingabedifferenz a' auf unterschiedliche Ausgabedifferenzen führen, je nachdem, durch welches Eingabepaar $(u, u^*) \in \Delta(a')$ die Differenz a' realisiert wird. Im Allgemeinen lässt sich eine differentielle Kryptoanalyse um so leichter durchführen, je ungleichmäßiger die auftretenden Ausgabedifferenzen verteilt sind.

Definition 102 (Differential, Weitergabequotient). Sei $a' \in \{0, 1\}^l$ eine Eingabe- und sei $b' \in \{0, 1\}^l$ eine Ausgabedifferenz für eine S-Box π_S . Dann heißt (a', b') **Differential**. Die Anzahl der Eingabepaare (u, u^*) , die die Eingabedifferenz a' in die Ausgabedifferenz b' überführen, bezeichnen wir mit $D(a', b')$, d.h.

$$D(a', b') = \|\{(u, u^*) \in \Delta(a') \mid \pi_S(u) \oplus \pi_S(u^*) = b'\}\|.$$

Der **Weitergabequotient** (engl. propagation ratio) von π_S für ein Differential (a', b') ist

$$Q(a', b') = \frac{D(a', b')}{2^l}.$$

$Q(a', b')$ ist also die (bedingte) Wahrscheinlichkeit

$$\Pr[\underbrace{\pi_S(U) \oplus \pi_S(U^*)}_{V'} = b' \mid \underbrace{U \oplus U^*}_{U'} = a'],$$

dass zwei zufällig gewählte Eingaben U und U^* die Ausgabedifferenz $V' = b'$ erzeugen, wenn sie die Eingabedifferenz $U' = a'$ haben.

Beispiel 103. Betrachten wir die S-Box $\pi_S : \{0, 1\}^4 \rightarrow \{0, 1\}^4$ aus Beispiel 96, so erhalten wir für die Eingabedifferenz $a' = 1011$ die Menge

$$\Delta(a') = \{(0000, 1011), \dots, (1111, 0100)\}$$

von möglichen Eingabepaaren, die auf folgende Ausgabedifferenzen $v' = v \oplus v^* = \pi_S(u) \oplus$

$\pi_S(u^*)$ führen:

u	u^*	v	v^*	v'
0000	1011	1110	1100	0010
0001	1010	0100	0110	0010
0010	1001	1101	1010	0111
0011	1000	0001	0011	0010
0100	1111	0010	0111	0101
0101	1110	1111	0000	1111
0110	1101	1011	1001	0010
0111	1100	1000	0101	1101
1000	0011	0011	0001	0010
1001	0010	1010	1101	0111
1010	0001	0110	0100	0010
1011	0000	1100	1110	0010
1100	0111	0101	1000	1101
1101	0110	1001	1011	0010
1110	0101	0000	1111	1111
1111	0100	0111	0010	0101

Die Ausgabedifferenz $b' = 0010$ kommt also $D(a', 0010) = 8$ Mal vor, während die Differenzen 0101, 0111, 1101 und 1111 je zwei Mal und die übrigen Werte überhaupt nicht vorkommen (siehe Zeile B in nachfolgender Tabelle). Führen wir diese Berechnungen für jede der $2^4 = 16$ Eingabedifferenzen $a' \in \{0, 1\}^4$ aus, so erhalten wir die folgenden Werte für die Häufigkeiten $D(a', b')$ der Ausgabedifferenz b' bei Eingabedifferenz a' (a' und b' sind hexadezimal dargestellt):

a'	b'															
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	2	0	0	0	2	0	2	4	0	4	2	0	0
2	0	0	0	2	0	6	2	2	0	2	0	0	0	0	2	0
3	0	0	2	0	2	0	0	0	0	4	2	0	2	0	0	4
$\vdots$									$\vdots$							
B	0	0	8	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	2	0	2
$\vdots$									$\vdots$							
F	0	2	0	0	6	0	0	0	0	4	0	2	0	0	2	0

◁

Können wir nun in einem SPN für bestimmte S-Boxen S_i Differentiale (a'_i, b'_i) finden, so dass die Eingabedifferenz dieser Differentiale mit der (permutierten) Ausgabedifferenz der Differentiale in der jeweils vorhergehenden Runde übereinstimmt (siehe Abbildung 4.3), so können wir diese Differentiale zu einer so genannten **Differentialspur** (engl. differential trail) zusammen setzen. Unter der Annahme, dass die Ereignisse, ob die ausgewählten S-Boxen S_i (diese werden auch als **aktiv** bezeichnet) den zugeordneten Differentialen (a'_i, b'_i) folgen, unabhängig voneinander eintreten, berechnet sich der Weitergabequotient der Spur als das Produkt der Weitergabequotienten der beteiligten Differentiale. Obwohl diese

Annahme i.a. nicht zutrifft, treten in praktischen Anwendungen kaum große Abweichungen von diesem hypothetischen Wert auf.

Beispiel 104. Betrachten wir das SPN aus Beispiel 96, so lassen sich folgende Differentiale zu einer Spur für die Abbildung $x \mapsto u^4$ kombinieren (siehe auch Abbildung 4.3):

Für S_2^1 : das Differential $(1011, 0010) = (B, 2)$ mit $Q(B, 2) = 1/2$,

für S_3^2 : das Differential $(0100, 0110) = (4, 6)$ mit $Q(4, 6) = 3/8$ und

für S_2^3 und S_3^3 : das Differential $(0010, 0101) = (2, 5)$ mit $Q(2, 5) = 3/8$.

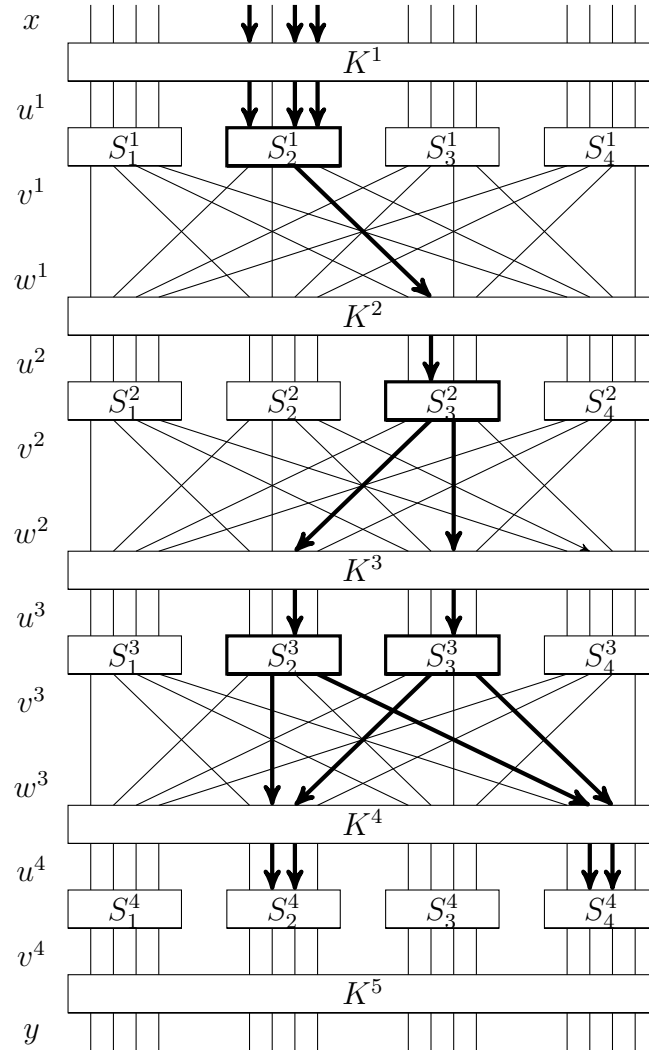


Abbildung 4.3: Eine Differentialspur für ein Substitutions-Permutations-Netzwerk.

Gemäß dieser Spur führt also die Klartextdifferenz

$$x' = 0000\ 1011\ 0000\ 0000$$

mit hypothetischer Wahrscheinlichkeit $1/2(3/8)^3 = 27/1024 \approx 0,026$ auf die Differenz

$$(v^3)' = 0000\ 0101\ 0101\ 0000,$$

welche wiederum mit Wahrscheinlichkeit 1 auf die Differenz

$$(u^4)' = 0000\ 0110\ 0000\ 0110$$

führt. Das Differential

$$(a', b') = (0000\ 1011\ 0000\ 0000, 0000\ 0110\ 0000\ 0110)$$

für die Abbildung $x \mapsto u^4$ hat also einen hypothetischen Weitergabequotienten von $\varepsilon = Q(a', b') = 27/1024$. $\triangleleft$

Sei nun (a', b') ein Differential für die Abbildung $x \mapsto u^4$ mit einem hypothetischen Weitergabequotienten $\varepsilon = Q(a', b')$. Weiter sei M eine Menge von t Klartext-Kryptotext-Doppelpaaren (x, x^*, y, y^*) , die alle mit dem gleichen unbekannten Schlüssel K erzeugt wurden und zusätzlich die Eigenschaft haben, dass die Klartextdifferenz $x' = x \oplus x^* = a'$ ist. Dann wird ca. ein ε -Anteil dieser Doppelpaare der vorgegebenen Differentialspur folgen und daher bei Verschlüsselung mit K Zwischenergebnisse u^4 und $(u^4)^*$ liefern, die die Differenz

$$(u^4)' = u^4 \oplus (u^4)^* = b'$$

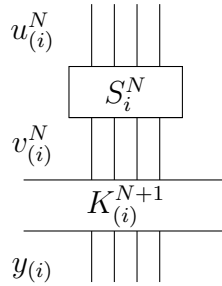
aufweisen. Doppelpaare mit dieser Eigenschaft werden **richtige Doppelpaare** (für das Differential (a', b')) genannt. Ein Großteil der falschen Doppelpaare lässt sich daran erkennen, dass die Kryptotext-Differenzen nicht die erwarteten 0^l -Blöcke aufweisen (im aktuellen Beispiel sind dies die Blöcke $y'_{(1)}$ und $y'_{(3)}$). Es empfiehlt sich, diese Doppelpaare auszufiltern, da sie (wie alle falschen Doppelpaare) nur „Hintergrundrauschen“ erzeugen und somit die Bestimmung des Schlüssels eher behindern.

Beobachtung 105. Für die Ausgabe $v_{(i)}^N$ der S-Box S_i^N in Runde N gilt

$$v_{(i)}^N = y_{(i)} \oplus K_{(i)}^{N+1}$$

und die Eingabe $u_{(i)}^N$ der S-Box S_i^N in Runde N ist

$$u_{(i)}^N = \pi_S^{-1}(v_{(i)}^N) = \pi_S^{-1}(y_{(i)} \oplus K_{(i)}^{N+1})$$



Falls die S-Box S_i^N nicht affin ist, hängt die aus den Kryptotextblöcken $y_{(i)}$ und $(y_{(i)})^*$ zurückgerechnete Eingabedifferenz

$$(u_{(i)}^N)' = u_{(i)}^N \oplus (u_{(i)}^N)^* = \pi_S^{-1}(y_{(i)} \oplus K_{(i)}^{N+1}) \oplus \pi_S^{-1}((y_{(i)})^* \oplus K_{(i)}^{N+1})$$

von dem Schlüsselblock $K_{(i)}^{N+1}$ ab. Ist also (x, x^*, y, y^*) ein richtiges Doppelpaar, so sind neben den Kryptotextblöcken $y_{(i)}$ und $y_{(i)}^*$ auch die Eingabedifferenzen $b'_{(i)} = (u_{(i)}^N)'$ von S_i^N bekannt. Folglich kommen nur solche Subkey-Werte L für $K_{(i)}^{N+1}$ infrage, für die

$$\pi_S^{-1}(y_{(i)} \oplus L) \oplus \pi_S^{-1}(y_{(i)}^* \oplus L) = b'_{(i)} \quad (4.3)$$

ist. Erfüllt L Gleichung (4.3), so sagen wir auch, L ist mit dem Doppelpaar (x, x^*, y, y^*) **konsistent**.

Gemäß Beobachtung 105 kann jedes richtige Doppelpaar dazu benutzt werden, einige Kandidaten für den Rundenschlüsselblock $K_{(i)}^{N+1}$ auszuschließen. Ist M hinreichend groß, so wird sich schließlich der richtige Schlüsselblock als derjenige herausstellen, der mit den meisten Doppelpaaren konsistent ist. Wir benutzen nun die Spur aus Beispiel 104 für einen Angriff mittels differentieller Analyse.

Beispiel 106. Der Algorithmus DIFFERENTIALATTACK bestimmt für jeden Subschlüssel-Kandidaten (L_1, L_2) für $(K_{(2)}^5, K_{(4)}^5)$ die Anzahl $\gamma(L_1, L_2)$ aller Doppelpaare (x, x^*, y, y^*) in M , die mit (L_1, L_2) konsistent sind und (in Zeile 4) nicht als falsch erkannt werden. Ausgegeben wird der Kandidat (L_1, L_2) mit dem größten γ -Wert. $\triangleleft$

Algorithmus DIFFERENTIALATTACK

```

1  for  $(L_1, L_2) := (0, 0)$  to  $(F, F)$  do
2     $\gamma(L_1, L_2) := 0$ 
3  for each  $(x, x^*, y, y^*) \in M$  do
4    if  $y_{(1)} = y_{(1)}^*$  und  $y_{(3)} = y_{(3)}^*$  then
5      for  $(L_1, L_2) := (0, 0)$  to  $(F, F)$  do
6         $v_{(2)}^4 := L_1 \oplus y_{(2)}$ 
7         $v_{(4)}^4 := L_2 \oplus y_{(4)}$ 
8         $u_{(2)}^4 := \pi_S^{-1}(v_{(2)}^4)$ 
9         $u_{(4)}^4 := \pi_S^{-1}(v_{(4)}^4)$ 
10        $(v_{(2)}^4)^* := L_1 \oplus y_{(2)}^*$ 
11        $(v_{(4)}^4)^* := L_2 \oplus y_{(4)}^*$ 
12        $(u_{(2)}^4)^* := \pi_S^{-1}((v_{(2)}^4)^*)$ 
13        $(u_{(4)}^4)^* := \pi_S^{-1}((v_{(4)}^4)^*)$ 
14        $(u_{(2)}^4)' := u_{(2)}^4 \oplus (u_{(2)}^4)^*$ 
15        $(u_{(4)}^4)' := u_{(4)}^4 \oplus (u_{(4)}^4)^*$ 
16       if  $(u_{(2)}^4)' = 0110$  und  $(u_{(4)}^4)' = 0110$  then
17          $\gamma(L_1, L_2) := \gamma(L_1, L_2) + 1$ 
18   max ← 1
19   for  $(L_1, L_2) := (0, 0)$  to  $(F, F)$  do
20     if  $\gamma(L_1, L_2) > \text{max}$  then
21       max :=  $\gamma(L_1, L_2)$ 
22       maxkey :=  $(L_1, L_2)$ 
23   output(maxkey)

```

Im allgemeinen werden für eine erfolgreiche differentielle Attacke circa $t \approx c\varepsilon^{-1}$ Klartext-Kryptotext-Doppelpaare benötigt, wobei ε der Weitergabequotient der benutzten Spur und c eine „kleine“ Konstante ist (im Beispielfall reichen $t \approx 80$ Doppelpaare, wobei $\varepsilon^{-1} \approx 38$ ist).

5 DES und AES

5.1 Der Data Encryption Standard (DES)

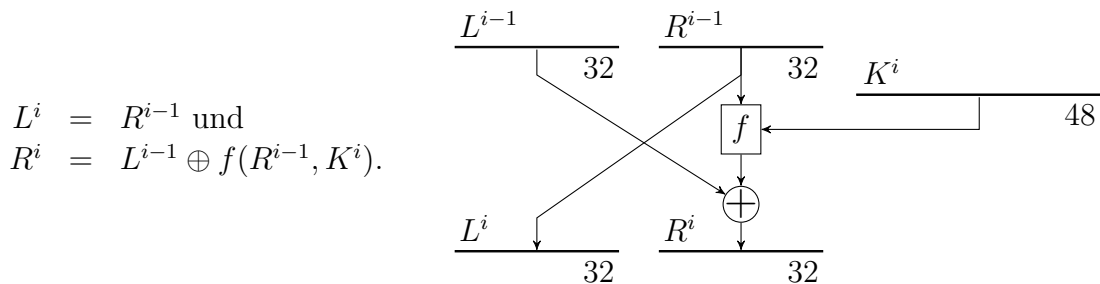
Der DES wurde von IBM im Zuge einer im Mai 1973 veröffentlichten Ausschreibung des NBS (National Bureau of Standards; heute National Institute of Standards and Technology, NIST) als ein Nachfolger von Lucifer entwickelt, im März 1975 veröffentlicht, und im Januar 1977 als Verschlüsselungsstandard der US-Regierung für nicht geheime Nachrichten genormt. Obwohl DES ursprünglich nur für einen Zeitraum von 10 bis 15 Jahren als Standard dienen sollte, wurde er circa alle 5 Jahre (zuletzt im Januar 1999) überprüft und als Standard fortgeschrieben.

Bereits im September 1997 veröffentlichte das NIST eine Ausschreibung für den AES (Advanced Encryption Standard) genannten Nachfolger des DES. Nach einer mehrjährigen Auswahlprozedur wurde im November 2001 der Rijndael-Algorithmus als AES genormt und im Mai 2002 wurde DES von AES als Standard abgelöst. Allerdings wurde Triple DES (auch TDES oder 3DES genannt) vom NIST als Standard bis 2030 fortgeschrieben.

