

# Einführung in die Theoretische Informatik

Johannes Köbler



Institut für Informatik  
Humboldt-Universität zu Berlin

WS 2016/17

## Definition

- Eine NTM  $M$  **hält** bei Eingabe  $x$  (kurz:  $M(x) = \downarrow$  oder  $M(x) \downarrow$ ), falls alle Rechnungen von  $M(x)$  eine endliche Länge haben.
- Falls  $M(x)$  nicht hält, schreiben wir auch kurz  $M(x) = \uparrow$  oder  $M(x) \uparrow$ .
- Eine NTM  $M$  **entscheidet** eine Eingabe  $x$ , falls  $M(x)$  hält oder eine Konfiguration mit einem Endzustand erreichen kann.
- Eine Sprache  $L \subseteq \Sigma^*$  heißt **entscheidbar**, falls eine DTM  $M$  mit  $L(M) = L$  existiert, die jede Eingabe  $x \in \Sigma^*$  entscheidet.
- Jede von einer DTM  $M$  erkannte Sprache heißt **semi-entscheidbar**.

## Bemerkung

- Die von  $M$  akzeptierte Sprache  $L(M)$  heißt semi-entscheidbar, da  $M$  zwar alle Eingaben  $x \in L$  entscheidet (aber eventuell nicht alle  $x \in \bar{L}$ ).
- Später werden wir sehen, dass genau die Typ-0 Sprachen semi-entscheidbar sind.

## Definition

- Eine  $k$ -DTM  $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$  **berechnet** eine Funktion  $f : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ , falls  $M$  bei jeder Eingabe  $x \in \Sigma^*$  in einer Konfiguration

$$K = (q, u_1, a_1, v_1, \dots, u_k, a_k, v_k) \text{ mit } u_k = f(x)$$

hält (d.h.  $K_x \vdash^* K$  und  $K$  hat keine Folgekonfiguration).

- Hierfür sagen wir auch,  $M$  gibt bei Eingabe  $x$  das Wort  $f(x)$  aus und schreiben  $M(x) = f(x)$ .
- $f$  heißt **Turing-berechenbar** (oder einfach **berechenbar**), falls es eine  $k$ -DTM  $M$  mit  $M(x) = f(x)$  für alle  $x \in \Sigma^*$  gibt.
- Aus historischen Gründen werden berechenbare Funktionen auch **rekursiv** (engl. *recursive*) genannt.

## Definition

- Eine **partielle Funktion** hat die Form  $f : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^* \cup \{\uparrow\}$ .
- Für  $f(x) = \uparrow$  sagen wir auch  $f(x)$  ist **undefiniert**.
- Der **Definitionsbereich** (engl. *domain*) von  $f$  ist

$$\text{dom}(f) = \{x \in \Sigma^* \mid f(x) \neq \uparrow\}.$$

- Das **Bild** (engl. *image*) von  $f$  ist

$$\text{img}(f) = \{f(x) \mid x \in \text{dom}(f)\}.$$

- $f$  heißt **total**, falls  $\text{dom}(f) = \Sigma^*$  ist.
- Eine  $k$ -DTM  $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$  **berechnet**  $f$ , falls  $M(x)$  für alle  $x \in \text{dom}(f)$  das Wort  $f(x)$  ausgibt und für alle  $x \notin \text{dom}(f)$  keine Ausgabe berechnet (d.h.  $M(x) = \uparrow$ ).

Wir fassen die entscheidbaren Sprachen und die (partiellen) berechenbaren Funktionen in folgenden Klassen zusammen:

$REC = \{L(M) \mid M \text{ ist eine DTM, die jede Eingabe entscheidet}\},$

$FREC = \{f \mid f \text{ ist eine berechenbare (totale) Funktion}\},$

$FREC_p = \{f \mid f \text{ ist eine berechenbare partielle Funktion}\}.$

Dann gilt:

- $FREC \not\subseteq FREC_p$  und
- $REG \not\subseteq DCFL \not\subseteq CFL \not\subseteq DCSL \subseteq CSL \not\subseteq REC \not\subseteq RE.$

Dass CSL echt in REC enthalten ist, wird in den Übungen gezeigt. Beispiele für interessante semi-entscheidbare Sprachen, die nicht entscheidbar sind, werden wir in der Vorlesung kennenlernen.

## Berechenbarkeit von partiellen Funktionen

## Beispiel

- Bezeichne  $x^+$  den **lexikografischen Nachfolger** von  $x \in \Sigma^*$ .
- Für  $\Sigma = \{0, 1\}$  ergeben sich beispielsweise folgende Werte:

$x$	$\varepsilon$	0	1	00	01	10	11	000	...
$x^+$	0	1	00	01	10	11	000	001	...