Der DES ist eine Feistel-Chiffre mit 16 Runden. Die Rundenfunktion g einer **Feistel-Chiffre** berechnet das Zwischenergebnis w^i aus den beiden Hälften L^{i-1} und R^{i-1} von w^{i-1} gemäß der Vorschrift

$$g(K^i, L^{i-1}R^{i-1}) = L^iR^i,$$

wobei sich $w^i = L^iR^i$ zusammensetzt aus



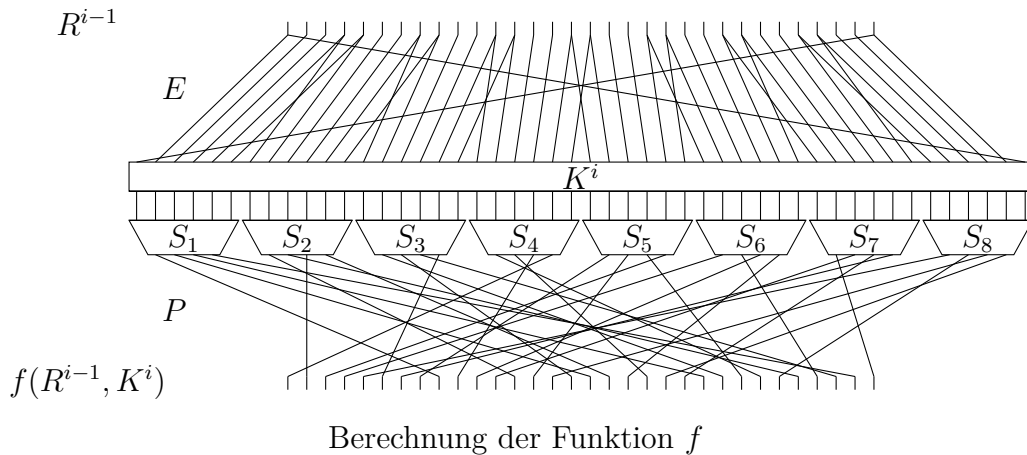
Der DES chiffriert Binärblöcke der Länge 64 und benutzt hierzu einen Schlüssel mit 56 Bit. Der Schlüssel ergibt zusammen mit 8 Paritätsbits (die Bits 8, 16, ..., 64) einen ebenfalls 64 Bit langen Schlüsselblock K . Es gibt somit $2^{56} \approx 7.2 \cdot 10^{16}$ verschiedene Schlüssel. Im Einzelnen werden folgende Chiffrierschritte ausgeführt:

- Zuerst wird der Klartextblock x einer Initialpermutation IP unterzogen:

$$x_1x_2 \cdots x_{64} \mapsto IP(x) = x_{58}x_{50} \cdots x_7.$$

58 50 42 34 26 18 10 2	32 1 2 3 4 5	16 7 20 21
60 52 44 36 28 20 12 4	4 5 6 7 8 9	29 12 28 17
62 54 46 38 30 22 14 6	8 9 10 11 12 13	1 15 23 26
64 56 48 40 32 24 16 8	12 13 14 15 16 17	5 18 31 10
57 49 41 33 25 17 9 1	16 17 18 19 20 21	2 8 24 14
59 51 43 35 27 19 11 3	20 21 22 23 24 25	32 27 3 9
61 53 45 37 29 21 13 5	24 25 26 27 28 29	19 13 30 6
63 55 47 39 31 23 15 7	28 29 30 31 32 1	22 11 4 25
Initialpermutation IP	Expansion E	Permutation P

- Danach wird 16 Mal die Rundenfunktion g mit den Rundenschlüsseln $K^1, \dots, K^{16}$ angewendet, wobei die Funktion $f : \{0, 1\}^{32} \times \{0, 1\}^{48} \rightarrow \{0, 1\}^{32}$ wie folgt berechnet wird:



Bei Eingabe (R^{i-1}, K^i) wird R^{i-1} durch die Expansionsabbildung E auf einen 48-Bit Block $E(R^{i-1})$ erweitert. Dieser wird mit K^i bitweise addiert (x-or); als Ergebnis erhält man den Vektor $B = E(R^{i-1}) \oplus K^i$. Danach wird B in acht 6-Bit Blöcke $B_1, \dots, B_8$ aufgeteilt, die mittels 8 S-Boxen $S_1, \dots, S_8$ auf 4-Bit Blöcke $C_i = S_i(B_i)$ reduziert werden. Die S-Boxen sind in Form einer Tabelle dargestellt, die wie folgt ausgewertet wird:

Ist $B_i = b_1 \dots b_6$, so findet man $S_i(B_i)$ in Zeile $b_1 b_6$ und Spalte $b_2 b_3 b_4 b_5$ (jeweils aufgefasst als Binärzahl) der Tabelle für S_i . Zum Beispiel ist $S_1(011010) = 1001$, da in Zeile $(00)_2 = 0$ und Spalte $(1101)_2 = 13$ die Zahl $9 = (1001)_2$ steht.

Die Konkatenation der von den acht S-Boxen gelieferten Bitblöcke $C_1 \dots C_8$ ergibt einen 32-Bit Vektor C , welcher noch der Permutation P unterworfen wird.

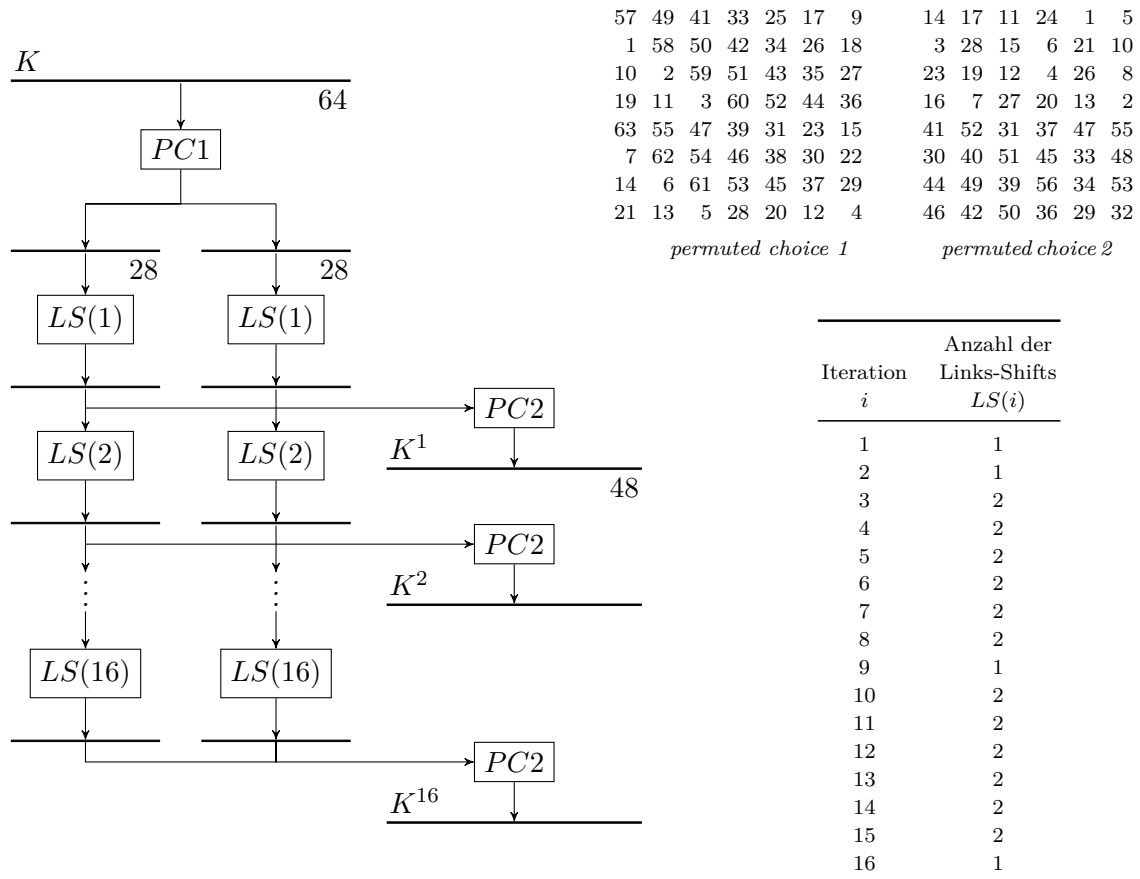
- Aus dem nach der 16. Iteration erhaltenen Bitvektor $w^{16} = L^{16}R^{16}$ wird durch Vertauschen der beiden Hälften und Anwendung der inversen Initialpermutation der Kryptotext y gebildet:

$$L^{16}R^{16} \mapsto y = IP^{-1}(R^{16}L^{16}).$$

S_1 : 14 4 13 1 2 15 11 8 3 10 6 12 5 9 0 7 0 15 7 4 14 2 13 1 10 6 12 11 9 5 3 8 4 1 14 8 13 6 2 11 15 12 9 7 3 10 5 0 15 12 8 2 4 9 1 7 5 11 3 14 10 0 6 13	S_5 : 2 12 4 1 7 10 11 6 8 5 3 15 13 0 14 9 14 11 2 12 4 7 13 1 5 0 15 10 3 9 8 6 4 2 1 11 10 13 7 8 15 9 12 5 6 3 0 14 11 8 12 7 1 14 2 13 6 15 0 9 10 4 5 3
S_2 : 15 1 8 14 6 11 3 4 9 7 2 13 12 0 5 10 3 13 4 7 15 2 8 14 12 0 1 10 6 9 11 5 0 14 7 11 10 4 13 1 5 8 12 6 9 3 2 15 13 8 10 1 3 15 4 2 11 6 7 12 0 5 14 9	S_6 : 12 1 10 15 9 2 6 8 0 13 3 4 14 7 5 11 10 15 4 2 7 12 9 5 6 1 13 14 0 11 3 8 9 14 15 5 2 8 12 3 7 0 4 10 1 13 11 6 4 3 2 12 9 5 15 10 11 14 1 7 6 0 8 13
S_3 : 10 0 9 14 6 3 15 5 1 13 12 7 11 4 2 8 13 7 0 9 3 4 6 10 2 8 5 14 12 11 15 1 13 6 4 9 8 15 3 0 11 1 2 12 5 10 14 7 1 10 13 0 6 9 8 7 4 15 14 3 11 5 2 12	S_7 : 4 11 2 14 15 0 8 13 3 12 9 7 5 10 6 1 13 0 11 7 4 9 1 10 14 3 5 12 2 15 8 6 1 4 11 13 12 3 7 14 10 15 6 8 0 5 9 2 6 11 13 8 1 4 10 7 9 5 0 15 14 2 3 12
S_4 : 7 13 14 3 0 6 9 10 1 2 8 5 11 12 4 15 13 8 11 5 6 15 0 3 4 7 2 12 1 10 14 9 10 6 9 0 12 11 7 13 15 1 3 14 5 2 8 4 3 15 0 6 10 1 13 8 9 4 5 11 12 7 2 14	S_8 : 13 2 8 4 6 15 11 1 10 9 3 14 5 0 12 7 1 15 13 8 10 3 7 4 12 5 6 11 0 14 9 2 7 11 4 1 9 12 14 2 0 6 10 13 15 3 5 8 2 1 14 7 4 10 8 13 15 12 9 0 3 5 6 11

Die acht Substitutionsboxen

Die Schlüsselgenerierung. Zuerst wählt die Funktion $PC\ 1$ (permuted choice 1) aus dem Schlüssel K die kryptografisch relevanten Bits aus und permutiert sie. Das erhaltene Ergebnis wird in zwei 28-Bit Blöcke unterteilt. Diese beiden Blöcke werden dann in 16 Runden jeweils zyklisch um ein oder zwei Bit verschoben (siehe dazu Tabelle $LS(i)$).



Aus den beiden Blöcken nach Runde i bestimmt die Funktion $PC\ 2$ (permuted choice 2) jeweils den Rundenschlüssel K^i durch Entfernen der 8 Bits an den Stellen 9, 18, 22, 25, 35, 38, 43 und 56 sowie einer Permutation der verbleibenden 48 Bits.

Eigenschaften von DES Der DES hat sich zwar weitgehend durchgesetzt, jedoch wurde er anfangs von manchen US-Behörden und -Banken nicht verwendet. Der Grund dafür liegt in folgenden Sicherheitsbedenken, die nach seiner Veröffentlichung im Jahre 1975 geäußert wurden:

- Die 56-Bit Schlüssellänge bietet eventuell eine zu geringe Sicherheit gegen Ausprobieren aller Schlüssel bei einem Angriff mit bekanntem oder gewähltem Klartext.
- Die Entwurfskriterien für die einzelnen Bestandteile, insbesondere für die S -Boxen, sind nicht veröffentlicht worden. Es wurde der Verdacht geäußert, dass der DES mit Hilfe von Falltürinformationen leicht zu brechen sei.
- Kryptoanalytische Untersuchungen, die von IBM und der US National Security Agency (NSA) durchgeführt wurden, sind nicht veröffentlicht worden. Als jedoch Biham und Shamir Anfang der 90er Jahre das Konzept der differentiellen Kryptoanalyse veröffentlichten, gaben die Entwickler von DES bekannt, dass sie diese Angriffsmöglichkeit beim Entwurf von DES bereits kannten und speziell die S -Boxen entsprechend konzipiert hätten.

Im Fall von DES ist die lineare Kryptoanalyse effizienter als die differentielle Krypto-

analyse. Da hierzu jedoch circa 2^{43} Klartext-Kryptotext-Paare notwendig sind (deren Generierung bei einem von Matsui, dem Erfinder der linearen Kryptoanalyse, unternommenen Angriff bereits 40 Tage in Anspruch nahm), stellen diese Angriffe keine realistische Bedrohung dar.

Dagegen wurde im Juli 1998 mit einer von der Electronic Frontier Foundation (EFF) für 250 000 Dollar gebauten Maschine namens “DES Cracker” eine vollständige Schlüsselsuche in circa 56 Stunden durchgeführt (was den Gewinn der von RSA Laboratory ausgeschriebenen “DES Challenge II-2” bedeutete). Und im Januar 1999 gewann **Distributed.Net**, eine weltweite Vereinigung von Computerfans, den mit 10 000 Dollar dotierten “DES Challenge III”. Durch den kombinierten Einsatz eines Supercomputer namens “Deep Crack” von EFF und 100 000 PCs, die weltweit über das Internet kommunizierten, wurden nur 22 Stunden und 15 Minuten benötigt, um den Schlüssel für ein Klartext-Kryptotextpaar mit dem Klartext „See you in Rome (second AES Conference, March 22-23, 1999)“ zu finden.

Definition 107 (schwache Schlüssel). Ein DES-Schlüssel K heißt **schwach**, falls alle durch ihn erzeugten Rundenschlüssel gleich sind (d.h. es gilt $\|\{K^1, \dots, K^{16}\}\| = 1$).

Es gibt vier schwache Schlüssel (siehe Übungen):

```
0101010101010101
FEFEFEFEFEFEFEFE
1F1F1F1F0E0E0E0E
E0E0E0E0F1F1F1F1
```

und für sie gilt $\text{DES}(K, \text{DES}(K, x)) = x$.

Neben diesen schwachen Schlüsseln existieren noch sechs weitere sogenannte „semischwache“ Schlüsselpaare (K, K') , für die $\text{DES}(K', \text{DES}(K, x)) = x$ gilt (siehe Übungen).

5.2 Endliche Körper

Wie wir bereits wissen, bildet $\mathbb{Z}_p$ für primes p einen endlichen Körper der Größe p . Dieser Körper lässt sich für jede Zahl $n \geq 1$ zu einem Körper der Größe p^n erweitern. Da bis auf Isomorphie nur ein Körper dieser Größe existiert, wird er einfach mit $\mathbb{F}(p^n)$ oder $\mathbb{F}_{p^n}$ bezeichnet. Um diesen Körper zu konstruieren, betrachten wir zunächst den Polynomring $\mathbb{Z}_p[x]$ über $\mathbb{Z}_p$.

Definition 108 (Polynomring). Sei p prim. Dann enthält $\mathbb{Z}_p[x]$ alle Polynome

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

in der Variablen x mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{Z}_p$, $a_n \neq 0$. n heißt **Grad** von p (kurz: $\deg(p) = n$). $\mathbb{Z}_p[x]$ bildet mit der üblichen Polynomaddition und Polynommultiplikation einen Ring. Man sagt, $\mathbb{Z}_p[x]$ entsteht aus $\mathbb{Z}_p$ durch **Adjunktion** der Unbestimmten (oder Variablen) x .

Ein Polynom $m(x)$ **teilt** ein Polynom $g(x)$ (kurz: $m(x) | g(x)$), falls ein Polynom $d(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ existiert mit $g(x) = d(x)m(x)$. Teilt $m(x)$ die Differenz $f(x) - g(x)$ zweier Polynome, so schreiben wir hierfür

$$f(x) \equiv_{m(x)} g(x)$$

und sagen, $f(x)$ ist **kongruent** zu $g(x)$ modulo $m(x)$. Weiterhin bezeichne

$$f(x) \bmod m(x)$$

den bei der Polynomdivision von $f(x)$ durch $m(x)$ auftretenden **Rest**, also dasjenige Polynom $r(x)$ vom Grad $\deg(r) < \deg(m)$, für das ein Polynom $d(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ existiert mit $f(x) = d(x)m(x) + r(x)$.

Ähnlich wie beim Übergang von $\mathbb{Z}$ zu $\mathbb{Z}_m$ können wir für ein fest gewähltes Polynom $m(x)$ vom Grad $\deg(m) = n$ jedem Polynom $p(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ mittels

$$p(x) \mapsto p(x) \bmod m(x)$$

eindeutig ein Polynom vom Grad höchstens $n - 1$ zuordnen. Auf diese Weise erhalten wir den endlichen Polynomring (genauer **Faktorring**) $\mathbb{Z}_p[x]/m(x)$ aller Polynome vom Grad höchstens $n - 1$, wobei die Addition und Multiplikation wie in $\mathbb{Z}_p[x]$, gefolgt von einer Reduktion modulo $m(x)$, definiert ist. Und wie $\mathbb{Z}_m$ ist $\mathbb{Z}_p[x]/m(x)$ genau dann ein Körper, wenn $m(x)$ nur triviale Teiler besitzt.

Definition 109 (irreduzibel). Ein Polynom $m(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ heißt **irreduzibel**, falls keine Polynome $p(x), q(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ vom Grad $\deg(p), \deg(q) \geq 1$ existieren mit

$$m(x) = p(x)q(x).$$

Satz 110. Der Faktorring $\mathbb{Z}_p[x]/m(x)$ ist genau dann ein Körper, wenn $m(x)$ in $\mathbb{Z}_p[x]$ irreduzibel ist.

Beweis. siehe Übungen. □

Da für jede Zahl $n \geq 1$ ein irreduzibles Polynom $m(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} m_i x^i \in \mathbb{Z}_p[x]$ vom Grad n existiert, lässt sich auf diese Weise für jede Primzahlpotenz p^n ein Körper $\mathbb{Z}_p[x]/m(x)$ der Größe p^n konstruieren. Tatsächlich gibt es bis auf Isomorphie nur einen Körper mit p^n Elementen, den wir mit $\mathbb{F}_{p^n}$ bezeichnen. Die Elemente

$$a(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \in \mathbb{Z}_p[x]/m(x)$$

können wir durch den Koeffizientenvektor $(a_{n-1}, \dots, a_0) \in (\mathbb{F}_p)^n$ darstellen. Die Addition zweier Polynome $a(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ und $b(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$ in $\mathbb{F}_{2^n}$ entspricht dann der üblichen Vektoraddition (komponentenweisen Addition modulo p):

$$(a_{n-1}, \dots, a_0) + (b_{n-1}, \dots, b_0) = (c_{n-1}, \dots, c_0) \text{ mit } c_i = a_i + b_i \text{ für } i = 0, \dots, n-1.$$

Im Fall $p = 2$ ist dies also die bitweise Addition modulo 2 (x-or). Die Multiplikation in $\mathbb{Z}_p[x]/m(x)$ lässt sich wegen

$$a(x)b(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i b(x)$$

auf die Addition und (wiederholte) Multiplikation mit dem Polynom $p(x) = x$ zurückführen. Dabei ist

$$xb(x) \equiv_{m(x)} xb(x) - b_{n-1}m(x) \equiv_{m(x)} \sum_{i=0}^{n-1} (b_{i-1} - b_{n-1}m_i)x^i,$$

wobei wir $b_{-1} = 0$ setzen. Die Multiplikation von $b(x)$ mit x entspricht somit einem Linksshift um eine Stelle, dem sich im Fall $b_{n-1} \neq 0$ noch die Subtraktion des Koeffizientenvektors $(b_{n-1}m_{n-1}, \dots, b_{n-1}m_0)$ anschließt. Im Fall $p = 2$ erhalten wir also

$$xb(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n-1} b_{i-1}x^i, & b_{n-1} = 0, \\ \sum_{i=0}^{n-1} (b_{i-1} \oplus m_i)x^i, & b_{n-1} = 1 \end{cases}$$

bzw. in Vektorschreibweise:

$$(0, \dots, 0, 1, 0) \cdot (b_{n-1}, \dots, b_0) = \begin{cases} (b_{n-2}, \dots, b_0, 0), & b_{n-1} = 0, \\ (b_{n-2}, \dots, b_0, 0) \oplus (m_{n-1}, \dots, m_0), & b_{n-1} = 1. \end{cases}$$

Beispiel 111. Sei $p = 2$ und $n = 3$. Zunächst benötigen wir ein irreduzibles Polynom $m(x) \in \mathbb{Z}_2[x]$ vom Grad 3,

$$m(x) = a_3x^3 + a^2x^2 + a_1x + a_0.$$

Da $m(x)$ im Fall $a_0 = 0$ den nichttrivialen Teiler $p(x) = x$ hat und im Fall $a_3 = 0$ nicht den Grad 3 hat, genügt es, die 4 Kandidaten

$$\begin{aligned} m_1(x) &= x^3 + 1 \\ m_2(x) &= x^3 + x + 1 \\ m_3(x) &= x^3 + x^2 + 1 \\ m_4(x) &= x^3 + x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

zu betrachten. Da nun aber

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)$$

und

$$x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + 1)$$

ist, gibt es in $\mathbb{Z}_2[x]$ nur zwei irreduzible Polynome vom Grad 3: $x^3 + x + 1$ und $x^3 + x^2 + 1$. Nehmen wir bspw. $m(x) = x^3 + x + 1$, so ist

$$(x^2 + 1) + (x + 1) = x^2 + x$$

und

$$(x^2 + 1)(x + 1) = x^2$$

in $\mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + x + 1)$, da

$$(x^2 + 1)(x + 1) = x^3 + x^2 + x + 1 = x^2 + (x^3 + x + 1) \equiv_{x^3+x+1} x^2$$

ist. ◁

Wie das folgende Beispiel zeigt, lässt sich das **multiplikative Inverse** eines Polynoms $p(x) \neq 0$ in $\mathbb{F}_{p^n}$ mit dem erweiterten Euklidischen Algorithmus berechnen.