- Betrachte die auf  $\Sigma^*$  definierten partiellen Funktionen  $f_1, f_2, f_3, f_4$  mit

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= 0, \\
 f_2(x) &= x, \\
 f_3(x) &= x^+
 \end{aligned}
 \quad \text{und} \quad
 f_4(x) = \begin{cases} \uparrow, & x = \varepsilon, \\ y, & x = y^+. \end{cases}$$

- Da  $f_1, f_2, f_3, f_4$  berechenbar sind, gehören die totalen Funktionen  $f_1, f_2, f_3$  zu  $\text{FREC}$  und die partielle Funktion  $f_4$  zu  $\text{FREC}_p$ .
- Da  $f_4$  keine totale Funktion ist, gehört  $f_4$  nicht zu  $\text{FREC}$ . ◀

## Definition

Für eine Sprache  $A \subseteq \Sigma^*$  sind die **charakteristische Funktion**  $\chi_A$  und die **partielle charakteristische Funktion**  $\hat{\chi}_A$  wie folgt definiert:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \quad \text{und} \quad \hat{\chi}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ \uparrow, & x \notin A \end{cases}$$

## Satz

- Eine Sprache  $A \subseteq \Sigma^*$  ist genau dann entscheidbar, wenn ihre charakteristische Funktion  $\chi_A$  berechenbar ist (siehe Übungen).
- Eine Sprache  $A \subseteq \Sigma^*$  ist genau dann semi-entscheidbar, falls ihre partielle charakteristische Funktion  $\hat{\chi}_A$  berechenbar ist.

## Satz

Folgende Eigenschaften sind äquivalent:

- 1  $A$  ist semi-entscheidbar (d.h.  $A$  wird von einer DTM akzeptiert),
- 2  $\hat{\chi}_A$  ist berechenbar,
- 3  $A$  ist Definitionsbereich einer berechenbaren partiellen Funktion  $f$ .

## Beweis

- 1  $\Rightarrow$  2 Sei  $M$  eine DTM mit  $L(M) = A$ . Dann lässt sich  $M$  so modifizieren, dass sie eine 1 ausgibt (und hält), sobald sie einen Endzustand erreicht, und in eine Endlosschleife geht, sobald sie eine Konfiguration ohne Folgekonfiguration erreicht.
- 2  $\Rightarrow$  3 Der Definitionsbereich von  $\hat{\chi}_A$  ist die Sprache  $A$ . Folglich hat die partielle Funktion  $f = \hat{\chi}_A$  die gewünschte Eigenschaft.
- 3  $\Rightarrow$  1 Sei  $M$  eine DTM, die eine partielle Funktion  $f$  mit  $dom(f) = A$  berechnet. Dann lässt sich  $M$  so modifizieren, dass sie genau dann in einen Endzustand übergeht, wenn  $M$  eine Konfiguration ohne Folgekonfiguration erreicht. □

## Definition

Eine Sprache  $A \subseteq \Sigma^*$  heißt **rekursiv aufzählbar**, falls  $A = \emptyset$  oder das Bild  $\text{img}(f)$  einer berechenbaren Funktion  $f : \Gamma^* \rightarrow \Sigma^*$  ist.

## Satz

Folgende Eigenschaften sind äquivalent:

- 1 A ist semi-entscheidbar (d.h. A wird von einer DTM akzeptiert),
- 2 A wird von einer 1-DTM akzeptiert,
- 3 A ist vom Typ 0,
- 4 A wird von einer NTM akzeptiert,
- 5 A ist rekursiv aufzählbar.

## Beweis

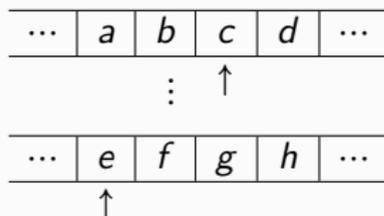
Die Implikationen 2  $\Rightarrow$  3  $\Rightarrow$  4 werden in den Übungen gezeigt.

Hier zeigen wir 1  $\Rightarrow$  2 und 4  $\Rightarrow$  5  $\Rightarrow$  1.

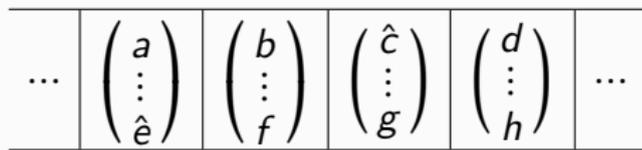
Simulation einer  $k$ -DTM durch eine 1-DTM

Beweis von ①  $\Rightarrow$  ②:  $\{L(M) \mid M \text{ ist eine DTM}\} \subseteq \{L(M) \mid M \text{ ist eine 1-DTM}\}$

- Sei  $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$  eine  $k$ -DTM mit  $L(M) = A$ .
- Wir konstruieren eine 1-DTM  $M' = (Z', \Sigma, \Gamma', \delta', z_0, E)$  für  $A$ .
- $M'$  simuliert  $M$ , indem sie jede Konfiguration  $K$  von  $M$  der Form



durch eine Konfiguration  $K'$  folgender Form nachbildet:



Simulation einer  $k$ -DTM durch eine 1-DTM

Beweis von ①  $\Rightarrow$  ②:  $\{L(M) \mid M \text{ ist eine DTM}\} \subseteq \{L(M) \mid M \text{ ist eine 1-DTM}\}$

- Das heißt,  $M'$  arbeitet mit dem Alphabet

$$\Gamma' = \Gamma \cup (\Gamma \cup \{\hat{a} \mid a \in \Gamma\})^k$$

- und erzeugt bei Eingabe  $x = x_1 \dots x_n \in \Sigma^*$  zuerst die der Startkonfiguration

$$K_x = (q_0, \varepsilon, x_1, x_2 \dots x_n, \varepsilon, \sqcup, \varepsilon, \dots, \varepsilon, \sqcup, \varepsilon)$$

von  $M$  bei Eingabe  $x$  entsprechende Konfiguration

$$K'_x = q'_0 \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{\sqcup} \\ \vdots \\ \hat{\sqcup} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ \sqcup \\ \vdots \\ \sqcup \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} x_n \\ \sqcup \\ \vdots \\ \sqcup \end{pmatrix}.$$

Beweis von ①  $\Rightarrow$  ②:  $\{L(M) \mid M \text{ ist eine DTM}\} \subseteq \{L(M) \mid M \text{ ist eine 1-DTM}\}$

- Dann simuliert  $M'$  jeweils einen Schritt von  $M$  durch folgende Sequenz von Rechenschritten:
  - Zuerst geht  $M'$  solange nach rechts, bis sie alle mit  $\wedge$  markierten Zeichen (z.B.  $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_k$ ) gefunden hat.
  - Diese Zeichen speichert  $M'$  in ihrem Zustand.
  - Anschließend geht  $M'$  wieder nach links und realisiert dabei die durch  $\delta(q, a_1, \dots, a_k)$  vorgegebene Anweisung von  $M$ .
  - Dabei speichert  $M'$  den aktuellen Zustand  $q$  von  $M$  ebenfalls in ihrem Zustand.
- Sobald  $M$  in einen Endzustand übergeht, wechselt  $M'$  ebenfalls in einen Endzustand und hält.
- Somit gilt  $L(M') = L(M)$ . □

Beweis von ④  $\Rightarrow$  ⑤:  $\{L(M) \mid M \text{ ist eine NTM}\} \subseteq \{L \mid L \text{ ist rek. aufzählbar}\}$

- Sei  $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$  eine  $k$ -NTM und sei  $A = L(M) \neq \emptyset$ .
- Sei  $\tilde{\Gamma}$  das Alphabet  $Z \cup \Gamma \cup \{\#\}$ .
- Wir kodieren eine Konfiguration  $K = (q, u_1, a_1, v_1, \dots, u_k, a_k, v_k)$  durch das Wort

$$\text{code}(K) = \#q\#u_1\#a_1\#v_1\#\dots\#u_k\#a_k\#v_k\#$$

und eine Rechnung  $K_0 \vdash \dots \vdash K_t$  durch  $\text{code}(K_0) \dots \text{code}(K_t)$ .

- Dann lassen sich die Wörter von  $A$  durch folgende Funktion  $f : \tilde{\Gamma}^* \rightarrow \Sigma^*$  aufzählen (dabei ist  $x_0$  ein beliebiges Wort in  $A$ ):

$$f(x) = \begin{cases} y, & x \text{ kodiert eine akz. Rechnung } K_0 \vdash \dots \vdash K_t \text{ von} \\ & M(y), \text{ d.h. } K_0 = K_y \text{ und } K_t \in E \times (\Gamma^* \times \Gamma \times \Gamma^*)^k \\ x_0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Da  $f$  berechenbar ist, ist  $A = \text{img}(f)$  rekursiv aufzählbar. □

Beweis von ⑤  $\Rightarrow$  ①:  $\{L \mid L \text{ ist rek. aufzählbar}\} \subseteq \{L(M) \mid M \text{ ist eine DTM}\}$