Beispiel 112. Sei $p = 2$ und seien $m(x) = x^8 + x^4 + x^3 + x + 1$ und $a(x) = x^6 + x^4 + x + 1$ zwei Polynome. Dann können wir mit dem Euklidischen Algorithmus den (in Bezug auf den Grad) größten gemeinsamen Teiler $g(x)$ von $m(x)$ und $a(x)$ berechnen:

i	$r_{i-1}(x)$	$=$	$d_{i+1}(x) \cdot r_i(x)$	$+ r_{i+1}(x)$
1	$x^8 + x^4 + x^3 + x + 1$	$=$	$(x^2 + 1) \cdot (x^6 + x^4 + x + 1)$	$+ x^2$
2	$x^6 + x^4 + x + 1$	$=$	$(x^4 + x^2) \cdot x^2$	$+ x + 1$
3	x^2	$=$	$(x + 1) \cdot (x + 1)$	$+ 1$
4	$x + 1$	$=$	$(x + 1) \cdot \mathbf{1}$	$+ 0$

Es ist also $g(x) = r_4(x) = 1$. Der erweiterte Euklidische Algorithmus berechnet nun Polynome $p_i(x)$ und $q_i(x)$ gemäß der Vorschrift

$$p_i(x) = p_{i-2}(x) - d_i(x) \cdot p_{i-1}(x), \quad \text{wobei} \quad p_0(x) = 1 \quad \text{und} \quad p_1(x) = 0,$$

und

$$q_i(x) = q_{i-2}(x) - d_i(x) \cdot q_{i-1}(x), \quad \text{wobei} \quad q_0(x) = 0 \quad \text{und} \quad q_1(x) = 1,$$

welche für $i = 0, 1, 2, 3, 4$ die Gleichung $p_i(x)m(x) + q_i(x)a(x) = r_i(x)$ erfüllen:

i	$p_i(x) \cdot m(x) +$	$q_i(x) \cdot a(x) =$	$r_i(x)$
0	$1 \cdot m(x) +$	$0 \cdot a(x) =$	$m(x)$
1	$0 \cdot m(x) +$	$1 \cdot a(x) =$	$a(x)$
2	$1 \cdot m(x) +$	$(x^2 + 1) \cdot a(x) =$	x^2
3	$(x^4 + x^2) \cdot m(x) +$	$(x^6 + x^2 + 1) \cdot a(x) =$	$x + 1$
4	$(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1) \cdot m(x) +$	$(x^7 + x^6 + x^3 + x) \cdot a(x) =$	1

Aus der letzten Zeile können wir das multiplikative Inverse $q_4(x) = x^7 + x^6 + x^3 + x$ von $a(x)$ modulo $m(x)$ ablesen. ◁

5.3 Der Advanced Encryption Standard (AES)

5.3.1 Geschichte des AES

- Im September 1997 veröffentlichte das NIST eine Ausschreibung für den AES, in der eine Blocklänge von 128 Bit und variable Schlüssellängen von 128, 192 und 256 Bit gefordert wurden. Einreichungsschluss war der 15. Juni 1998.
- Von den 21 Einreichungen erfüllten 15 die geforderten Kriterien. Diese stammten aus den Ländern Australien, Belgien, Costa Rica, Deutschland, Frankreich, Großbritannien, Israel, Japan, Korea, Norwegen sowie den USA und wurden auf der 1. AES-Konferenz am 20. August 1998 als AES-Kandidaten akzeptiert.
- Im August 1999 wählte NIST auf der 2. AES-Konferenz in Rom die Finalisten MARS, RC6, Rijndael, Serpent und Twofish aus.
- Im April 2000 wurde der Rijndael-Algorithmus auf der 3. AES-Konferenz zum Sieger erklärt und im November 2001 als AES genormt.

Die wichtigsten Entscheidungskriterien waren

- Sicherheit,
- Kosten (Effizienz bei Software-, Hardware- und Smartcard-Implementationen) sowie
- Algorithmen- und Implementations-Charakteristika (unter anderem Flexibilität und Einfachheit des Designs).

Die Blocklänge und die Schlüssellänge können beim Rijndael unabhängig voneinander im Bereich 128, 160, 192, 224 oder 256 Bit gewählt werden. Die Rundenzahl N des Rijndael hängt wie folgt von der Blocklänge l und der gewählten Schlüssellänge k ab:

l	k				
	128	160	192	224	256
128	10	11	12	13	14
160	11	11	12	13	14
192	12	12	12	13	14
224	13	13	13	13	14
256	14	14	14	14	14

Beim AES-Standard wurde die Blocklänge auf 128 Bit fixiert und die Schlüssellänge auf die Werte 128, 192 oder 256 Bit beschränkt. Wir beschränken uns hier auf die Beschreibung des 10-Runden AES mit $l = 128$ Bit Blocklänge und $k = 128$ Bit Schlüssellänge.

Die Elemente $a(x) = \sum_{i=0}^7 a_i x^i$ des Körpers $\mathbb{F}_{2^8} = \mathbb{Z}_2[x]/(x^8 + x^4 + x^3 + x + 1)$ können jeweils durch ein Byte $(a_7, \dots, a_0)$ dargestellt werden. Hierzu verwenden wir die Funktionen FIELDTOBINARY und BINARYTOFIELD, die wie folgt definiert sind:

- BINARYTOFIELD: $\{0, 1\}^8 \rightarrow \mathbb{F}_{2^8}$ berechnet aus der Byte-Darstellung das zugehörige Körperelement.
- FIELDTOBINARY: $\mathbb{F}_{2^8} \rightarrow \{0, 1\}^8$ berechnet die Inverse der Funktion BINARYTOFIELD.

5.3.2 Die AES S-Box.

Sowohl bei der Schlüsselgenerierung als auch bei der Chiffrierung wird eine Substitution SUBBYTES verwendet, die auf einer 8-Bit S-Box π_{SUBBYTES} basiert. Diese S-Box benutzt als nicht-linearen Bestandteil die Funktion FIELDINV: $\mathbb{F}_{2^8} \rightarrow \mathbb{F}_{2^8}$, die das multiplikative Inverse im Körper $\mathbb{F}_{2^8}$ berechnet. Konkret wird die S-Box π_{SUBBYTES} durch folgenden Algorithmus berechnet (die Indexrechnung in Zeile 7 erfolgt modulo 8).

$\pi_{\text{SUBBYTES}}(a_7 \dots a_0)$	
1	input $a_7 \dots a_0$
2	$z := \text{BinaryToField}(a_7 \dots a_0)$
3	if $z \neq 0$ then $z := \text{FieldInv}(z)$
4	$a_7 \dots a_0 := \text{FieldToBinary}(z)$
5	$c_7 \dots c_0 := 01100011$
6	for $i := 0$ to 7 do
7	$b_i := a_i \oplus a_{i+4} \oplus a_{i+5} \oplus a_{i+6} \oplus a_{i+7} \oplus c_i$
8	output $b_7 \dots b_0$

Beispiel 113. Wir berechnen $\pi_{\text{SUBBYTES}}(01010011)$. Die Funktion BINARYTOFIELD liefert

das zugehörige Polynom

$$z = \text{BINARYTOFIELD}(01010011) = x^6 + x^4 + x + 1.$$

Das multiplikative Inverse von z in $\mathbb{F}_{2^8}$ ist

$$x^7 + x^6 + x^3 + x$$

(siehe Beispiel 112). Die Funktion `FIELDTOBINARY` liefert die zugehörige Koeffizienten-Darstellung

$$\text{FIELDTOBINARY}(x^7 + x^6 + x^3 + x) = 11001010.$$

Es folgt die Berechnung der Ausgabe $b_7 \cdots b_0 = 11101101$ mittels

$$\begin{aligned} b_7 &= a_7 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_5 \oplus a_6 \oplus c_7 = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1 \\ b_6 &= a_6 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_5 \oplus c_6 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1 \\ &\vdots \\ b_1 &= a_1 \oplus a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 \oplus a_0 \oplus c_1 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0 \\ b_0 &= a_0 \oplus a_4 \oplus a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 \oplus c_0 = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1 \end{aligned}$$

Somit ist $\pi_{\text{SUBBYTES}}(01010011) = 11101101$ oder hexadezimal: $\pi_{\text{SUBBYTES}}(\mathbf{53}) = \mathbf{ED}$. $\triangleleft$

Wir können die AES S-Box in Form einer 16×16 -Matrix angeben, wobei der Eintrag in Zeile X und Spalte Y den Wert $\pi_{\text{SUBBYTES}}(XY)$ enthält:

X	Y															
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	63	7C	77	7B	F2	6B	6F	C5	30	01	67	2B	FE	D7	AB	76
1	CA	82	C9	7D	FA	59	47	F0	AD	D4	A2	AF	9C	A4	72	C0
2	B7	FD	93	26	36	3F	F7	CC	34	A5	E5	F1	71	D8	31	15
3	04	C7	23	C3	18	96	05	9A	07	12	80	E2	EB	27	B2	75
4	09	83	2C	1A	1B	6E	5A	A0	52	3B	D6	B3	29	E3	2F	84
5	53	D1	00	ED	20	FC	B1	5B	6A	CB	BE	39	4A	4C	58	CF
⋮								⋮								
F	8C	A1	89	0D	BF	E6	42	68	41	99	2D	0F	B0	54	BB	16

5.3.3 Die Schlüsselgenerierung.

Beim 10-Runden AES mit Block- und Schlüssellänge $l = k = 128$ werden 11 Rundenschlüssel $K^0, \dots, K^{10}$ der Länge 128 benutzt. Jedes K^i besteht also aus 16 Bytes bzw. 4 Worten mit jeweils 4 Bytes. Bei der Berechnung der Rundenschlüssel werden (Wort-)Konstanten $RCon[1], \dots, RCon[10]$ mit $RCon[i] = \text{FIELDTOBINARY}(x^{i-1})0^{24} \in \{0, 1\}^{32}$ benutzt. In Hexadezimal-Darstellung ergeben sich folgende Werte:

i	1	2	3	4	5
$RCon[i]$	01000000	02000000	04000000	08000000	10000000
i	6	7	8	9	10
$RCon[i]$	20000000	40000000	80000000	1B000000	36000000

Reihen wir die 11 Rundenschlüssel aneinander, so entsteht ein Array $w[0], \dots, w[43]$ von 44 Worten, die gemäß folgendem Algorithmus aus dem 128-Bit Schlüssel K berechnet werden.

KEYEXPANSION(K)

```

1  input   $K = K[0] \dots K[15]$ 
2  for  $i := 0$  to 3 do
3     $w[i] := (K[4i], K[4i + 1], K[4i + 2], K[4i + 3])$ 
4  for  $i := 4$  to 43 do
5     $temp := w[i - 1]$ 
6    if  $i \equiv_4 0$  then  $temp := \text{SubWord}(\text{RotWord}(temp)) \oplus RCon[i/4]$ 
7     $w[i] := w[i - 4] \oplus temp$ 
8  output  $w[0] \dots w[43]$ 

```

Die hierbei benutzten Funktionen sind wie folgt definiert:

- $\text{ROTWORD} : (\mathbb{F}_2)^8 \times (\mathbb{F}_2)^8 \times (\mathbb{F}_2)^8 \times (\mathbb{F}_2)^8 \rightarrow (\mathbb{F}_2)^8 \times (\mathbb{F}_2)^8 \times (\mathbb{F}_2)^8 \times (\mathbb{F}_2)^8$ führt eine zyklische Verschiebung der 4 Eingabebytes um ein Byte nach links durch:

$$\text{ROTWORD}(B_0, B_1, B_2, B_3) = (B_1, B_2, B_3, B_0),$$

- $\text{SUBWORD} : (\mathbb{F}_2)^8 \times (\mathbb{F}_2)^8 \times (\mathbb{F}_2)^8 \times (\mathbb{F}_2)^8 \rightarrow (\mathbb{F}_2)^8 \times (\mathbb{F}_2)^8 \times (\mathbb{F}_2)^8 \times (\mathbb{F}_2)^8$ ersetzt jedes Eingabebyte B_i durch $\pi_{\text{SUBBYTES}}(B_i)$:

$$\begin{aligned}
& \text{SUBWORD}(B_0, B_1, B_2, B_3) \\
&= \text{SUBBYTES}(B_0, B_1, B_2, B_3) \\
&= (\pi_{\text{SUBBYTES}}(B_0), \pi_{\text{SUBBYTES}}(B_1), \pi_{\text{SUBBYTES}}(B_2), \pi_{\text{SUBBYTES}}(B_3))
\end{aligned}$$

5.3.4 Der AES-Chiffrieralgorithmus

Unter Benutzung der 11 Rundenschlüssel $K^0, \dots, K^{10}$ wird der 128 Bit Klartextblock wie folgt chiffriert:

AES-VERSCHLÜSSELUNG

```

1  AddRoundKey( $K^0$ )
2  for  $i := 1$  to 9 do
3    SubBytes
4    ShiftRows
5    MixColumns
6    AddRoundKey( $K^i$ )
7  SubBytes
8  ShiftRows
9  AddRoundKey( $K^{10}$ )

```

Im einzelnen werden also die folgenden Chiffrierschritte ausgeführt:

- Zuerst wird der Klartextblock x einer Addition mit dem 128-Bit Rundenschlüssel K^0 unterworfen. Diese Operation wird mit **ADDRoundKey** bezeichnet.
- Danach werden 9 Runden ausgeführt, wobei in jeder Runde i eine auf der S-Box π_{SUBBYTES} basierende 128-Bit Substitution **SUBBYTES**, eine Transposition namens **SHIFTROWS**, eine lineare Substitution namens **MIXCOLUMNS** und eine **ADDRoundKey** Operation mit dem Rundenschlüssel K^i durchgeführt werden.

- Es folgt Runde 10 mit den Operationen SUBBYTES, SHIFTRows und ADDROUNDKEY(K^{10}).

Abgesehen von der zusätzlichen linearen Substitution MIXCOLUMNS entspricht der Aufbau des AES also exakt dem in Abschnitt 4.2 beschriebenen Aufbau eines SPNs.

Der Klartext $x = x_0 \cdots x_{15}$, $x_i \in \{0, 1\}^8$, und alle daraus berechneten Zwischenergebnisse werden in Form eines Arrays

$$\begin{array}{cccc} s_{0,0} & s_{0,1} & s_{0,2} & s_{0,3} \\ s_{1,0} & s_{1,1} & s_{1,2} & s_{1,3} \\ s_{2,0} & s_{2,1} & s_{2,2} & s_{2,3} \\ s_{3,0} & s_{3,1} & s_{3,2} & s_{3,3} \end{array}$$

dargestellt, das wie folgt initialisiert wird:

$$\begin{array}{cccc} x_0 & x_4 & x_8 & x_{12} \\ x_1 & x_5 & x_9 & x_{13} \\ x_2 & x_6 & x_{10} & x_{14} \\ x_3 & x_7 & x_{11} & x_{15} \end{array}$$

SHIFTRows ist eine 128-Bit Transposition, die wie folgt definiert ist:

$$\begin{array}{ccccccccc} s_{0,0} & s_{0,1} & s_{0,2} & s_{0,3} & & s_{0,0} & s_{0,1} & s_{0,2} & s_{0,3} \\ s_{1,0} & s_{1,1} & s_{1,2} & s_{1,3} & \mapsto & s_{1,1} & s_{1,2} & s_{1,3} & s_{1,0} \\ s_{2,0} & s_{2,1} & s_{2,2} & s_{2,3} & & s_{2,2} & s_{2,3} & s_{2,0} & s_{2,1} \\ s_{3,0} & s_{3,1} & s_{3,2} & s_{3,3} & & s_{3,3} & s_{3,0} & s_{3,1} & s_{3,2} \end{array}$$

MIXCOLUMNS basiert auf einer linearen 32-Bit S-Box MixCOLUMN, die parallel auf den vier Spalten der Zwischenergebnisse ausgeführt wird. Zu ihrer Berechnung wird die Multiplikation $\text{FIELDMULT}: \mathbb{F}_{2^8} \times \mathbb{F}_{2^8} \rightarrow \mathbb{F}_{2^8}$ im Körper $\mathbb{F}_{2^8}$ benutzt.

$$\text{MIXCOLUMN}(s_{0,j}, s_{1,j}, s_{2,j}, s_{3,j})$$

```

1  for  $i := 0$  to 3 do  $t_i := \text{BinaryToField}(s_{i,j})$ 
2   $u_0 := \text{FieldMult}(x, t_0) + \text{FieldMult}(x + 1, t_1) + t_2 + t_3$ 
3   $u_1 := \text{FieldMult}(x, t_1) + \text{FieldMult}(x + 1, t_2) + t_3 + t_0$ 
4   $u_2 := \text{FieldMult}(x, t_2) + \text{FieldMult}(x + 1, t_3) + t_0 + t_1$ 
5   $u_3 := \text{FieldMult}(x, t_3) + \text{FieldMult}(x + 1, t_0) + t_1 + t_2$ 
6  for  $i := 0$  to 3 do  $s'_{i,j} := \text{FieldToBinary}(u_i)$ 
7  output  $(s'_{0,j}, s'_{1,j}, s'_{2,j}, s'_{3,j})$ 