- Sei  $f : \Gamma^* \rightarrow \Sigma^*$  eine Funktion mit  $A = \text{img}(f)$  und sei  $M$  eine  $k$ -DTM, die  $f$  berechnet.
- Betrachte folgende  $(k + 1)$ -DTM  $M'$ , die bei Eingabe  $x$ 
  - auf dem 2. Band der Reihe nach alle Wörter  $y$  in  $\Gamma^*$  erzeugt,
  - für jedes  $y$  den Wert  $f(y)$  durch Simulation von  $M(y)$  berechnet,
  - und ihre Eingabe  $x$  akzeptiert, sobald  $f(y) = x$  ist. □

## Satz

Folgende Eigenschaften sind äquivalent:

- 1  $A$  ist entscheidbar (d.h.  $A$  wird von einer DTM akzeptiert, die alle Eingaben entscheidet),
- 2 die charakteristische Funktion  $\chi_A$  von  $A$  ist berechenbar,
- 3  $A$  wird von einer 1-DTM akzeptiert, die bei allen Eingaben hält,
- 4  $A$  wird von einer NTM akzeptiert, die bei allen Eingaben hält,
- 5  $A$  und  $\bar{A}$  sind vom Typ 0.

## Beweis

Die Äquivalenz der Bedingungen 1 bis 4 wird in den Übungen gezeigt. Hier zeigen wir nur die Äquivalenz dieser vier Bedingungen zu 5.

## Satz

$A$  ist genau dann entscheidbar, wenn  $A$  und  $\bar{A}$  semi-entscheidbar sind, d.h.  $\text{REC} = \text{RE} \cap \text{co-RE}$ .

## Beweis.

- Falls  $A$  entscheidbar ist, ist mit  $\chi_A$  auch  $\chi_{\bar{A}}$  berechenbar, d.h.  $A$  und  $\bar{A}$  sind entscheidbar und damit auch semi-entscheidbar.
- Für die Rückrichtung seien  $f_1, f_2 : \Gamma^* \rightarrow \Sigma^*$  Turing-berechenbare Funktionen mit  $\text{img}(f_1) = A$  und  $\text{img}(f_2) = \bar{A}$ .
- Wir betrachten folgende DTM  $M$ , die bei Eingabe  $x$  für jedes  $y \in \Gamma^*$  die beiden Werte  $f_1(y)$  und  $f_2(y)$  bestimmt und im Fall
  - $f_1(y) = x$  in einem Endzustand hält,
  - $f_2(y) = x$  in einem Nichtendzustand hält.
- Da jede Eingabe  $x$  entweder in  $\text{img}(f_1) = A$  oder in  $\text{img}(f_2) = \bar{A}$  enthalten ist, hält  $M$  bei allen Eingaben, d.h.  $M$  entscheidet  $A$ . □

# Kodierung (Gödelisierung) von Turingmaschinen

- Um Eigenschaften von TMs algorithmisch untersuchen zu können, müssen wir TMs als Teil der Eingabe kodieren.
- Sei  $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$  eine 1-DTM mit
  - Zustandsmenge  $Z = \{q_0, \dots, q_m\}$  (o.B.d.A. sei  $E = \{q_m\}$ ),
  - Eingabealphabet  $\Sigma = \{0, 1, \#\}$  und
  - Arbeitsalphabet  $\Gamma = \{a_0, \dots, a_l\}$ , wobei wir o.B.d.A.  $a_0 = \sqcup$ ,  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 1$  und  $a_3 = \#$  annehmen.
- Dann können wir eine Anweisung  $q_i a_j \rightarrow q_{i'} a_{j'} D$  durch das Wort

$$\#bin(i)\#bin(j)\#bin(i')\#bin(j')\#b_D\#$$

kodieren. Dabei ist  $bin(n)$  die Binärdarstellung von  $n$  und

$$b_D = \begin{cases} 0, & D = N, \\ 1, & D = L, \\ 10, & D = R. \end{cases}$$

## Kodierung von Turingmaschinen

- $M$  lässt sich nun als ein Wort über dem Alphabet  $\{0, 1, \#\}$  kodieren, indem wir die Anweisungen von  $M$  in kodierter Form auflisten.
- Kodieren wir die Zeichen  $0, 1, \#$  binär (z.B.  $0 \mapsto 00$ ,  $1 \mapsto 11$ ,  $\# \mapsto 10$ ), so gelangen wir zu einer Binärkodierung  $w_M$  von  $M$ .
- Die durch  $w_M$  repräsentierte natürliche Zahl  $(w_M)_2$  wird auch die **Gödel-Nummer** von  $M$  genannt.
- $M_w$  ist durch Angabe von  $w$  bis auf die Benennung ihrer Zustände und Arbeitszeichen eindeutig bestimmt.
- Ganz analog lassen sich auch  $k$ -DTMs mit  $k > 1$  (sowie NTMs, Konfigurationen oder Rechnungen von TMs) binär kodieren.
- Umgekehrt können wir jedem Binärstring  $w \in \{0, 1\}^*$  eine DTM  $M_w$  wie folgt zuordnen:

$$M_w = \begin{cases} M, & \text{falls eine DTM } M \text{ mit } w_M = w \text{ existiert,} \\ M_0, & \text{sonst (dabei sei } M_0 \text{ eine beliebige DTM).} \end{cases}$$

## Unentscheidbarkeit des Halteproblems

## Definition

- Das **Halteproblem** ist die Sprache

$$H = \left\{ w \# x \mid \begin{array}{l} w, x \in \{0, 1\}^* \text{ und} \\ \text{die DTM } M_w \text{ h\"alt} \\ \text{bei Eingabe } x \end{array} \right\}$$

- Das **spezielle Halteproblem** ist

$$K = \left\{ w \in \{0, 1\}^* \mid \begin{array}{l} \text{die DTM } M_w \\ \text{h\"alt bei Eingabe } w \end{array} \right\}$$

$\chi_H$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\dots$
$w_1$	0	1	0	$\dots$
$w_2$	0	1	1	$\dots$
$w_3$	1	1	0	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

$\chi_K$				
$w_1$	0			
$w_2$		1		
$w_3$			0	
$\vdots$				$\ddots$

## Satz

$K \in \text{RE} \setminus \text{co-RE}$ .

Beweis von  $K \in RE$ 

- Sei  $w_h$  die Kodierung einer DTM, die bei jeder Eingabe (sofort) hält und betrachte die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} w, & x \text{ ist Kodierung einer haltenden Rechnung einer} \\ & \text{DTM } M_w \text{ bei Eingabe } w, \\ w_h, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Da  $f$  berechenbar und  $\text{img}(f) = K$  ist, folgt  $K \in RE$ . □

## Bemerkung

Ganz ähnlich lässt sich  $H \in RE$  zeigen.

## Beweisidee

- Für eine DTM  $M$  sei  $dom(M) = \{x \in \Sigma^* \mid M(x) \downarrow\}$  der Definitionsbereich der von  $M$  berechneten Funktion.
- Wir wissen bereits, dass  $RE = \{dom(M) \mid M \text{ ist eine DTM}\}$  ist.
- Sei  $A = (a_{w,x})_{w,x \in \{0,1\}^*}$  die durch  $a_{w,x} = \chi_H(w \# x)$  def. Binärmatrix.
- Wegen

$$a_{w,x} = \chi_H(w \# x) = \chi_{dom(M_w)}(x)$$

repräsentiert Zeile  $w$  von  $A$  die Sprache  $dom(M_w)$ , d.h. die Zeilen von  $A$  repräsentieren genau die semi-entscheidbaren Binärsprachen.

- Wegen  $a_{w,w} = \chi_H(w \# w) = \chi_K(w)$  repräsentiert die Diagonale von  $A$  die Sprache  $K$ .
- Da aber die komplementierte Diagonale von  $A$  mit keiner Zeile von  $A$  übereinstimmen kann, folgt  $\bar{K} \notin RE$  und somit  $K \notin REC$ .

Beweis von  $\bar{K} \notin \text{RE}$ 

- Angenommen, die Sprache

$$\bar{K} = \{w \mid M_w(w) \uparrow\}$$

wäre semi-entscheidbar.

- Dann existiert eine DTM  $M_{w'}$  mit  $\text{dom}(M_{w'}) = \bar{K}$ , d.h. es gilt

$$M_{w'}(w) \downarrow \Leftrightarrow w \in \bar{K} \quad (*)$$

- Folglich gilt

$$w' \in \bar{K} \Leftrightarrow M_{w'}(w') \uparrow \underset{(*)}{\Leftrightarrow} w' \notin \bar{K} \quad \text{⚡ (Widerspruch!)}$$

$\chi_H$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\dots$
$w_1$	0	1	0	$\dots$
$w_2$	0	1	1	$\dots$
$w_3$	1	1	0	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$
$w'$	1	0	1	$\dots$

## Korollar

$REC \not\subseteq RE$ .