```

MIXCOLUMN führt also eine lineare Transformation in dem Vektorraum $(\mathbb{F}_{2^8})^4$ aus, die sich auch wie folgt beschreiben lässt (hierbei stellen wir die 8-Bit Koeffizientenvektoren der Polynome in $\mathbb{F}_{2^8}$ hexadezimal dar, also 03 für $x + 1$ usw.):

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 02 & 03 & 01 & 01 \\ 01 & 02 & 03 & 01 \\ 01 & 01 & 02 & 03 \\ 03 & 01 & 01 & 02 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Die Operation MIXCOLUMN realisiert somit eine Hill-Chiffrierfunktion mit einer Schlüsselmatrix $k = (k_{i,j})$, deren Spalten aus der ersten Spalte (02, 01, 01, 03) durch zirkuläre Shifts entstehen. Da k diese spezielle Form hat, lässt sich MIXCOLUMN im

Faktoring $\mathbb{F}_{2^8}[y]/(y^4 + 1)$ sogar als Multiplikation mit einem festen Ringelement beschreiben. Interpretieren wir nämlich eine Spalte (c_0, c_1, c_2, c_3) als Repräsentation des Polynoms $c(y) = \sum_{i=0}^3 c_i y^i$ in $\mathbb{F}_{2^8}[y]/(y^4 + 1)$ und wählen wir für $a(y)$ das Polynom $03y^3 + 01y^2 + 01y + 02$, das durch die erste Spalte von k repräsentiert wird, so gilt

$$\text{MIXCOLUMN}(c(y)) = a(y)c(y).$$

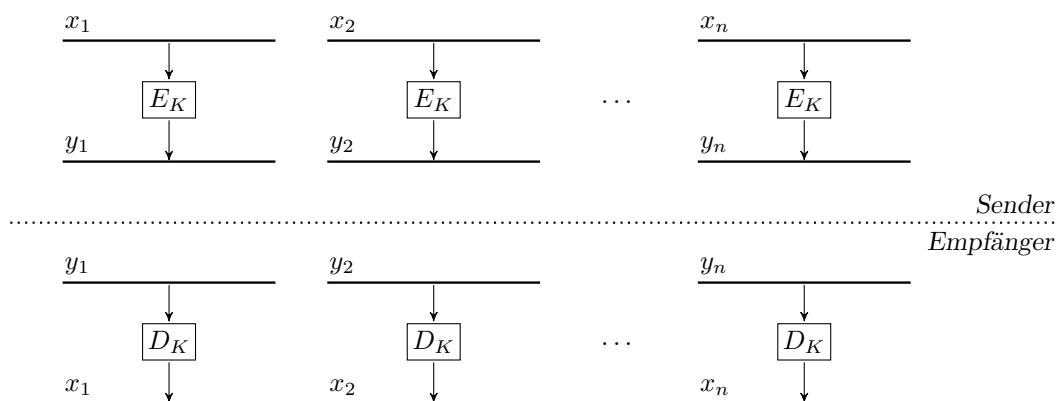
Der Ring $\mathbb{F}_{2^8}[y]/(y^4 + 1)$ ist zwar kein Körper, da das Polynom $y^4 + 1$ in $\mathbb{F}_{2^8}[y]$ nicht irreduzibel ist. Da das Polynom $a(y)$ jedoch ein multiplikatives Inverses $a^{-1}(y) = 0By^3 + 0Dy^2 + 09y + 0E$ in $\mathbb{F}_{2^8}[y]/(y^4 + 1)$ besitzt, kann die inverse Abbildung von MIXCOLUMN mittels $\text{MIXCOLUMN}^{-1}(c(y)) = a^{-1}(y)c(y)$ berechnet werden.

5.3.5 Kryptoanalytische Betrachtungen

Bis heute konnten keine Schwachstellen gefunden werden, d.h. alle bekannten Angriffe sind mindestens so aufwändig wie eine vollständige Schlüsselsuche. Die Tatsache, dass für die S-Box die Inversenbildung in einem endlichen Körper benutzt wird, führt dazu, dass die Tabellen für die Güte der linearen Approximationen und für die Weitergabequotienten der Differenzenpaare einen hohen Grad an Uniformität aufweisen. Dadurch wird die S-Box resistent gegen lineare und differentielle Analysen. Zudem verhindert die lineare Substitution MIXCOLUMNS lineare und differentielle Angriffe mit nur wenigen aktiven S-Boxen (diese Technik wird von den AES-Entwicklern als *wide trail strategy* bezeichnet).

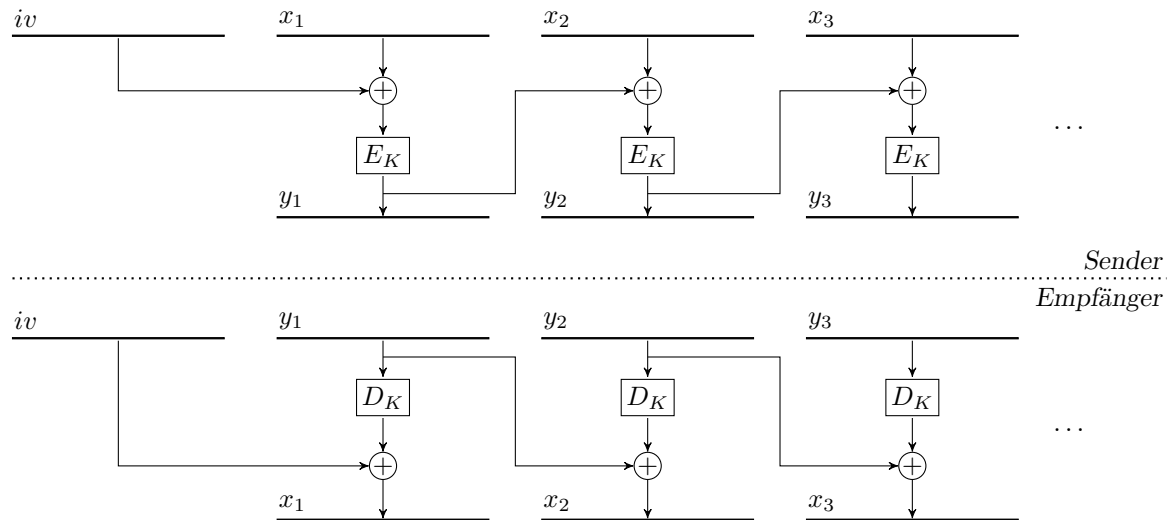
5.4 Betriebsarten von Blockchiffren

Für den DES wurden vier verschiedene Betriebsarten vorgeschlagen, in denen grundsätzlich jede Blockchiffre E mit beliebiger Blocklänge l betrieben werden kann. Bei den ersten beiden Betriebsarten (ECB und CBC) werden Kryptotextblöcke der Länge l übertragen. Mit einer Blockchiffre kann aber auch ein Stromsystem realisiert werden, mit dem sich Kryptotextblöcke einer beliebigen Länge t , $1 \leq t \leq l$, übertragen lassen (OFB und CFB).

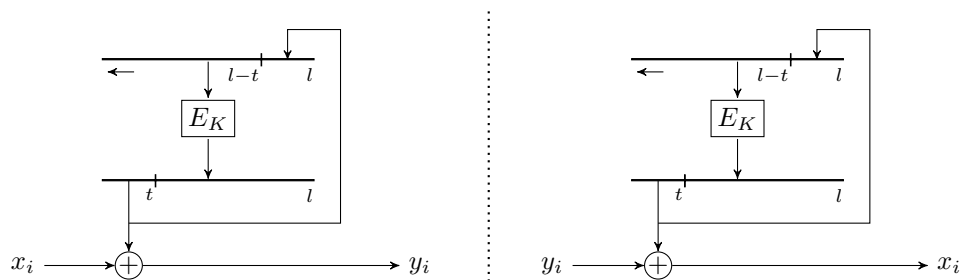


ECB-Mode (electronic code book; elektronisches Codebuch): Die Binär-Nachricht x wird in Klartextblöcke x_i zerlegt. Der letzte Block x_n wird, falls nötig, mit einer vorher vereinbarten Bitfolge aufgefüllt. Die Blöcke werden nacheinander mit demselben Schlüssel K einzeln verschlüsselt, übertragen und auf Empfängerseite mittels der zu E gehörigen Dechiffrierfunktion D wieder entschlüsselt.

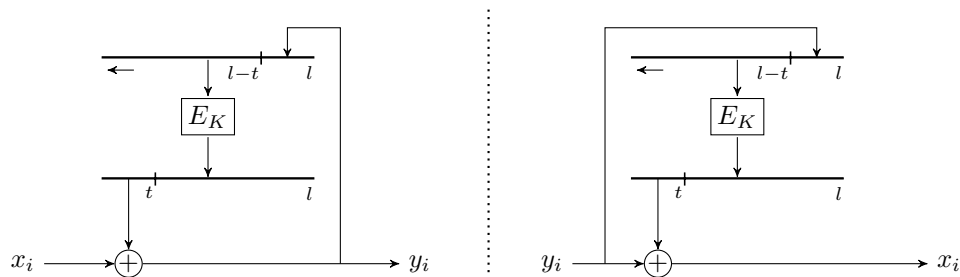
Um zu verhindern, dass ein Eindringling den Kryptotext verändert, ohne dass der Empfänger dies bemerkt, wird beim CBC-Mode jeder Kryptotextblock nicht nur von dem zugehörigen Klartextblock, sondern auch von allen vorausgehenden Blöcken abhängig gemacht. Dies hat auch zur Folge, dass gleiche Klartextblöcke auf unterschiedliche Kryptotextblöcke abgebildet werden.



CBC-Mode (cipher block chaining; Blockverkettung des Schlüsseltextes): Jeder Klartextblock x_i wird mit dem Kryptotextblock $E_K(x_{i-1})$ bitweise (modulo 2) addiert, bevor er verschlüsselt wird (zur Verschlüsselung von x_1 wird ein Initialisierungsvektor iv verwendet).



OFB-Mode (output feedback; Rückführung der Ausgabe): Die Binär-Nachricht x wird in t -Bit Blöcke (für festes t : $1 \leq t \leq l$) zerlegt. Die Chiffrierfunktion E_K dient zur Erzeugung einer pseudozufälligen Folge von t -Bit Blöcken, die bitweise (modulo 2) zu den entsprechenden Klartextblöcken addiert werden. Als Eingabe für die Chiffrierfunktion E_K dient ein Schieberegister, das anfangs mit einem Initialisierungsvektor iv geladen ist. Bei jeder Übertragung eines t -Bit Klartextblockes x_i erzeugt die Chiffrierfunktion E_K zunächst einen Ausgabevektor, von dem nur die ersten t Bits verwendet werden. Diese dienen sowohl zur Verschlüsselung von x_i , als auch zur Modifikation des Eingaberegisters, in das sie von rechts geschoben werden.



CFB-Mode (cipher feedback; Rückführung des Kryptotextes): Ähnlich zum OFB-Mode, nur dass zur Erneuerung des Eingaberegisters nicht die ersten t Bits der E_K -Ausgabe, sondern der daraus gewonnene t -Bit Kryptotextblock verwendet wird.

Eine weitere Variante des OFB-Modes ist der **Counter-Mode**, bei dem die Pseudozufallsfolge mit Hilfe von E_K aus einer fortlaufenden Binärblockfolge $T_0, T_1, \dots$ mit $T_{i+1} = T_i + 1 \bmod 2^l$ erzeugt wird. Dies hat den Vorteil, dass spätere Blöcke der Pseudozufallsfolge nicht von den vorhergehenden abhängen, und daher die Blöcke $E_K(T_i)$ parallel berechnet werden können.

6 Zahlentheoretische Grundlagen

In diesem Abschnitt stellen wir die Hilfsmittel aus der Zahlentheorie bereit, die wir zum Verständnis der Public-Key Verfahren benötigen, die im nächsten Abschnitt vorgestellt werden.

Satz 114. *Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung $\|G\| = m$. Dann gilt $a^m = 1$ für alle $a \in G$.*

Beweis. Wir betrachten hier nur den Fall, dass G kommutativ ist. Der allgemeine Fall wird in den Übungen bewiesen.

Sei also $G = \{b_1, \dots, b_m\}$ abelsch und sei $a \in G$ beliebig. Wegen $ab_i \neq ab_j$ für $i \neq j$ folgt $G = \{ab_1, \dots, ab_m\}$. Dies impliziert $\prod_{i=1}^m b_i = \prod_{i=1}^m ab_i = a^m \prod_{i=1}^m b_i$. Also muss $a^m = 1$ sein. $\square$

Korollar 115 (Kleiner Satz von Fermat). *Ist p eine Primzahl und a eine nicht durch p teilbare Zahl (d.h. $a \in \mathbb{Z}_p^*$), dann ist $a^{p-1} - 1$ durch p teilbar:*

$$\forall a \in \mathbb{Z}_p^* : a^{p-1} \equiv_p 1.$$

6.1 Diskrete Logarithmen

Nehmen wir ein beliebiges Element $a \in G$ und betrachten die Folge der Potenzen $a^0 = 1$, $a^1 = a$, a^2 , a^3 , $\dots$, so besagt obiger Satz, dass spätestens für $n = \|G\|$ wieder $a^n = 1$ gilt.

Definition 116 (Ordnung). *Die **Ordnung** von a in G ist*

$$\text{ord}_G(a) = \min\{n \geq 1 \mid a^n = 1\}.$$

Im Fall $G = \mathbb{Z}_m^$ schreiben wir auch einfach $\text{ord}_m(a)$. Die von a in G erzeugte Untergruppe $\{a^n \mid n \geq 0\} = \{a^0, \dots, a^{\text{ord}_G(a)-1}\}$ bezeichnen wir mit $[a]_G$ oder mit $[a]$, wenn G aus dem Kontext ersichtlich ist.*

Da $\text{ord}(a)$ die Ordnung der Untergruppe $[a]$ ist, muss $\text{ord}(a)$ für alle $a \in G$ ein Teiler von $\|G\| = m$ sein. Zudem gilt für beliebige ganze Zahlen i, j (siehe Übungen)

$$a^i = a^j \Leftrightarrow i \equiv_{\text{ord}(a)} j.$$

Für manche Anwendungen wird ein Element $a \in G$ benötigt, das die gesamte Gruppe erzeugt.

Definition 117 (Primitivwurzel/Erzeuger). *Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung $\|G\| = m$. Ein Element $g \in G$ der Ordnung $\text{ord}_G(g) = \|G\| = m$ heißt **Erzeuger** von G . G heißt **zyklisch**, falls G mindestens einen Erzeuger besitzt.*

Ein Element $a \in G$ ist also genau dann ein Erzeuger, wenn die von a erzeugte Untergruppe $[a] = G$ ist.

Satz 118 (Gauß). Genau für $m \in \{1, 2, 4, p^k, 2p^k \mid 2 < p \text{ prim}\}$ ist die Gruppe $\mathbb{Z}_m^*$ zyklisch (ohne Beweis).

Für ein beliebiges Gruppenelement $a \in G$ ist die Exponentiation $n \mapsto a^n$ eine bijektive Abbildung von der Menge $\{0, 1, \dots, \text{ord}(a) - 1\}$ auf $[a]$. Die zugehörige Umkehrabbildung spielt in der Kryptografie eine wichtige Rolle.

Definition 119 (Index/diskreter Logarithmus). Seien $a \in G$ und $b \in [a]$. Dann heißt der eindeutig bestimmte Exponent $n \in \{0, 1, \dots, \text{ord}(a) - 1\}$ mit

$$a^n = b$$

Index oder **diskreter Logarithmus** von b zur Basis a in G (kurz: $n = \log_{G,a}(b)$). Im Fall $G = \mathbb{Z}_m^*$ schreiben wir auch einfach $n = \log_{m,a}(b)$.

Während die diskrete Exponentialfunktion $n \mapsto a^n$ durch **wiederholtes Quadrieren und Multiplizieren** (siehe nächsten Abschnitt) effizient berechenbar ist, sind bis heute keine effizienten Verfahren zur Berechnung des diskreten Logarithmus bekannt.

Beispiel 120. Betrachte die Gruppe $G = \mathbb{Z}_{11}^*$. Dann ist $g = 2$ ein Erzeuger von G , d.h. $\text{ord}_{11}(2) = 10$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2^n	1	2	4	8	5	10	9	7	3	6

b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\log_{11,2}(b)$	0	1	8	2	4	9	7	3	6	5

<

Das folgende Lemma benötigen wir für den Beweis des nächsten Satzes.

Lemma 121 (Euler). Sei $m \geq 1$, dann gilt

$$\sum_{d|m} \varphi(d) = m,$$

wobei die Summe über alle Teiler $d \geq 1$ von m läuft.

Beweis. Sei $d \geq 1$ ein Teiler von m . Wegen

$$\begin{aligned} \varphi(m/d) &= \|\{b \in \mathbb{Z}_{m/d} \mid \underbrace{\text{ggT}(b, m/d) = 1}\}_{b \in \mathbb{Z}_{m/d}}\| = \|\{a \in \mathbb{Z}_m \mid \text{ggT}(a, m) = d\}\| \\ &\Leftrightarrow \text{ggT}(bd, m) = d \end{aligned}$$

folgt

$$\sum_{d|m} \varphi(d) = \sum_{d|m} \varphi(m/d) = \sum_{d|m} \|\{a \in \mathbb{Z}_m \mid \text{ggT}(a, m) = d\}\| = \|\mathbb{Z}_m\| = m. \quad \square$$

Wir zeigen nun, dass G genau dann zyklisch ist, wenn jede Gleichung der Form $x^n = 1$ höchstens n verschiedene Lösungen in G hat.

Satz 122. Eine endliche Gruppe G der Ordnung $\|G\| = m$ ist genau dann zyklisch, falls jede Gleichung der Form $x^n = 1$, $n \geq 1$, höchstens n verschiedene Lösungen $a \in G$ hat. In diesem Fall hat G genau $\varphi(m)$ Erzeuger.

Beweis. Falls G zyklisch und g ein Erzeuger von G ist, so ist g^y , $y \in \mathbb{Z}_m$, genau dann eine Lösung von $x^n = 1$, wenn $g^{yn} = 1$ also y eine Lösung von $ny \equiv_m 0$ ist. Wie diese Kongruenz hat daher auch die Gleichung $x^n = 1$ genau $\text{ggT}(n, m) \leq n$ Lösungen.

Für die Rückrichtung sei für jeden Teiler d von m

$$S_d = \{a \in G \mid \text{ord}(a) = d\}$$

die Menge aller Elemente der Ordnung d . Wir zeigen zuerst, dass S_d höchstens $\varphi(d)$ Elemente enthält. Falls S_d ein Element a enthält, sind die Potenzen $a^0, a^1, a^2, \dots, a^{d-1}$ d verschiedene Lösungen der Gleichung $x^d = 1$. Da nach Voraussetzung keine weiteren Lösungen existieren, folgt $S_d \subseteq \{a^0, \dots, a^{d-1}\}$. Zudem hat a^i genau dann die Ordnung $\text{ord}(a^i) = \text{ord}(a) = d$, wenn $\text{ggT}(i, d) = 1$ ist (siehe Übungen), d.h. $S_d = \{a^i \mid i \in \mathbb{Z}_d^*\}$.