## Beweis

Klar, da  $K \in RE - REC$ . □

# Der Reduktionsbegriff

## Definition

Eine Sprache  $A \subseteq \Sigma^*$  heißt auf  $B \subseteq \Gamma^*$  **reduzierbar** (kurz:  $A \leq B$ ), falls eine berechenbare Funktion  $f : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$  ex., so dass gilt:

$$\forall x \in \Sigma^* : x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

## Beispiel

- Es gilt  $K \leq H$  mittels  $f : w \mapsto w\#w$ , da für alle  $w \in \{0,1\}^*$  gilt:

$$w \in K \Leftrightarrow M_w(w) \downarrow \Leftrightarrow w\#w \in H$$

- Es gilt sogar  $A \leq H$  für jede Binärsprache  $A \in \text{RE}$  mittels  $f : x \mapsto w\#x$ , wobei  $w$  die Kodierung einer DTM  $M_w$  mit  $\text{dom}(M_w) = A$  ist:

$$x \in A \Leftrightarrow M_w(x) \downarrow \Leftrightarrow w\#x \in H$$



# Der Vollständigkeitsbegriff

## Definition

- Eine Sprache  $B$  heißt **hart** für eine Sprachklasse  $\mathcal{C}$  (kurz:  **$\mathcal{C}$ -hart** oder  **$\mathcal{C}$ -schwer**), falls jede Sprache  $A \in \mathcal{C}$  auf  $B$  reduzierbar ist:

$$\forall A \in \mathcal{C} : A \leq B.$$

- Eine  $\mathcal{C}$ -harte Sprache  $B$ , die zu  $\mathcal{C}$  gehört, heißt  **$\mathcal{C}$ -vollständig**.

## Beispiel

Das Halteproblem  $H$  ist RE-vollständig. Es gilt nämlich

- $H \in \text{RE}$  und
- $\forall A \in \text{RE} : A \leq H$

mittels der Reduktionsfunktion  $x \mapsto w\#bin(x)$ , wobei  $M_w$  eine DTM mit  $\text{dom}(M_w) = \{bin(x) \mid x \in A\}$  ist.



## Bemerkung

Auch das spezielle Halteproblem  $K$  ist RE-vollständig (siehe Übungen).

## Definition

Eine Sprachklasse  $\mathcal{C}$  heißt **unter  $\leq$  abgeschlossen**, wenn für beliebige Sprachen  $A, B$  gilt:

$$A \leq B \wedge B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \in \mathcal{C}.$$

## Satz

Die Klassen REC und RE sind unter  $\leq$  abgeschlossen.

## Beweis

- Gelte  $A \leq B$  mittels  $f$  und sei  $B \in \text{REC}$ .
- Wegen  $B \in \text{REC}$  ex. eine DTM  $M$ , die  $\chi_B$  berechnet.
- Betrachte folgende DTM  $M'$ :
  - $M'$  berechnet bei Eingabe  $x$  zuerst den Wert  $f(x)$  und
  - simuliert dann  $M$  bei Eingabe  $f(x)$ .

Abschluss von REC und RE unter  $\leq$ 

## Satz

Die Klasse REC ist unter  $\leq$  abgeschlossen.

## Beweis.

- Gelte  $A \leq B$  mittels  $f$  und sei  $B \in \text{REC}$ .
- Dann ex. eine DTM  $M$ , die  $\chi_B$  berechnet.
- Betrachte folgende DTM  $M'$ :
  - $M'$  berechnet bei Eingabe  $x$  zuerst den Wert  $f(x)$  und
  - simuliert dann  $M$  bei Eingabe  $f(x)$ .
- Wegen  $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$  ist  $\chi_A(x) = \chi_B(f(x))$  und daher folgt
$$M'(x) = M(f(x)) = \chi_B(f(x)) = \chi_A(x).$$
- Also berechnet  $M'$  die Funktion  $\chi_A$ , d.h.  $A \in \text{REC}$ . □

## Bemerkung

Der Abschluss von RE unter  $\leq$  folgt analog (siehe Übungen).

# $H$ ist nicht entscheidbar

## Korollar

- $A \leq B \wedge A \notin \text{REC} \Rightarrow B \notin \text{REC}$ ,
- $A \leq B \wedge A \notin \text{RE} \Rightarrow B \notin \text{RE}$ .

## Beweis

Aus der Annahme, dass  $B$  entscheidbar (bzw. semi-entscheidbar) ist, folgt wegen  $A \leq B$ , dass dies auch auf  $A$  zutrifft (Widerspruch).  $\square$

## Bemerkung

Wegen  $K \leq H$  überträgt sich somit die Unentscheidbarkeit von  $K$  auf  $H$ .

## Korollar

$H \notin \text{REC}$ .

# Das Halteproblem bei leerem Band

## Definition

Das **Halteproblem bei leerem Band** ist die Sprache

$$H_0 = \left\{ w \in \{0, 1\}^* \mid \begin{array}{l} \text{die DTM } M_w \\ \text{hält bei Eingabe } \varepsilon \end{array} \right\}$$

## Satz

$H_0$  ist RE-vollständig.

## Beweis

- $H_0 \in \text{RE}$  folgt wegen  $H_0 \leq H \in \text{RE}$  mittels der Reduktionsfunktion  $w \mapsto w\#\varepsilon$ .

$\chi_H$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\dots$
$w_1$	0	1	0	$\dots$
$w_2$	0	1	1	$\dots$
$w_3$	1	1	0	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

$\chi_{H_0}$	$x_1 (= \varepsilon)$
$w_1$	0
$w_2$	0
$w_3$	1
$\vdots$	$\vdots$

## $H_0$ ist RE-vollständig

### Beweis

- $H_0 \in \text{RE}$  folgt wegen  $H_0 \leq H \in \text{RE}$  mittels der Reduktionsfunktion  $w \mapsto w\#\epsilon$ .
- Sei  $A \in \text{RE}$  und sei  $M$  eine DTM mit  $\text{dom}(M) = A$ .
- Um  $A$  auf  $H_0$  zu reduzieren, transformieren wir  $x$  in die Kodierung  $w_x$  einer DTM  $M_{w_x}$ , die zunächst ihre Eingabe durch  $x$  ersetzt und dann  $M(x)$  simuliert.
- Dann gilt

$$x \in A \iff w_x \in H_0$$

und somit  $A \leq H_0$  mittels der Reduktionsfunktion  $x \mapsto w_x$ .

### Korollar

$H_0 \notin \text{REC}$ .

## Frage

- Kann man einer beliebig vorgegebenen DTM ansehen, ob die von ihr berechnete partielle Funktion eine gewisse Eigenschaft hat?
- Kann man beispielsweise entscheiden, ob eine gegebene DTM eine totale Funktion berechnet?

## Antwort

Nein (es sei denn, die fragliche Eigenschaft ist trivial, d.h. keine oder jede DTM berechnet eine Funktion mit dieser Eigenschaft).

## Definition

- Zu einer Klasse  $\mathcal{F}$  von partiellen Funktionen definieren wir die Sprache
$$L_{\mathcal{F}} = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{die DTM } M_w \text{ ber. eine partielle Funktion in } \mathcal{F}\}$$
- Die Eigenschaft  $\mathcal{F}$  heißt **trivial**, wenn  $L_{\mathcal{F}} = \emptyset$  oder  $L_{\mathcal{F}} = \{0,1\}^*$  ist.

Der Satz von Rice besagt, dass  $L_{\mathcal{F}}$  nur für triviale Eigenschaften entscheidbar ist.

## Satz (Satz von Rice)

Für jede nicht triviale Eigenschaft  $\mathcal{F}$  ist  $L_{\mathcal{F}}$  unentscheidbar.

## Beispiel

- Die Sprache

$$L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid M_w(0^n) = 0^{n+1} \text{ für alle } n \geq 0\}$$

ist unentscheidbar.

- Dies folgt aus dem Satz von Rice, da die Eigenschaft

$$\mathcal{F} = \{f \mid f(0^n) = 0^{n+1} \text{ für alle } n \geq 0\}$$

nicht trivial und  $L = L_{\mathcal{F}}$  ist.

- $\mathcal{F}$  ist nicht trivial, da z.B. die berechenbare partielle Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0^{n+1}, & x = 0^n \text{ für ein } n \geq 0 \\ \uparrow, & \text{sonst} \end{cases}$$

in  $\mathcal{F}$  und die konstante Funktion  $g(x) = 0$  nicht in  $\mathcal{F}$  enthalten ist.

- Dagegen ist die Eigenschaft  $\mathcal{F}' = \{\chi_H\}$  trivial, da  $L_{\mathcal{F}'} = \emptyset$  ist.

# Der Satz von Rice

## Satz (Satz von Rice)

Für jede nicht triviale Eigenschaft  $\mathcal{F}$  ist die Sprache  $L_{\mathcal{F}}$  unentscheidbar.