Da die Mengen S_d eine Partition von G bilden, folgt mit Lemma 121

$$\sum_{d|m} \|S_d\| = m = \sum_{d|m} \varphi(d).$$

Da aber, wie gerade gezeigt, $\|S_d\| \in \{0, \varphi(d)\}$ ist, muss $\|S_d\| = \varphi(d)$ und insbesondere $\|S_m\| = \varphi(m)$ gelten. $\square$

Da die Gleichung $x^n = 1$ in jedem Körper höchstens n verschiedene Lösungen hat (siehe Übungen), hat die multiplikative Gruppe $\mathbb{F}_{p^n}^*$ genau $\varphi(p^n - 1)$ Erzeuger. Insbesondere hat die Gruppe $\mathbb{F}_p^* = \mathbb{Z}_p^*$ genau $\varphi(p - 1)$ Erzeuger.

Falls die Primfaktorzerlegung von der Gruppenordnung m bekannt ist, lässt sich effizient überprüfen, ob ein gegebenes Element $a \in G$ ein Erzeuger ist oder nicht.

Satz 123. *Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung $\|G\| = m$. Ein Element $a \in G$ ist genau dann ein Erzeuger, wenn für jeden Primteiler q von m gilt:*

$$a^{m/q} \neq 1.$$

Beweis. Falls a ein Erzeuger von G ist, so gilt $a^e \neq 1$ für alle Exponenten $e \in \{1, \dots, m-1\}$ und somit auch für alle Exponenten e der Form m/q , q prim.

Ist dagegen $a \in G$ kein Erzeuger, so ist $\text{ord}(a) < m$, und da $\text{ord}(a)$ ein Teiler von m ist, existiert eine Zahl $d \geq 2$ mit $d \cdot \text{ord}(a) = m$. Sei q ein beliebiger Primteiler von d . Dann gilt

$$a^{m/q} = a^{d \cdot \text{ord}(a)/q} = (a^{\text{ord}(a)})^{d/q} = 1. \quad \square$$

Der folgende probabilistische Algorithmus COMPUTEGENERATOR berechnet einen Erzeuger a für eine zyklische Gruppe G , falls alle Primteiler q von $m = \|G\|$ bekannt sind und sich die Elemente von G zufällig generieren lassen.

COMPUTEGENERATOR($G, q_1, \dots, q_k$)

```

1  input zyklische Gruppe  $G$  und alle Primteiler  $q_1, \dots, q_k$  von  $m = \|G\|$ 
2  repeat
3    guess randomly  $a \in G$ 
4  until  $a^{m/q_i} \neq 1$  für  $i = 1, \dots, k$ 
5  output  $a$ 

```

Da $\varphi(m) \geq m/(2 \ln \ln m)$ für hinreichend große m gilt, findet der Algorithmus in jedem Schleifendurchlauf mit Wahrscheinlichkeit $\varphi(m)/m \geq 1/(2 \ln \ln m)$ einen Erzeuger. Die erwartete Anzahl der Schleifendurchläufe ist also $O(\ln \ln m)$.

6.2 Effiziente Berechnung von Potenzen

Falls sich in einer Gruppe G das Produkt zweier Elemente effizient berechnen lässt, sind auch Potenzen a^e durch **wiederholtes Quadrieren und Multiplizieren** effizient berechenbar. Hierzu sind maximal $2\lceil \log_2 e \rceil$ Multiplikationen erforderlich.

Sei $e = \sum_{i=0}^r e_i \cdot 2^i$ mit $r = \lfloor \log_2 e \rfloor$ die Binärdarstellung von e . Dann können wir den Exponenten e sukzessive mittels $b_0 = e_0$ und $b_i = b_{i-1} + e_i 2^i = \sum_{j=0}^i e_j \cdot 2^j$ für $i = 1, \dots, r$ zu $b_r = e$ berechnen. Der Algorithmus POT berechnet nach diesem Schema in der Variablen y die Potenzen a^{b_i} für $i = 0, \dots, r$.

Alternativ können wir auch das **Horner-Schema** zur Berechnung von e benutzen. Sei $c_r = e_r = 1$ und sei $c_{i-1} = 2c_i + e_{i-1}$ für $i = r, \dots, 1$. Dann ist $c_i = \sum_{j=i}^r e_j \cdot 2^{j-i}$, also $c_0 = \sum_{j=0}^r e_j \cdot 2^j = e$. Dies führt auf den Algorithmus HORNERPOT, der in der Variablen z die Potenzen a^{c_i} für $i = r, \dots, 0$ berechnet.

POT(a, e)				HORNERPOT(a, e)			
1	$x := a;$	$y := a^{e_0}$		1	$z := a$		
2	for $i := 1$ to r do			2	for $i := r - 1$ downto 0 do		
3	$x := x^2;$	$y := y \cdot x^{e_i}$		3	$z := z^2 \cdot a^{e_i}$		
4	return (y)			4	return (z)		

Beispiel 124. Sei $a = 1920$, $e = 19$ und $G = \mathbb{Z}_m^*$ für $m = 2773$. Dann berechnen die Algorithmen POT und HORNERPOT die modulare Potenz $1920^{19} \bmod 2773 = 1868$ wie folgt.

i	e_i	b_i	$x_i = a^{2^i}$	$y_i = a^{b_i}$	i	e_i	c_i	$z_i = a^{c_i}$
0	1	1	$1920^1 = 1920$	$1920^1 = 1920$	4	1	1	$1920^1 = 1920$
1	1	3	$1920^2 = 1083$	$1920 \cdot 1083^1 = 2383$	3	0	2	$1920^2 \cdot 1920^0 = 1083$
2	0	3	$1083^2 = 2683$	$2383 \cdot 2683^0 = 2383$	2	0	4	$1083^2 \cdot 1920^0 = 2683$
3	0	3	$2683^2 = 2554$	$2383 \cdot 2554^0 = 2383$	1	1	9	$2683^2 \cdot 1920^1 = 1016$
4	1	19	$2554^2 = 820$	$2383 \cdot 820^1 = \mathbf{1868}$	0	1	19	$1016^2 \cdot 1920^1 = \mathbf{1868}$

<

6.3 Primzahlen

Bezeichne $\mathcal{P}$ die Menge der Primzahlen. Für $n \geq 1$ sei $\mathcal{P}_n = \{p \in \mathcal{P} \mid p \leq n\}$ die Menge der Primzahlen $p \leq n$ und $\mathcal{P}_n(a, m) = \|\{p \in \mathcal{P}_n \mid p \equiv_m a\}\|$ die Menge der Primzahlen $p \leq n$, die kongruent a modulo m sind. Folgende Funktionen bestimmen die Anzahlen der Primzahlen in diesen Mengen,

$$\pi, \pi_{a,m} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0 \text{ mit } \pi(n) = \|\mathcal{P}_n\| \text{ und } \pi_{a,m}(n) = \|\mathcal{P}_n(a, m)\|$$

Satz 125. (Primzahlsatz, Hadamard, de la Vallée Poussin 1896)

Ist $\text{ggT}(a, m) = 1$, so gilt*

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n} \text{ und } \pi_{a,m}(n) \sim \frac{n}{\varphi(m) \cdot \ln n}$$

* $f(n) \sim g(n)$ bedeutet $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)/g(n) = 1$.

Wie folgende Tabelle zeigt, liefert die Funktion $Li(n) = \int_2^n (\ln x)^{-1} dx$ im Vergleich zu $n/\ln n$ eine deutlich bessere Abschätzung von $\pi(n)$.

n	$\pi(n)$	$\pi(n) - n/\ln n$	$Li(n) - \pi(n)$
10	4	-0.3	2.2
100	25	3.3	5.1
1 000	168	23	10
10 000	1 229	143	17
10 100	1 240	144	18
10^6	78 498	6 116	130
10^9	50 847 534	2 592 592	1 701
10^{12}	37 607 912 018	1 416 705 193	38 263
10^{15}	29 844 570 422 669	891 604 962 452	1 052 619
10^{18}	24 739 954 287 740 860	612 483 070 893 536	21 949 555
10^{21}	21 127 269 486 018 731 928	446 579 871 578 168 707	597 394 254

Beispiel 126. Die Anzahl der Primzahlen in einem Intervall $[a, b]$ ist ungefähr $\frac{b}{\ln b} - \frac{a}{\ln a}$. Für das Intervall $I = [10\,000, 10\,100]$ ergibt sich z. B. ein Näherungswert von

$$\|I \cap \mathcal{P}\| \approx \frac{10\,100}{\ln 10\,100} - \frac{10^4}{\ln 10^4} \approx \frac{10\,100}{9.22} - \frac{10^4}{9.21} \approx 1095.4 - 1085.7 = 9.7 \approx 10,$$

während der tatsächliche Wert gleich 11 ist.

Für die Anzahl aller 100-stelligen Primzahlen (in Dezimaldarstellung), also aller Primzahlen im Intervall $I' = [10^{99}, 10^{100} - 1]$ erhalten wir den Näherungswert

$$\|I' \cap \mathcal{P}\| \approx \frac{10^{100}}{100 \ln 10} - \frac{10^{99}}{99 \ln 10} = \left(1 - \frac{10}{99}\right) \frac{10^{98}}{\ln 10} = \frac{89 \cdot 10^{98}}{99 \ln 10} \approx 390 \cdot 10^{95}.$$

Vergleicht man diese Zahl mit der Anzahl $10^{100} - 10^{99} = 9 \cdot 10^{99}$ aller 100-stelligen Dezimalzahlen, so sehen wir, dass ungefähr jede 90000/390 ≈ 231 -te 100-stellige Dezimalzahl prim ist.

Für die Anzahl aller 1000-stelligen Primzahlen (in Dezimaldarstellung), also aller Primzahlen im Intervall $I' = [10^{999}, 10^{1000} - 1]$ erhalten wir dagegen den Näherungswert

$$\|I' \cap \mathcal{P}\| \approx \frac{10^{1000}}{1000 \ln 10} - \frac{10^{999}}{999 \ln 10} = \left(1 - \frac{100}{999}\right) \frac{10^{997}}{\ln 10} = \frac{899 \cdot 10^{997}}{999 \ln 10} \approx 391 \cdot 10^{994}.$$

Hier sehen wir, dass ungefähr jede 900000/391 ≈ 2301 -te der $10^{1000} - 10^{999} = 9 \cdot 10^{999}$ 1000-stelligen Dezimalzahlen prim ist. $\triangleleft$

Der Beweis des Primzahlsatzes ist sehr aufwändig. Mit elementaren Mitteln lässt sich jedoch folgender Satz beweisen, der für die meisten Anwendungen vollkommen ausreicht.

Satz 127 (Tschebyscheff). Für alle $n > 200$ gilt $\pi(n) > \frac{2 \cdot n}{3 \cdot \ln n}$.
(Ohne Beweis)

6.4 Pseudo-Primzahlen und der Fermat-Test

Bei der Konstruktion eines probabilistischen Monte-Carlo Primzahltests geht man üblicherweise so vor, dass man eine Folge von Teilmengen $\mathcal{A}_n \subseteq \mathbb{Z}_n^*$ definiert, die für alle $n \geq n_0$ folgende drei Eigenschaften erfüllen:

1. Für gegebene Zahlen $a, n \in \mathbb{N}$ kann effizient, d. h. in Polynomialzeit getestet werden, ob $a \in \mathcal{A}_n$ ist.
2. Für primes n ist $\mathcal{A}_n = \mathbb{Z}_n^*$.
3. Für zusammengesetztes n ist ein konstanter Anteil aller Elemente von $\mathbb{Z}_n^*$ nicht in $\mathcal{A}_n$ enthalten, d. h. $\|\mathcal{A}_n\| \leq \varepsilon \varphi(n)$ für eine Konstante $\varepsilon < 1$.

Typischerweise wählt man für $\mathcal{A}_n$ daher eine Eigenschaft, die für alle Elemente $a \in \mathbb{Z}_n^*$ gilt, falls n prim ist. Der zugehörige generische Primzahltest GT arbeitet dann wie folgt.

$$GT(n, k), k \geq 1$$

```

1  for  $j := 1$  to  $k$  do
2    guess randomly  $a \in \{1, \dots, n-1\}$ 
3    if  $a \notin \mathcal{A}_n$  then return(zusammengesetzt)
4  return(prim)

```

Hierbei steuert der Parameter k die maximale Fehlerwahrscheinlichkeit von $GT(n, k)$. Gilt nämlich $\|\mathcal{A}_n\| \leq \varepsilon \varphi(n)$ für zusammengesetztes n und eine Konstante $\varepsilon < 1$, so gibt $GT(n, k)$ für primes n immer „prim“ aus und für zusammengesetztes n höchstens mit Wahrscheinlichkeit $(\|\mathcal{A}_n\|/(n-1))^k < (\|\mathcal{A}_n\|/\varphi(n))^k \leq \varepsilon^k$.

Da der Algorithmus (mit beliebig kleiner Wahrscheinlichkeit) eine falsche Ausgabe produzieren kann, handelt es sich um einen sogenannten **Monte-Carlo-Algorithmus** (mit einseitigem Fehler, da es nur im Fall n zusammengesetzt zu einer falschen Ausgabe kommen kann). Im Gegensatz hierzu gibt ein sogenannter **Las-Vegas-Algorithmus** nie eine falsche Antwort. Allerdings darf ein Las-Vegas-Algorithmus (mit kleiner Wahrscheinlichkeit) die Antwort schuldig bleiben, also „?“ ausgeben. Es liegt nahe, den Satz von Fermat zur Konstruktion einer „Testmengensequenz“

$$\mathcal{A}_n^{FT} = \{a \in \mathbb{Z}_n^* \mid a^{n-1} \equiv_n 1\}$$

zu verwenden. Dies führt auf folgenden Fermat-Test (FT).

$$FT(n, k), n \geq 3 \text{ ungerade und } k \geq 1$$

```

1  berechne die Binärdarstellung  $\sum_{i=0}^r e_i \cdot 2^i$ ,  $e_r = 1$ , von  $n-1$ 
2  for  $j := 1$  to  $k$  do
3    guess randomly  $a \in \{1, \dots, n-1\}$ 
4     $z := a$ 
5    for  $i := r-1$  downto  $0$  do
6       $z := z^2 \bmod n$ 
7      if  $e_i = 1$  then
8         $z := z \cdot a \bmod n$ 
9    if  $z \not\equiv_n 1$  then
10     return(zusammengesetzt)
11 return(prim)

```

Der Fermat-Test berechnet also die Potenz $a^{n-1} = z_0$ genau wie der Algorithmus HORNER-POT über eine Folge $z_r, \dots, z_0$ mit $z_r = a$ und $z_{i-1} = z_i^2 a^{e_{i-1}} \bmod n$ für $i = r-1, \dots, 0$. Er erkennt n als zusammengesetzt, falls $z_0 \neq 1$ ist. Man nennt eine zusammengesetzte Zahl n , die den Fermat-Test bei Wahl von $a \in \mathbb{Z}_n^*$ besteht (d. h. es gilt $a^{n-1} \equiv_n 1$) eine *Fermat-Pseudo-Primzahl* oder einfach *Pseudo-Primzahl zur Basis a* . Man sagt auch, a ist ein (*falscher*) *Primzahlzeuge* für n . Zum Beispiel ist die Zahl 91 pseudo-prim zur Basis 3. Es gibt sogar Zahlen n (z. B. $n = 561$) die pseudo-prim zu jeder Basis $a \in \mathbb{Z}_n^*$ sind (sogenannte *Carmichael-Zahlen*). Für diese Zahlen ist Bedingung c) in obiger Aufzählung nicht erfüllt, weshalb der Fermat-Test als Pseudo-Primzahltest bezeichnet wird. In den Übungen wird gezeigt, dass Bedingung c) für jede zusammengesetzte Zahl, die keine Carmichael-Zahl ist, mit $\varepsilon = 1/2$ erfüllt ist. Carmichael-Zahlen kommen nur sehr selten vor (erst 1992 konnte die Existenz unendlich vieler Carmichael-Zahlen nachgewiesen werden).

6.5 Der Miller-Rabin Test

Der Fermat-Pseudoprimzahltest kann zu einem Monte-Carlo Primzahltest (dem sogenannten Miller-Rabin Test, kurz MRT) erweitert werden. Wie wir gesehen haben, berechnet der Fermat-Test die Potenz $a^{n-1} = z_0$ über eine Folge $z_r, \dots, z_0$ von Potenzen mit $z_r = a$ und $z_{i-1} = z_i^2 a^{e_{i-1}} \bmod n = a^{c_i} \bmod n$ für $i = r-1, \dots, 0$, wobei $c_i = \sum_{j=i}^r e_j \cdot 2^{j-i}$ ist. Er erkennt n als zusammengesetzt, falls $z_0 \neq 1$ ist. Der Miller-Rabin Test überprüft nun zusätzlich bei jeder Quadrierung, ob $z_i^2 \equiv_n 1$ und $z_i \not\equiv_n \pm 1$ ist. Ist dies der Fall, so muss n ebenfalls zusammengesetzt sein, da z_i eine nichttriviale Lösung der Kongruenz $x^2 \equiv_n 1$ in $\mathbb{Z}_n^*$ ist. Die MRT-Testmenge ist also

$$\mathcal{A}_n^{\text{MRT}} = \{a \in \mathbb{Z}_n^* \mid z_0 \equiv_n 1 \text{ und } \forall i = r, \dots, 1 : z_i^2 \equiv_n 1 \Rightarrow z_i \equiv_n \pm 1\}.$$

Es ist klar, dass diese Testmengen die Bedingungen a) und b) erfüllen. Mit etwas zahlentheoretischem Aufwand lässt sich zeigen, dass sie auch Bedingung c) für $\varepsilon = 1/4$ erfüllen. Weiter unten werden wir dies für $\varepsilon = 1/2$ zeigen.

Der Miller-Rabin Test lässt sich in Pseudocode wie folgt implementieren.

$\text{MRT}(n, k)$, $n \geq 3$ ungerade und $k \geq 1$

```

1  berechne die Binärdarstellung  $\sum_{i=0}^r e_i \cdot 2^i$  von  $n-1$ , wobei  $e_r = 1$  ist
2  for  $j := 1$  to  $k$  do
3    guess randomly  $a \in \{1, \dots, n-1\}$ 
4     $z := a$ 
5    for  $i := r-1$  downto 0 do
6       $y := z$ 
7       $z := z^2 \bmod n$ 
8      if  $z \equiv_n 1 \wedge y \not\equiv_n \pm 1$  then
9        return(zusammengesetzt)
10     if  $e_i = 1$  then
11        $z := z \cdot a \bmod n$ 
12     if  $z \not\equiv_n 1$  then
13       return(zusammengesetzt)
14  return(prim)
```

Beispiel 128. Sei $n = 221$. Dann berechnet der Miller-Rabin Test für $a = 174$, $a' = 137$ und $a'' = 18$ die folgenden Werte z_i , z'_i bzw. z''_i (die dünn gedruckten Werte werden nur vom Fermat-Test berechnet, da der Miller-Rabin Test vorher abbricht).

i	e_i	c_i	$z_i = (a)^{c_i}$	$(z_i)^2$	$z'_i = (a')^{c_i}$	$(z'_i)^2$	$z''_i = (a'')^{c_i}$	$(z''_i)^2$
7	1	1	174	220	137	205	18	103
6	1	3	220 · 174 = 47	220	205 · 137 = 18	103	103 · 18 = 86	103
5	0	6	220	1	103	1	103	1
4	1	13	1 · 174 = 174	220	$1 \cdot 137 = 137$	205	$1 \cdot 18 = 18$	103
3	1	27	220 · 174 = 47	220	$205 \cdot 137 = 18$	103	$103 \cdot 18 = 86$	103
2	1	55	220 · 174 = 47	220	$103 \cdot 137 = 188$	205	$103 \cdot 18 = 86$	103
1	0	110	220	1	205	35	103	1
0	0	220	1		35		1	

Der Miller-Rabin Test erkennt also die Zahl $n = 221$ bei Wahl von $a = 174$ nicht als zusammengesetzt, wohl aber bei Wahl von $a = 137$ und $a = 18$. Dagegen würde dies der Fermat-Test bei Wahl von $a = 18$ ebenfalls nicht erkennen. $\triangleleft$

Die Zahlen $a \in \mathcal{A}_n^{\text{MRT}}$ werden *starke Primzahlzeugen* für n genannt. Falls n zusammengesetzt ist, sagt man auch, n ist eine *starke Pseudo-Primzahl zur Basis a* . Es gibt nur eine Zahl $n < 2,5 \cdot 10^{10}$, die stark pseudo-prim zu den Basen 2, 3, 5 und 7 ist: $n = 3\,215\,031\,751 = 151 \cdot 751 \cdot 28\,351$.

Wir zeigen nun, dass jede ungerade zusammengesetzte Zahl $n > 2$ höchstens $\varphi(n)/2$ starke Primzahlzeugen hat. Sei $n - 1 = 2^m u$ mit u ungerade und sei

$$U_n = \{a \in \mathbb{Z}_n^* \mid a^{2^j u} \equiv_n \pm 1\}, \text{ wobei } j = \max\{0 \leq i \leq m \mid \exists a \in \mathbb{Z}_n^* : a^{2^i u} \equiv_n -1\}.$$

Behauptung 129. U_n ist eine Untergruppe von $\mathbb{Z}_n^*$.

Es genügt zu zeigen, dass U_n unter Multiplikation abgeschlossen ist. Seien hierzu $a, b \in U_n$. Dann gilt

$$(ab)^{2^j u} = a^{2^j u} b^{2^j u} \equiv_n (\pm 1)(\pm 1) = \pm 1.$$

Behauptung 130. $\mathcal{A}_n^{\text{MRT}} \subseteq U_n$.

i	e_i	c_i	$z_i = a^{c_i} \bmod n$
m	1	u	$a^u \bmod n$
$m-1$	0	$2u$	$a^{2u} \bmod n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$m-j$	0	$2^j u$	$a^{2^j u} \bmod n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	0	$2^{m-1} u$	$a^{2^{m-1} u} \bmod n$
0	0	$2^m u$	$a^{2^m u} \bmod n$

Sei $a \in \mathcal{A}_n^{\text{MRT}}$. Dann gilt $z_0 \equiv_n 1$ und $z_i^2 \equiv_n 1 \Rightarrow z_i \equiv_n \pm 1$ für $i = r, \dots, 1$. Aus Ersterem folgt wegen $z_0 \equiv_n a^{n-1} \equiv_n a^{2^m u}$ sofort $a^{2^m u} \equiv_n 1$ und aus Letzterem insbesondere $(z_{m-i})^2 \equiv_n 1 \Rightarrow z_{m-i} \equiv_n \pm 1$ für $i = 0, \dots, m-1$. Da für $i = 0, \dots, m$ die Kongruenz $z_{m-i} \equiv_n a^{2^i u}$ gilt, folgt daraus

$$\forall i \in \{0, \dots, m-1\} : a^{2^{i+1}u} \equiv_n 1 \rightarrow a^{2^i u} \equiv_n \pm 1 \quad (*)$$

Zudem folgt aus der Definition von j , dass

$$\forall i \in \{j+1, \dots, m\} : a^{2^i u} \not\equiv_n -1 \quad (**)$$

gilt. Nun folgen aus $a^{2^m u} \equiv_n 1$, $(*)$ und $(**)$ die Kongruenzen $a^{2^i u} \equiv_n 1$ für $i = m, m-1, \dots, j+1$. Eine weitere Anwendung von $(*)$ auf die resultierende Kongruenz $a^{2^{j+1}u} \equiv_n 1$ impliziert schließlich $a^{2^j u} \equiv_n \pm 1$, also $a \in U_n$.

Behauptung 131. *Falls n zusammengesetzt ist, ist U_n eine echte Untergruppe von $\mathbb{Z}_n^*$ und daher*

$$\|\mathcal{A}_n^{\text{MRT}}\| \leq \|U_n\| \leq \varphi(n)/2.$$

Falls $n = p^k$ eine Primzahlpotenz mit $p > 2$ und $k \geq 2$ ist, gilt $(p^{k-1} + 1)^{p^{k-1}} \not\equiv_{p^k} \pm 1$ (siehe Übungen) und somit $a = p^{k-1} + 1 \notin U_n$. Andernfalls können wir $n = n_1 n_2$ in teilerfremde Faktoren $n_1, n_2 > 2$ zerlegen. Zudem existiert nach Definition von j eine Zahl $b \in \mathbb{Z}_n^*$ mit $b^{2^j u} \equiv_n -1$. Dann ist aber die eindeutige Lösung $a \in \mathbb{Z}_n^*$ von

$$\begin{aligned} x &\equiv_{n_1} b, \\ x &\equiv_{n_2} 1 \end{aligned}$$

nicht in U_n enthalten:

$$\begin{aligned} a^{2^j u} &\equiv_{n_1} b^{2^j u} \equiv_{n_1} -1 \Rightarrow a^{2^j u} \not\equiv_n 1, \\ a^{2^j u} &\equiv_{n_2} 1^{2^j u} = 1 \Rightarrow a^{2^j u} \not\equiv_n -1. \end{aligned}$$

Unter Verwendung der verallgemeinerten Riemannschen Hypothese kann man sogar zeigen, dass es keine Zahl n gibt, die stark pseudo-prim zu allen Basen a mit $a < 2 \cdot (\ln n)^2$ ist. Unter dieser Hypothese kann der Miller-Rabin Test daher zu einem deterministischen Polynomialzeit-Algorithmus derandomisiert werden (mit der Folge, dass das Primzahlproblem in P lösbar ist). Erst 2002 fanden Agrawal, Kayal und Saxena einen Algorithmus, der das Primzahlproblem auch ohne diese Voraussetzung in P löst.

7 Asymmetrische Kryptosysteme

Diffie und Hellman kamen 1976 auf die Idee, dass die Geheimhaltung des Chiffrierschlüssels keine notwendige Voraussetzung für die Sicherheit eines Kryptosystems sein muss. Natürlich setzt dies voraus, dass die vom Sender und Empfänger benutzten Schlüssel k und k' voneinander verschieden sind und dass insbesondere der Dechiffrierschlüssel k' nur sehr schwer aus dem Chiffrierschlüssel k berechenbar ist. Ist dies gewährleistet, so kann jedem Kommunikationsteilnehmer X ein Paar von zusammengehörigen Schlüsseln k_X, k'_X zugeteilt werden. X kann nun den Chiffrierschlüssel k_X öffentlich bekannt geben, muss aber den Dechiffrierschlüssel k'_X unter Verschluss halten. Die Tatsache, dass sich mit k_X die Nachrichten nicht wieder entschlüsseln lassen, hat den entscheidenden Vorteil, dass k_X über einen authentisierten Kanal zum Sender gelangen kann (d.h. es ist zwar nicht notwendig, k_X geheim zu halten, aber die Herkunft von k_X muss verifizierbar sein).

- Von einem **symmetrischen Kryptosystem** spricht man, wenn die Kenntnis des Chiffrierschlüssels gleichbedeutend mit der Kenntnis des Dechiffrierschlüssels ist, der eine also leicht aus dem anderen berechnet werden kann.
- Dagegen sind bei einem **asymmetrischen Kryptosystem** nur die Dechiffrierschlüssel geheimzuhalten, während die Chiffrierschlüssel öffentlich bekanntgegeben werden können.

Für symmetrische Kryptosysteme sind auch die Bezeichnungen **konventionelles Kryptosystem**, **Kryptosystem mit geheimen Schlüsseln** oder **Secret-Key-Kryptosystem** üblich, wogegen asymmetrische Kryptosysteme auch häufig auch als **Kryptosysteme mit öffentlichen Schlüsseln** oder **Public-Key-Kryptosysteme** bezeichnet werden.

Bei einem symmetrischen Kryptosystem sind die Rollen von Sender und Empfänger untereinander austauschbar (beziehungsweise *symmetrisch*), da die Vertraulichkeit der Nachrichten auf einem *gemeinsamen Geheimnis* beruht, welches sich die beiden Kommunikationspartner in Form des zwischen ihnen vereinbarten Schlüssels verschaffen.

Der prinzipielle Unterschied zwischen symmetrischer und asymmetrischer Verschlüsselung kann sehr schön am Beispiel eines Tresors veranschaulicht werden, den Alice dazu verwendet, Bob geheime Dokumente zukommen zu lassen.

Symmetrische Verschlüsselung: Alice und Bob besitzen beide den gleichen Schlüssel k . Alice schließt mit ihrem Schlüssel die Nachricht in den Tresor ein und Bob öffnet ihn später wieder mit seinem Schlüssel. Das Tresorschloss lässt sich also mit k sowohl auf- als auch zuschließen.

Asymmetrische Verschlüsselung: Alice schließt die Nachricht mit dem Schlüssel k_B in den Tresor ein. Danach lässt sich das Tresorschloss mit diesem Schlüssel nicht mehr öffnen. Dies ist nur mit dem in Bobs Besitz befindlichen Schlüssel k'_B möglich. Obwohl also beide Schlüssel in das Schloss passen, können k_B und k'_B jeweils nur in eine von beiden Richtungen gedreht werden.

Da Alice nicht im Besitz von Bobs privatem Schlüssel k'_B ist, kann sie im Gegensatz zu Bob nicht alle mit k_B verschlüsselten Nachrichten entschlüsseln, insbesondere keine Kryptotexte, die Bob von anderen Teilnehmern zugeschickt werden. Dies hat zur Folge,

dass für jeden Teilnehmer nur ein asymmetrisches Schlüsselpaar generiert werden muss, während für die Kommunikation zwischen n Teilnehmern bis zu $\binom{n}{2}$ symmetrische Schlüssel benötigt werden. Zu beachten ist auch, dass mit den beiden Schlüsseln k_B und k'_B von Bob nur eine Nachrichtenübermittlung von Alice an Bob möglich ist. Für die umgekehrte Richtung müssen dagegen die beiden Schlüssel k_A und k'_A von Alice benutzt werden.

7.1 Das RSA-System

Das RSA-Kryptosystem basiert auf dem Faktorisierungsproblem und wurde 1978 von seinen Erfindern Rivest, Shamir und Adleman veröffentlicht. Während beim Primzahlproblem nur eine Ja-Nein-Antwort auf die Frage „Ist n prim?“ gesucht wird, muss ein Algorithmus für das Faktorisierungsproblem im Falle einer zusammengesetzten Zahl mindestens einen nicht-trivialen Faktor berechnen.

Für jeden Teilnehmer des RSA-Kryptosystems werden zwei große Primzahlen p, q und Exponenten e, d mit $ed \equiv_{\varphi(n)} 1$ bestimmt, wobei $n = pq$ und $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$ ist.

Öffentlicher Schlüssel: $k = (e, n)$,

Geheimer Schlüssel: $k' = (d, n)$.

Jede Nachricht x wird durch eine Folge $x_1, x_2, \dots$ von natürlichen Zahlen $x_i < n$ dargestellt, die einzeln wie folgt ver- und entschlüsselt werden.

$$\begin{aligned} E((e, n), x) &= x^e \bmod n, \\ D((d, n), y) &= y^d \bmod n. \end{aligned}$$

Die Chiffrierfunktionen E und D können durch „Wiederholtes Quadrieren und Multiplizieren“ effizient berechnet werden.

Der Schlüsselraum ist also

$$K = \{(c, n) \mid \text{es ex. Primzahlen } p \text{ und } q \text{ mit } n = pq \text{ und } c \in \mathbb{Z}_{\varphi(n)}^*\}$$

und S enthält alle Schlüsselpaare $((e, n), (d, n)) \in K \times K$ mit $ed \equiv_{\varphi(n)} 1$.

Satz 132. Für jedes Schlüsselpaar $((e, n), (d, n)) \in S$ und alle $x \in \mathbb{Z}_n$ gilt

$$x^{ed} \equiv_n x.$$

Beweis. Sei $ed = z\varphi(n) + 1$ für eine natürliche Zahl z . Wir zeigen $x^{ed} \equiv_p x$. Die Kongruenz $x^{ed} \equiv_q x$ folgt analog und beide Kongruenzen zusammen implizieren $x^{ed} \equiv_n x$.

Wegen $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$ und wegen

$$x^{p-1} \equiv_p \begin{cases} 0, & x \equiv_p 0, \\ 1, & x \not\equiv_p 0 \end{cases}$$

folgt

$$x^{ed} = x^{z(p-1)(q-1)} x = (x^{p-1})^{z(q-1)} x \equiv_p x.$$

□

Zur praktischen Durchführung

Bestimmung von p und q : Man beginnt mit einer Zahl x der Form $30z$ (mit $z \in \mathbb{Z}$) und der verlangten Größenordnung (z. B. 10^{100}) und führt einen Primzahltest für $x + 1$ durch. Ist die Antwort negativ, testet man der Reihe nach die Zahlen $x + 7$, $x + 11$, $x + 13$, $x + 17$, $x + 19$, $x + 23$, $x + 29$, $x + 30 + 1$, $x + 30 + 7$, ... bis eine Primzahl gefunden ist. Wegen $\frac{\pi(n)}{n} > \frac{2}{(3 \ln n)}$ und da nur 8 von 30 Zahlen getestet werden, sind hierzu ungefähr $\frac{8 \cdot 3 \cdot \ln x}{30 \cdot 2} = \frac{2}{5} \ln x$ Primzahltests durchzuführen (bei 100-stelligen Dezimalzahlen sind das um die 92 Tests).

Bestimmung von d : d soll teilerfremd zu $\varphi(n) = (p - 1)(q - 1)$ sein. Diese Bedingung wird z. B. von jeder Primzahl größer als $\max\{p, q\}$ erfüllt.

Bestimmung von e : Da $\text{ggT}(d, \varphi(n)) = 1$ ist, liefert der erweiterte Euklidische Algorithmus das multiplikative Inverse e von d modulo $\varphi(n)$.

Ver- und Entschlüsselung: Modulares Exponentieren durch wiederholtes Quadrieren und Multiplizieren. Es gibt auch Hardware-Implementierungen, die (unter Verwendung des Chinesischen Restsatzes) mit Geschwindigkeiten von bis zu 225 Kbits/sec arbeiten und somit circa 1500 mal langsamer als der DES sind.

Kryptoanalytische Betrachtungen

1. Es ist klar, dass das RSA-Verfahren gebrochen ist, falls es dem Gegner gelingt, den Modul n zu faktorisieren. In diesem Fall kann er $\varphi(n)$ und damit auch den privaten Dechiffrierexponenten aus dem öffentlichen Exponenten e berechnen. Es ist auch möglich, die Primfaktoren p , q bei Kenntnis von $\varphi(n)$ zu berechnen. Sei $n = pq$ (mit $p, q \in \mathcal{P}$; $p > q$). Wegen

$$\varphi(n) = (p - 1)(q - 1) = (p - 1)(n/p - 1) = -p + n + 1 - n/p$$

erhalten wir die Gleichung

$$p - \underbrace{(n + 1 - \varphi(n))}_c + n/p = 0,$$

die auf die quadratische Gleichung $p^2 - cp + n = 0$ führt, aus der sich p und q zu $\frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4n}}{2}$ bestimmen lassen.

2. Die Primfaktoren p und q sollten nicht zu nahe beieinander liegen, da n sonst leicht faktorisiert werden kann. Sei $p > q$. Dann gilt $q < \sqrt{n} < a < p$, wobei $a = \frac{(p+q)}{2}$ das arithmetische Mittel von p und q ist. Sei $b = \frac{(p-q)}{2}$ die Entfernung zwischen a und q . Ist nun $p - q$ klein, so ist auch $\lfloor \sqrt{n} \rfloor - q < a - q = b$ klein und daher kann q ausgehend von $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ nach höchstens b Schritten gefunden werden. Um dies zu verhindern, genügt es, $p > 2q$ zu wählen, da dann $\sqrt{n} - q = \sqrt{pq} - q > \sqrt{2}q - q > q/3$ ist.

Mit dem Verfahren der Differenz der Quadrate lässt sich q sogar in $a - \lceil \sqrt{n} \rceil$ Schritten finden. Wegen

$$n = pq = (a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

genügt es nämlich, eine Zahl $a > \sqrt{n}$ zu finden, so dass $a^2 - n = b^2$ eine Quadratzahl ist. Für $n = 124\,711$ ist zum Beispiel $\lceil \sqrt{n} \rceil = 353$. Bereits für $a = 356$ ist $a^2 - n = 126\,736 - 124\,711 = 2025 = 45^2$ eine Quadratzahl, woraus wir die beiden Faktoren $p = a + 45 = 401$ und $q = a - 45 = 311$ erhalten.

Der Aufwand für die Suche ist proportional zur Differenz $a - \sqrt{n}$, die sich wegen $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \frac{y}{2\sqrt{x}}$ wie folgt nach unten abschätzen lässt:

$$a - \sqrt{n} = a - \sqrt{a^2 - b^2} \geq \frac{b^2}{2a}.$$

Im Fall $p \geq 2q$ gilt jedoch wegen $b = (p-q)/2 = (p+q)/6 + (p-2q)/3 \geq (p+q)/6 = a/3$ (also $3b/a \geq 1$),

$$a - \sqrt{n} \geq \frac{b^2}{2a} = \frac{3b}{a} \cdot \frac{b}{6} \geq \frac{b}{6} \geq \frac{q}{12}.$$

Daher bringt dieser Angriff in diesem Fall keinen nennenswerten Vorteil gegenüber obiger Faktorisierungsmethode.

3. Für unterschiedliche Teilnehmer sollten verschiedene Module $n = pq$ gewählt werden. Wie wir später sehen werden, erlaubt nämlich die Kenntnis eines Schlüsselpaares $(e, n), (d, n)$ mit $ed \equiv_{\varphi(n)} 1$ die effiziente Faktorisierung von n (siehe unten).

Wie wir gesehen haben, ist das RSA-System gebrochen, falls die Faktorisierung des Moduls n bekannt ist. Das Brechen von RSA ist daher höchstens so schwer wie das Faktorisieren von n .

Dagegen ist nicht bekannt, ob auch umgekehrt aus einem effizienten Algorithmus, der bei Eingabe von e, n, y ein x mit $x^e \equiv_n y$ berechnet, ein effizienter Faktorisierungsalgorithmus für n gewonnen werden kann. Es ist also nach heutigem Kenntnisstand nicht ausgeschlossen, dass RSA leichter zu brechen ist als n zu faktorisieren.

Wie der folgende Satz zeigt, erfordert die Bestimmung des geheimen Schlüssels dagegen den gleichen Aufwand wie das Faktorisieren von n . Bei Kenntnis von d kann nämlich leicht ein Vielfaches $v = ed - 1$ von $k = \text{kgV}(p-1, q-1)$ bestimmt und somit n faktorisiert werden. Die Faktorisierung von n beruht auf folgendem Lemma.

Lemma 133. *Sei $m \geq 1$ und seien y, z zwei Lösungen der Kongruenz $x^2 \equiv_m a$ mit $y \not\equiv_m \pm z$. Dann ist $\text{ggT}(y+z, m)$ ein nicht-trivialer Faktor von m .*

Beweis. Wegen $y^2 \equiv_m z^2$ existiert ein $t \in \mathbb{Z}$ mit

$$(y+z)(y-z) = y^2 - z^2 = tm.$$

Da jedoch wegen $y \not\equiv_m \pm z$ weder $y+z$ noch $y-z$ durch m teilbar ist, folgt $1 < \text{ggT}(y+z, m) < m$. $\square$

Betrachte folgenden Las-Vegas Algorithmus RSA-FACTORIZE, der durch eine leichte Modifikation aus dem Miller-Rabin Primzahltest hervorgeht.

$MRT(n), n$ ungerade	RSA-FACTORIZE(n, v)
1 sei $\sum_{i=0}^r e_i \cdot 2^i, e_r = 1$, die Binärdarstellung von $n-1$	1 sei $\sum_{i=0}^r e_i \cdot 2^i, e_r = 1$, die Binärdarstellung von v
2 guess randomly $a \in \{1, \dots, n-1\}$	2 guess randomly $a \in \{1, \dots, n-1\}$
3	3 if $\text{ggT}(a, n) > 1$ then
4	4 return ($\text{ggT}(a, n)$)
5 $b := a$	5 $b := a$
6 for $i := r-1$ downto 0 do	6 for $i := r-1$ downto 0 do
7 $c := b$	7 $c := b$
8 $b := b^2 \bmod m$	8 $b := b^2 \bmod m$
9 if $b \equiv_n 1 \wedge c \not\equiv_n \pm 1$ then	9 if $b \equiv_n 1 \wedge c \not\equiv_n \pm 1$ then
10 return (zusammengesetzt)	10 return ($\text{ggT}(c+1, n)$)
11 if $e_i = 1$ then $b := b \cdot a \bmod n$	11 if $e_i = 1$ then $b := b \cdot a \bmod n$
12 if $b \not\equiv_n 1$ then return (zus.gesetzt)	12 return (?)
13 else return (prim)	

Beispiel 134. Sei $n = 221 = 13 \cdot 17$. Dann ist $\varphi(221) = 12 \cdot 16 = 192$ und $k = \text{kgV}(12, 16) = \text{kgV}(2^2 3, 2^4) = 3 \cdot 2^4 = 48$. Angenommen, der Gegner könnte zu dem öffentlichen Schlüssel $(e, n) = (25, 221)$ den zugehörigen privaten Schlüssel $(d, n) = (169, 221)$ bestimmen. Dann ergibt sich $v = ed - 1$ zu $v = 4224$ und RSA-FACTORIZE berechnet für $a = 174, a' = 137$ und $a'' = 111$ die folgenden Werte z_i, z'_i bzw. z''_i .

i	e_i	c_i	$z_i = 174^{c_i}$	$(z_i)^2$	$z'_i = 137^{c_i}$	$(z'_i)^2$	$z''_i = 111^{c_i}$	$(z''_i)^2$
12	1	1	174	220	137	205	111	166
11	0	2	220	1	205	35	166	152
10	0	4	1	1	35	120	152	120
9	0	8	1	1	120	35	120	35
8	0	16	1	1	35	120	35	120
7	1	33	174	220	$120 \cdot 137 = 86$	103	$120 \cdot 111 = 60$	64
6	0	66	220	1	103	1	64	118
5	0	132	1	1			118	1
4	0	264	1	1				
3	0	528	1	1				
2	0	1056	1	1				
1	0	2112	1	1				
0	0	4224	1					

RSA-FACTORIZE gelingt also die Faktorisierung von $n = 221$ bei Wahl von $a = 174$ nicht, wohl aber bei Wahl von $a = 137$ und $a = 111$. Im ersten Fall findet RSA-FACTORIZE den Faktor $\text{ggT}(103 + 1, 221) = 13$ und im zweiten den Faktor $\text{ggT}(118 + 1, 221) = 17$. ◁

Satz 135. Sei $n = pq$ ($p, q \geq 3$ prim) und $v > 0$ ein Vielfaches von $k = \text{kgV}(p-1, q-1)$. Dann gibt RSA-FACTORIZE(n, v) mit Wahrscheinlichkeit $> 1/2$ einen Primfaktor von n aus.

Beweis. Mit Lemma 133 folgt

$$b \not\equiv_n \pm 1, b^2 \equiv_n 1 \quad \Rightarrow \quad \text{ggT}(b+1, n) \in \{p, q\},$$

womit die Korrektheit der Ausgabe von RSA-FACTORIZE in Zeile 10 gezeigt ist. Wir schätzen nun die Wahrscheinlichkeit ab, dass die Faktorisierung von n nicht gelingt.

Sei $v = 2^m u$, $p - 1 = 2^i u_1$ und $q - 1 = 2^j u_2$ mit u, u_1, u_2 ungerade und sei o. B. d. A. $i \leq j$. Wir nennen eine Zahl $a \in \mathbb{Z}_n^*$ *gut*, falls $a^u \not\equiv_n 1$ und $a^{2^t u} \not\equiv_n -1$ für alle $t \geq 0$ gilt. Da RSA-FACTORIZE bei Wahl jeder Zahl $a \in \{1, \dots, n-1\} \setminus \mathbb{Z}_n^*$ und jeder guten Zahl $a \in \mathbb{Z}_n^*$ einen Primfaktor von n ausgibt, ist

$$\Pr[\text{RSA-FACTORIZE}(n, v) = ?] \leq \frac{s(n)}{n-1},$$

wobei $s(n) = \|\{a \in \mathbb{Z}_n^* \mid a^u \equiv_n 1 \vee \exists t \geq 0 : a^{2^t u} \equiv_n -1\}\|$ die Anzahl aller Zahlen $a \in \mathbb{Z}_n^*$ ist, die nicht gut sind. Zudem sei $\alpha = \|\{a \in \mathbb{Z}_n^* \mid a^u \equiv_n 1\}\|$ und für $t \geq 0$ sei $\alpha_t = \|\{a \in \mathbb{Z}_n^* \mid a^{2^t u} \equiv_n -1\}\|$. Dann gilt $s(n) = \alpha + \sum_{t \geq 0} \alpha_t$.

Die folgenden Behauptungen zeigen, dass $s(n) \leq \varphi(n)/2$ ist. Da $\varphi(n) = n - p - q + 1 < n - 1$ ist, folgt $s(n)/(n-1) \leq \varphi(n)/(2(n-1)) < 1/2$, womit der Satz bewiesen ist.

Behauptung 136. $\text{ggT}(2^t u, p-1) = 2^{\min(t,i)} u_1$ und $\text{ggT}(2^t u, q-1) = 2^{\min(t,j)} u_2$.

Wegen $k = \text{kgV}(p-1, q-1) = 2^{\max(i,j)} \text{kgV}(u_1, u_2) \mid v = 2^m u$ folgt $u_1 \mid u$ und $u_2 \mid u$. Da nun u ungerade ist, folgt $\text{ggT}(2^t u, p-1) = \text{ggT}(2^t u, 2^i u_1) = 2^{\min(t,i)} u_1$ und $\text{ggT}(2^t u, q-1) = \text{ggT}(2^t u, 2^j u_2) = 2^{\min(t,j)} u_2$.

Behauptung 137. $\alpha = u_1 u_2$.

Mit dem Chinesischen Restsatz folgt nämlich

$$\alpha = \underbrace{\|\{a \in \mathbb{Z}_p^* \mid a^u \equiv_p 1\}\|}_{=: \beta} \cdot \underbrace{\|\{a \in \mathbb{Z}_q^* \mid a^u \equiv_q 1\}\|}_{=: \gamma}.$$

Sei nun g ein Erzeuger von $\mathbb{Z}_p^*$. Dann gilt

$$g^{ku} \equiv_p 1 \Leftrightarrow ku \equiv_{p-1} 0.$$

Dies zeigt $\beta = \text{ggT}(u, p-1) \stackrel{\text{Beh. 1}}{=} u_1$. Analog folgt $\gamma = u_2$.

Behauptung 138. Für $t = 0, \dots, i-1$ ist $\alpha_t = 2^{2t} u_1 u_2$ und für $t \geq i$ ist $\alpha_t = 0$.

Mit dem Chinesischen Restsatz folgt zunächst

$$\alpha_t = \underbrace{\|\{a \in \mathbb{Z}_p^* \mid a^{2^t u} \equiv_p -1\}\|}_{=: \beta_t} \cdot \underbrace{\|\{a \in \mathbb{Z}_q^* \mid a^{2^t u} \equiv_q -1\}\|}_{=: \gamma_t}.$$

Sei nun g ein Erzeuger von $\mathbb{Z}_p^*$. Dann gilt

$$g^{k2^t u} \equiv_p -1 \Leftrightarrow k2^t u \equiv_{p-1} \frac{p-1}{2}.$$

Da $\text{ggT}(2^t u, p-1) \stackrel{\text{Beh. 1}}{=} 2^t u_1$ genau dann ein Teiler von $\frac{p-1}{2} = 2^{i-1} u_1$ ist, wenn $t \leq i-1$ ist, folgt $\beta_t = 2^t u_1$ für $t = 0, \dots, i-1$ und $\beta_t = 0$ für alle $t \geq i$. Analog folgt $\gamma_t = 2^t u_2$ für $t = 0, \dots, j-1$ und $\gamma_t = 0$ für alle $t \geq j$ und damit die Behauptung. Nun folgt

$$\begin{aligned} s(n) &= u_1 u_2 + \sum_{t=0}^{i-1} 2^{2t} u_1 u_2 = u_1 u_2 (1 + \sum_{t=0}^{i-1} 2^{2t}) = u_1 u_2 (1 + \frac{2^{2i} - 1}{3}) = u_1 u_2 (2^{2i} + 2)/3 \\ &\leq u_1 u_2 (2^{i+j} + 2^{i+j-1})/3 = \varphi(n)(1 + 2^{-1})/3 = \varphi(n)/2. \end{aligned} \quad \square$$

Als nächstes gehen wir der Frage nach, wie sicher einzelne Bits der Klartextnachricht sind. Falls es möglich wäre, aus n , e , $y = x^e \bmod n$ die Parität von x in Polynomialzeit zu bestimmen, so könnte auch der gesamte Klartext x in Polynomialzeit aus n , e und y berechnet werden. Das letzte Bit des Klartextes ist also genau so sicher wie der gesamte Klartext. Einem Angreifer ist es daher nicht möglich, das letzte Bit des Klartextes zu ermitteln, außer wenn es ihm gelingt, RSA total zu brechen. Für $x, y \in \mathbb{Z}_n$ mit $y \equiv_n x^e$ sei

$$\text{klartext-parity}(y) = \text{parity}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{falls } x \text{ gerade.} \end{cases}$$

und

$$\text{klartext-half}(y) = \text{half}(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \leq x < n/2, \\ 1 & \text{falls } n/2 \leq x < n \end{cases}$$

Wegen

$$2x \bmod n = \begin{cases} 2x & \text{half}(x) = 0, \\ 2x - n & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt dann $(2x \bmod n) \equiv_2 \text{half}(x)$ und somit $\text{half}(x) = \text{parity}(2x \bmod n)$. Daher lässt sich die Berechnung von $\text{klartext-half}(y)$ auf die Berechnung von $\text{klartext-parity}(y)$ reduzieren:

$$\text{klartext-half}(y) = \text{half}(x) = \text{parity}(2x \bmod n) = \text{klartext-parity}(2^e y \bmod n).$$

Stellen wir die Zahl x/n in der Form

$$x/n = \sum_{i=1}^{\infty} b_i 2^{-i}$$

dar, so berechnet sich die Bitfolge b_i , $i = 1, 2, \dots$ wegen

$$2^{i-1}x = n(2^{i-2}b_1 + \dots + b_{i-1} + b_i/2 + b_{i+1}/4 + \dots) \equiv_n n(b_i/2 + b_{i+1}/4 + \dots)$$

zu

$$b_i = \text{half}(2^{i-1}x \bmod n) = \text{parity}(2^i x \bmod n) = \text{klartext-parity}(2^{ie} y \bmod n).$$

Setzen wir $z_i = n \sum_{j=1}^i b_j 2^{-j}$, so gilt für alle $i > \log_2 n$

$$0 \leq x - z_i = n \sum_{j=i+1}^{\infty} b_j 2^{-j} \leq n \sum_{j=i+1}^{\infty} 2^{-j} = n/2^i < 1,$$

d.h. $x = \lceil z_{\lceil \log_2 n \rceil} \rceil$. Daher lässt sich x mit Orakelfragen an klartext-parity durch folgenden Algorithmus unter Berechnung der Bits b_i für $i = 1, 2, \dots, \lceil \log_2 n \rceil$ bestimmen:

```

1   $z := 0$ 
2  for  $i := 1$  to  $\lceil \log_2 n \rceil$  do
3     $y := 2^e y \bmod n$ 
4     $b_i := \text{klartext-parity}(y)$ 
5    if  $b_i$  then  $z := z + n2^{-i}$ 
6  output  $\lceil z \rceil$ 

```

Beispiel 139. Sei $n = 1457$, $e = 779$ und $y = 722$. Angenommen, das Orakel *klartext-parity* liefert die in folgender Tabelle angegebenen Werte $b_i = \text{klartext-parity}(y_i)$ für $y_i = 2^{ie}y \bmod n$. Dann berechnet obiger Algorithmus die zugehörigen Werte $z_i = n \sum_{j=1}^i b_j 2^{-j}$ (siehe Tabelle).

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y_i	1136	847	1369	1258	1156	826	444	408	1320	71	144
b_i	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0
$n2^{-i}$	728,5	364,3	182,1	91,1	45,5	22,8	11,4	5,7	2,8	1,4	0,7
z_i	728,5	728,5	910,6	910,6	956,2	978,9	990,3	996	998,8	998,8	998,8
x_i	541	1082	707	1414	1371	1285	1113	769	81	162	324

Der gesuchte Klartext ist also $x = \lceil 998,8 \rceil = 999$. Dass dieser tatsächlich die vorgegebene Paritätsbitfolge generiert, kann anhand der den Kryptotexten y_i entsprechenden Klartexte $x_i = 2^i x \bmod n$ in der letzten Tabellenzeile überprüft werden. $\triangleleft$

7.2 Quadratische Reste

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit dem Problem, Lösungen für eine quadratische Kongruenzgleichung

$$x^2 \equiv_m a \quad (7.1)$$

zu bestimmen. Zunächst gehen wir der Frage nach, wie sich feststellen lässt, ob überhaupt Lösungen existieren.

Definition 140. Ein Element $a \in \mathbb{Z}_m^*$ heißt **quadratischer Rest modulo m** (kurz: $a \in \text{QR}_m$), falls ein $x \in \mathbb{Z}_m^*$ existiert mit $x^2 \equiv_m a$. $\text{QNR}_m := \mathbb{Z}_m^* \setminus \text{QR}_m$ ist die Menge der **quadratischen Nichtreste modulo m** .

Sei $p > 2$ eine Primzahl und $a \in \mathbb{Z}$. Dann heißt

$$\mathcal{L}(a, p) = \left(\frac{a}{p} \right) = \begin{cases} 1, & a \bmod p \in \text{QR}_p \\ -1, & a \bmod p \in \text{QNR}_p \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

das **Legendre-Symbol von a modulo p** .

Die Kongruenzgleichung (7.1) besitzt also für ein $a \in \mathbb{Z}_m^*$ genau dann eine Lösung, wenn $a \in \text{QR}_m$ ist. Da mit $a, b \in \text{QR}_m$ auch $ab \in \text{QR}_m$ ist, bildet QR_m eine Untergruppe von $\mathbb{Z}_m^*$. Wie das folgende Lemma zeigt, kann die Lösbarkeit von (7.1) für primes m effizient entschieden werden.

Lemma 141. Sei $a \in \mathbb{Z}_p^*$, $p > 2$ prim, und sei g ein beliebiger Erzeuger von $\mathbb{Z}_p^*$. Dann sind die folgenden drei Bedingungen äquivalent:

1. $a \in \text{QR}_p$.
2. $a^{(p-1)/2} \equiv_p 1$,
3. $\log_{p,g}(a)$ ist gerade,

Beweis.

1 $\Rightarrow$ 2: Sei $a \in \text{QR}_p$, d. h. $b^2 \equiv_p a$ für ein $b \in \mathbb{Z}_p^*$. Dann folgt mit dem Satz von Fermat,

$$a^{(p-1)/2} \equiv_p b^{p-1} \equiv_p 1.$$

2 $\Rightarrow$ 3: Angenommen, $a \equiv_p g^k$ für ein ungerades $k = 2 \cdot j + 1$. Dann ist

$$a^{(p-1)/2} \equiv_p \underbrace{g^{j \cdot (p-1)}}_{\equiv_p 1} g^{(p-1)/2} \equiv_p g^{(p-1)/2} \not\equiv_p 1.$$

3 $\Rightarrow$ 1: Ist $a \equiv_p g^k$ für $k = 2j$ gerade, so folgt $a \equiv_p (g^j)^2$, also $a \in \text{QR}_p$. □

Somit zerfällt $\mathbb{Z}_p$ in die drei Teilmengen QR_p , QNR_p und $\mathbb{Z}_p \setminus \mathbb{Z}_p^* = \{0\}$, wobei die ersten beiden jeweils $(p-1)/2$ Elemente enthalten. Zudem ist das Produkt ab von $a, b \in \mathbb{Z}_p^*$ genau dann in QR_p , wenn $a, b \in \text{QR}_p$ oder $a, b \in \text{QNR}_p$ sind. Als weitere Folgerung erhalten wir folgende Formel zur effizienten Berechnung des Legendre-Symbols.

Satz 142 (Eulers Kriterium). *Für alle $a \in \mathbb{Z}$ und $p > 2$ prim gilt*

$$a^{(p-1)/2} \equiv_p \left(\frac{a}{p} \right).$$

Beweis. Es ist klar, dass diese Kongruenz im Fall $a \equiv_p 0$ gilt. Nach obigem Lemma gilt dies auch im Fall $a \bmod p \in \text{QR}_p$, da dann $a^{(p-1)/2} \equiv_p 1$ ist.

Es bleibt also der Fall, dass $a \bmod p \in \text{QNR}_p$ ist. Da die Kongruenz $x^2 \equiv_p 1$ nach dem Satz von Lagrange modulo p nur die beiden Lösungen ± 1 hat und $a^{(p-1)/2}$ nach dem Satz von Fermat eine Lösung dieser Kongruenz ist, muss $a^{(p-1)/2} \equiv_p -1$ sein. Andernfalls wäre $a^{(p-1)/2} \equiv_p 1$ und somit $a \bmod p \in \text{QR}_p$ (d. h. $a \bmod p \notin \text{QNR}_p$). □

Korollar 143. *Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ und $p > 2$ prim gilt*

1. $\left(\frac{-1}{p} \right) = (-1)^{(p-1)/2} = \begin{cases} 1, & p \equiv_4 1, \\ -1, & p \equiv_4 3, \end{cases}$
2. $\left(\frac{ab}{p} \right) = \left(\frac{a}{p} \right) \cdot \left(\frac{b}{p} \right).$

Als weiteres Korollar aus Eulers Kriterium erhalten wir eine Methode, quadratische Kongruenzgleichungen im Fall $p \equiv_4 3$ effizient zu lösen. Im Fall $p \equiv_4 1$ ist dagegen kein effizienter deterministischer Lösungsalgorithmus bekannt. Allerdings gibt es hierfür einen effizienten probabilistischen Algorithmus von Adleman, Manders und Miller (1977).

Korollar 144. *Sei $p > 2$ prim, dann besitzt die quadratische Kongruenzgleichung $x^2 \equiv_p a$ für jedes $a \in \text{QR}_p$ genau zwei Lösungen. Im Fall $p \equiv_4 3$ sind dies $\pm a^k \bmod p$ (für $k = (p+1)/4$), wovon nur $a^k \bmod p$ ein quadratischer Rest ist.*

Beweis. Sei $a \in \text{QR}_p$, d. h. es existiert ein $b \in \mathbb{Z}_p^*$ mit $b^2 \equiv_p a$. Mit b ist auch $-b$ eine Lösung von $x^2 \equiv_p a$, die von b verschieden ist (p ist ungerade). Nach Lagrange existieren keine weitere Lösungen.

Sei nun $p \equiv_4 3$. Dann gilt

$$\left(\frac{-b}{p} \right) = \left(\frac{-1}{p} \right) \cdot \left(\frac{b}{p} \right) = - \left(\frac{b}{p} \right)$$

nach Korollar 143. Demnach ist genau eine der beiden Lösungen $\pm b$ ein quadratischer Rest. Schließlich liefert Eulers Kriterium die Kongruenz $a^{(p-1)/2} \equiv_p 1$. Daher folgt für $k = (p+1)/4$ die Kongruenz

$$(a^k)^2 = a^{(p+1)/2} = a^{(p-1)/2} \cdot a \equiv_p a.$$

Da mit a auch $a^k \bmod p$ ein quadratischer Rest ist, ist $-a^k \bmod p$ ein quadratischer Nichtrest. $\square$

7.3 Das Rabin-System

Wie das RSA-Verfahren beruht das Rabin-System darauf, dass es zwar effiziente Algorithmen für das Testen der Primzahleigenschaft gibt, effiziente Faktorisierungsalgorithmen aber nicht bekannt sind. Im Gegensatz zum RSA-Verfahren, von dem nicht bekannt ist, dass es mindestens so schwer zu brechen ist wie das Faktorisierungsproblem, ist genau dies beim Rabin-System der Fall. Die Sicherheit des Rabin-Systems ist also äquivalent zur Schwierigkeit des Faktorisierungsproblems. Es verwendet als Falltürfunktion eine quadratische Polynomfunktion modulo dem Produkt $n = pq$ zweier großer Primzahlen. Jeder Teilnehmer wählt ein Paar p, q von Primzahlen mit der Eigenschaft $p \equiv_4 3$ und eine Zahl $e \in \{0, \dots, n-1\}$. Die Zahlen n und e werden öffentlich bekannt gegeben, die Faktorisierung von n wird jedoch geheimgehalten.

Öffentlicher Schlüssel: e, n

Geheimer Schlüssel: p, q .

Der Klartextraum ist $M = \mathbb{Z}_n = \{0, \dots, n-1\}$ und die Verschlüsselungsfunktion ist

$$E((e, n), x) = x(x+e) \bmod n = y.$$

Zur Entschlüsselung eines Kryptotextes $y \in \{0, \dots, n-1\}$ muss der legale Empfänger B die quadratische Kongruenzgleichung $x(x+e) \equiv_n y$ lösen, die äquivalent zu der Kongruenz

$$\underbrace{(x + 2^{-1}e)^2}_{x'} \equiv_n y + (2^{-1}e)^2,$$

(quadratische Ergänzung) ist, wobei $2^{-1} = (n+1)/2$ das multiplikative Inverse zu 2 modulo n ist.

Setzen wir also $x' = x + 2^{-1}e$ und $y' = y + (2^{-1}e)^2$, so genügt es, alle Lösungen x'_i der Kongruenz $(x')^2 \equiv y'$ zu bestimmen, und daraus die zugehörigen Klartext-Kandidaten $x_i = x'_i - 2^{-1}e \bmod n$ zu berechnen. Falls $y' \equiv_n 0$ ist, gibt es nur eine Lösung $x' = 0$. Ist dagegen $\text{ggT}(y', n) \in \{p, q\}$, so gibt es zwei Lösungen (dieser Fall ist glücklicherweise sehr unwahrscheinlich, da er dem Gegner die Faktorisierung von n ermöglicht). Im verbliebenen Fall $y' \in \mathbb{Z}_n^*$ gibt es vier Lösungen und der folgende Satz zeigt, wie sich diese bei Kenntnis von p und q effizient bestimmen lassen.

Satz 145. Sei $n = pq$ für Primzahlen p, q mit $p \equiv_4 3$ und $q \equiv_4 3$. Dann besitzt die quadratische Kongruenz $x^2 \equiv_n a$ für jedes $a \in \text{QR}_n$ genau vier Lösungen, wovon genau eine ein quadratischer Rest ist.

Beweis. Mit $x^2 \equiv_n a$ besitzen wegen $n = pq$ auch die beiden quadratischen Kongruenzen $x^2 \equiv_p a$ und $x^2 \equiv_q a$ Lösungen, und zwar jeweils genau zwei (siehe Korollar 144):

$y_1 = a^{(p+1)/4} \bmod p \in \mathbf{QR}_p$, $y_2 = -a^{(p+1)/4} \bmod p \in \mathbf{QNR}_p$, $z_1 = a^{(q+1)/4} \bmod q \in \mathbf{QR}_q$ und $z_2 = -a^{(q+1)/4} \bmod q \in \mathbf{QNR}_q$. Mit dem Chinesischen Restsatz können wir vier verschiedene Lösungen $x_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq 2$ mit

$$\begin{aligned} x &\equiv_p y_i \\ x &\equiv_q z_j \end{aligned}$$

bestimmen. Es können aber auch nicht mehr als diese vier Lösungen existieren, da sich daraus für mindestens eine der beiden Kongruenzen $x^2 \equiv_p a$ und $x^2 \equiv_q a$ mehr als zwei Lösungen ableiten ließen.

Wegen

$$\begin{aligned} x \in \mathbf{QR}_n &\Rightarrow \exists u : u^2 \equiv_n x \\ &\Rightarrow \exists u : u^2 \equiv_p x \equiv_q u^2 \\ &\Rightarrow x \bmod p \in \mathbf{QR}_p \wedge x \bmod q \in \mathbf{QR}_q \end{aligned}$$

können $x_{1,2}, x_{2,1}, x_{2,2}$ keine quadratischen Reste modulo n sein.

Weiterhin gibt es Zahlen $l \in \mathbb{Z}_p^*$, $k \in \mathbb{Z}_q^*$ mit $l^2 \equiv_p y_1$ und $k^2 \equiv_q z_1$. Sei $m \in \mathbb{Z}_n^*$ eine Lösung für das System

$$\begin{aligned} x &\equiv_p l \\ x &\equiv_q k \end{aligned}$$

Dann folgt

$$x_{1,1} \equiv_p y_1 \equiv_p l^2 \equiv_p m^2 \quad \text{und} \quad x_{1,1} \equiv_q z_1 \equiv_q k^2 \equiv_q m^2$$

und daher $x_{1,1} \equiv_n m^2$. Also ist $x_{1,1}$ ein quadratischer Rest modulo n . □

Als weitere zahlentheoretische Funktion mit für die Kryptografie wichtigen Eigenschaften erhalten wir somit die Quadratfunktion $x^2 : \mathbf{QR}_n \rightarrow \mathbf{QR}_n$, die nach vorigem Satz bijektiv ist (falls $n = pq$ für Primzahlen p, q mit $p \equiv_4 1$ und $q \equiv_4 3$). Ihre Umkehrfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$ heißt **diskrete Wurzelfunktion**, und kann (nur) bei Kenntnis der Primfaktoren p und q von n effizient berechnet werden. Wir werden später sehen, dass die Berechnung dieser Funktion äquivalent zur Faktorisierung von n ist. Es ist nicht einmal ein effizientes Verfahren bekannt, mit dem man ohne Kenntnis der Faktorisierung von n für ein gegebenes $a \in \mathbb{Z}_n^*$ entscheiden kann, ob $a \in \mathbf{QR}_n$ ist oder nicht. Aus diesem Grund können wir die Rabin-Verschlüsselung nicht einfach injektiv machen, indem wir den Klartextraum auf $\mathbf{QR}_n$ einschränken.

Beispiel 146. Wählen wir $p = 7$, $q = 11$ und $e = 2$, so ergeben sich

Öffentlicher Schlüssel: $e = 2$, $n = 77$

Geheimer Schlüssel: $p = 7$, $q = 11$.

Um den Klartext $x = 12$ zu verschlüsseln, wird der Kryptotext

$$y = E(12; 2, 77) = 12(12 + 2) \bmod 77 = 14$$

erzeugt. Da $2^{-1}e = 2^{-1} \cdot 2 = 1$ ist, kann dieser durch Lösen der quadratischen Kongruenz

$$(x + 1)^2 \equiv_{77} y + 1 = 15,$$

entschlüsselt werden. Hierzu löst der legale Empfänger zunächst die beiden Kongruenzen

$$y^2 \equiv_7 15 \equiv 1 \quad \text{und} \quad z^2 \equiv_{11} 15 \equiv 4$$

zu $y_{1,2} = \pm 15^2 \bmod 7 = \pm 1$ (wegen $\frac{p+1}{4} = 2$) und $z_{1,2} = \pm 4^3 \bmod 11 = \pm 2$ (wegen $\frac{q+1}{4} = 3$). Mit dem Chinesischen Restsatz lassen sich $y_{1,2}$ und $z_{1,2}$ zu den vier Lösungen $x'_{i,j} = 57, 64, 13$ und 20 zusammensetzen, die auf die vier Klartextkandidaten $12, 19, 56$ und 63 führen.

Durch Reduktion von $M = \mathbb{Z}_{77}$ auf $M' = \{x \in \mathbb{Z}_{77} \mid x + 1 \bmod n \leq 38\} = \{0, 1, \dots, 37, 76\}$ entfallen die beiden Kandidaten 56 und 63 . $\triangleleft$

Es ist klar, dass das System gebrochen ist, sobald n in seine Primfaktoren p, q zerlegt werden kann. Wie wir gleich sehen werden, sind für Zahlen n von dieser Bauart das Faktorisierungsproblem und das Problem, eine Lösung der quadratischen Kongruenz $x^2 \equiv_n a$ für ein gegebenes $a \in \mathbb{QR}_n$ zu finden, äquivalent. Kann also das Rabin-System gebrochen werden, so muss ein effizienter Algorithmus A existieren, der bei Eingabe (a, n) , $a \bmod n \in \mathbb{QR}_n$, eine Zahl $c = A(a, n)$ mit $c^2 \equiv_n a$ berechnet. Dabei können wir o.B.d.A. annehmen, dass $c \leq (n-1)/2$ ist. Unter Verwendung von A lässt sich folgender effizienter probabilistischer Algorithmus RABIN-FACTORIZE angeben, der n faktorisiert.

RABIN-FACTORIZE(n)

```

1  repeat forever
2    guess randomly  $b \in \{1, \dots, \frac{n-1}{2}\}$ 
3    if  $\text{ggT}(b, n) > 1$  then
4      return  $(\text{ggT}(b, n))$ 
5     $c := A(b^2 \bmod n, n)$ 
6    if  $c \not\equiv_n \pm b$  then
7      return  $(\text{ggT}(b + c, n))$ 

```

Satz 147. Falls RABIN-FACTORIZE(n) hält, gibt er einen Primfaktor von $n = pq$, p, q prim, aus. Die Wahrscheinlichkeit, dass hierfür mehr als t Schleifendurchläufe benötigt werden, ist kleiner als 2^{-t} .

Beweis. Es ist klar, dass $\text{ggT}(b, n)$ im Fall $\text{ggT}(b, n) > 1$ ein Primfaktor von n ist. Lemma 133 zeigt, dass dies im Fall $c \not\equiv_n \pm b$ auch für $\text{ggT}(b + c, n)$ gilt.

Sei nun X die ZV, die die Wahl von b in der Menge $U = \{1, \dots, \frac{n-1}{2}\}$ beschreibt, und sei p die Wahrscheinlichkeit, dass der Algorithmus in einem Schleifendurchlauf einen Primfaktor findet. Für $b \in U \cap \mathbb{Z}_n^*$ sei b' die in $U - \{b\}$ eindeutig bestimmte Lösung x von $x^2 \equiv_n b^2$. Dann gilt

$$p = \underbrace{\Pr[\text{ggT}(X, n) > 1]}_{\Pr[X \notin \mathbb{Z}_n^*] =: \alpha} + \underbrace{\Pr[X \in \mathbb{Z}_n^* \text{ und } X \not\equiv_n \pm A(X^2, n)]}_{\beta}.$$

mit

$$\begin{aligned}
\beta &= \sum_{b \in U \cap \mathbb{Z}_n^*} \Pr[X = b \wedge A(X^2, n) = b'] \\
&= \sum_{b \in U \cap \mathbb{Z}_n^*} \Pr[A(X^2, n) = b'] \underbrace{\Pr[X = b \mid A(X^2, n) = b']}_{1/2} \\
&= \Pr[A(X^2, n) \in U \cap \mathbb{Z}_n^*] / 2 = \Pr[X \in \mathbb{Z}_n^*] / 2 = (1 - \alpha) / 2.
\end{aligned}$$

Somit ist $p = \alpha + \beta = (\alpha + 1) / 2 > 1/2$, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass RABIN-FACTORIZE mehr als t Schleifendurchläufe ausführt, ist $(1 - p)^t < 2^{-t}$. $\square$

7.4 Das ElGamal-Kryptosystem

Das System von ElGamal (1985) ist ein probabilistisches Public-key Verfahren auf der Basis des diskreten Logarithmus.

Sei p eine große Primzahl und α ein Erzeuger von $\mathbb{Z}_p^*$ (p und α sind öffentlich). Jeder Teilnehmer B erhält als geheimen Schlüssel eine Zahl $a \in \mathbb{Z}_{p-1} = \{0, \dots, p-2\}$ und gibt $\beta = \alpha^a \bmod p$ öffentlich bekannt:

Öffentlicher Schlüssel: (p, α, β) ,

Geheimer Schlüssel: a .

Will A nun eine Nachricht $x \in \mathbb{Z}_p^* = \{1, \dots, p-1\}$ an B senden, so

- wählt A zufällig eine Zahl $z \in \mathbb{Z}_{p-1}$,
- berechnet den „Schlüssel“ $k = \beta^z \bmod p$ und
- sendet den Kryptotext $E((p, \alpha, \beta), x) = (y_1, y_2)$ an B , wobei

$$y_1 = \alpha^z \bmod p \quad \text{und} \quad y_2 = kx \bmod p$$

ist.

Der Kryptotext wird also auf die doppelte Länge des Klartextes aufgebläht. Nachdem B das Kryptotextpaar (y_1, y_2) empfangen hat,

- berechnet B zunächst $k = y_1^a \bmod p$ (es gilt $y_1^a \equiv_p \alpha^{za} \equiv_p \beta^z \equiv_p k$),
- und damit den Klartext $x = y_2 k^{-1} \bmod p$.

Beispiel 148. Wir wählen $p = 2579$ und $\alpha = 2$. B wählt einen geheimen Schlüssel $a = 765$ aus der Menge $\{0, \dots, 2577\}$ und gibt die Zahl $\beta = \alpha^a \bmod p = 2^{765} \bmod 2579 = 949$ bekannt. Um den Klartext $x = 1299$ an B zu übermitteln, berechnet A den zugehörigen Kryptotext (y_1, y_2) wie folgt.

- A wählt zufällig eine Zahl z aus der Menge $\{0, \dots, 2577\}$ (z. B. $z = 853$),
- berechnet $k = 949^{853} \bmod 2579 = 2424$ und
- sendet das Kryptotextpaar $(2^{853} \bmod 2579, 1299 \cdot 2424 \bmod 2579) = (435, 2396)$.

Nachdem B den Kryptotext $y = (435, 2396)$ empfangen hat, berechnet er $k = 435^{765} \bmod 2579 = 2424$ und daraus den Klartext $x = 2396 \cdot 2424^{-1} \bmod 2579 = 1299$. $\triangleleft$

Es ist klar, dass das ElGamal-System gebrochen ist, sobald es dem Gegner gelingt, den privaten Schlüssel $a = \log_{p,\alpha}(\beta)$ zu berechnen. Eine notwendige Bedingung für die Sicherheit von ElGamal ist daher, dass der diskrete Logarithmus in $\mathbb{Z}_p^*$ sehr schwer zu berechnen ist. Hierfür sollte p mindestens eine 300-stellige Dezimalzahl sein. Wie der Satz von Pohlig und Hellman im nächsten Abschnitt zeigt, ist es für die Sicherheit des Systems weiterhin notwendig, dass $p-1$ mindestens einen großen Primfaktor enthält.

Im Folgenden betrachten wir verschiedene Sicherheitsaspekte des ElGamal-Systems.

Zunächst untersuchen wir die Komplexitätstheoretische Sicherheit des ElGamal-Systems. Da wir mit Eulers Kriterium leicht die Parität von a aus $\beta = \alpha^a \bmod p$ und die Parität von z aus $y_1 = \alpha^z \bmod p$ ableiten können, lässt sich leicht ermitteln, ob $k = \beta^z$ in QR_p ist oder nicht. Da zudem $y_2 = kx \bmod p$ genau dann in QR_p ist, wenn entweder $k, x \in \text{QR}_p$ oder $k, x \in \text{QNR}_p$ sind, lässt sich auch leicht ermitteln, ob x in QR_p ist oder nicht. Ersteres trifft nämlich genau dann zu, wenn y_2 und k beide in QR_p oder beide in QNR_p sind.

Daraus ergibt sich unmittelbar, dass ein Gegner $G = (X, V)$ einen Vorteil von $\alpha(G) = 1/2$ erzielen kann, indem X Klartexte $x_0 \in \text{QR}_p$ und $x_1 \notin \text{QR}_p$ generiert, und V anhand des Kryptotextes $(y_1, y_2) = E((p, \alpha, \beta), x_b)$ das Bit b ermittelt. Um diese Schwachstelle zu beheben, genügt es, von der Gruppe $\mathbb{Z}_p^*$ zur zyklischen Untergruppe $\text{QR}_p = [\alpha^2]$ überzugehen. Wählen wir zudem p von der Form $p = 2q + 1$ mit p, q prim, so hat QR_p die Ordnung q , d.h. jedes Element $\alpha \in \text{QR}_p \setminus \{1\}$ ist ein Erzeuger von QR_p . In diesem Fall ist wegen $p \equiv_4 3$ für jedes $x \in \mathbb{Z}_p^*$ genau eine der beiden Zahlen $x, p - x$ in QR_p . Dies liefert eine einfach zu berechnende Bijektion zwischen QR_p und $\mathbb{Z}_q$, weshalb wir auch $\mathbb{Z}_q$ anstelle von QR_p als Klartextraum deklarieren können.