### Beweisidee

- Die Idee besteht darin,  $H_0$  auf  $L_{\mathcal{F}}$  (oder auf  $\bar{L}_{\mathcal{F}}$ ) zu reduzieren, indem wir für eine gegebene DTM  $M_w$  eine DTM  $M_{w'}$  konstruieren mit
 
$$w \in H_0 \Leftrightarrow M_{w'} \text{ berechnet (k)eine partielle Funktion in } \mathcal{F}.$$
- Hierzu lassen wir  $M_{w'}$  bei Eingabe  $x$  zunächst einmal die DTM  $M_w$  bei Eingabe  $\varepsilon$  simulieren.
- Falls  $w \notin H_0$  ist, berechnet  $M_{w'}$  also die überall undefinierte Funktion  $u$  mit  $u(x) \uparrow$  für alle  $x \in \{0, 1, \#\}^*$ .
- Damit die Reduktion gelingt, müssen wir nur noch dafür sorgen, dass  $M_{w'}$  im Fall  $w \in H_0$  eine partielle Funktion  $f$  berechnet, die sich bzgl. der Eigenschaft  $\mathcal{F}$  von  $u$  unterscheidet d.h.  $f \in \mathcal{F} \Leftrightarrow u \notin \mathcal{F}$ .
- Da  $\mathcal{F}$  nicht trivial ist, ex. eine DTM  $M$ , die ein solches  $f$  berechnet.

# Der Satz von Rice

## Satz (Satz von Rice)

Für jede nicht triviale Eigenschaft  $\mathcal{F}$  ist die Sprache  $L_{\mathcal{F}}$  unentscheidbar.

### Beweis

- Sei  $M$  eine DTM, die eine Funktion  $f$  mit  $f \in \mathcal{F} \Leftrightarrow u \notin \mathcal{F}$  berechnet.
- Betrachte die Reduktionsfunktion
 

$h(w) = w'$ , wobei  $w'$  die Kodierung einer DTM ist, die bei Eingabe  $x$  zunächst die DTM  $M_w(\varepsilon)$  simuliert und im Fall, dass  $M_w(\varepsilon)$  hält, mit der Simulation von  $M(x)$  fortfährt.
- Dann ist  $h : w \mapsto w'$  eine totale berechenbare Funktion und es gilt
 

$w \in H_0 \Rightarrow M_{w'} \text{ berechnet } f$

$w \notin H_0 \Rightarrow M_{w'} \text{ berechnet } u.$
- Dies zeigt, dass  $h$  das Problem  $H_0$  auf  $L_{\mathcal{F}}$  (oder auf  $\bar{L}_{\mathcal{F}}$ ) reduziert, und da  $H_0$  unentscheidbar ist, muss auch  $L_{\mathcal{F}}$  unentscheidbar sein. □

Der Satz von Rice gilt auch für Eigenschaften, die das Akzeptanzverhalten einer gegebenen Turingmaschine betreffen.

## Satz (Satz von Rice für Spracheigenschaften)

Für eine beliebige Sprachklasse  $\mathcal{S}$  sei

$$L_{\mathcal{S}} = \{w \in \{0, 1\}^* \mid L(M_w) \in \mathcal{S}\}.$$

Dann ist  $L_{\mathcal{S}}$  unentscheidbar, außer wenn  $L_{\mathcal{S}} = \emptyset$  oder  $L_{\mathcal{S}} = \{0, 1\}^*$  ist.

## Beweis

Siehe Übungen.

## Weitere Entscheidungsprobleme für Sprachklassen

Neben dem Wortproblem sind für eine Sprachklasse  $\mathcal{C}$  auch folgende Entscheidungsprobleme interessant:

### Das Leerheitsproblem

Gegeben: Eine Sprache  $L$  aus  $\mathcal{C}$ .

Gefragt: Ist  $L = \emptyset$ ?

### Das Äquivalenzproblem

Gegeben: Zwei Sprachen  $L_1$  und  $L_2$  aus  $\mathcal{C}$ .

Gefragt: Gilt  $L_1 = L_2$ ?

### Das Schnittproblem

Gegeben: Zwei Sprachen  $L_1$  und  $L_2$  aus  $\mathcal{C}$ .

Gefragt: Ist  $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ ?

Hierbei repräsentieren wir Sprachen in  $\mathcal{C} = \text{REG}, \text{CFL}, \text{CSL}, \text{RE}$  durch entsprechende Grammatiken und Sprachen in  $\mathcal{C} = \text{DCFL}, \text{DCSL}$  durch entsprechende Akzeptoren.

# Das Postsche Korrespondenzproblem (PCP)

## Definition

- Sei  $\Sigma$  ein beliebiges Alphabet mit  $\# \notin \Sigma$ .
- Das **Postsche Korrespondenzproblem über  $\Sigma$**  (kurz  $\text{PCP}_\Sigma$ ) ist:  
 gegeben:  $k$  Paare  $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$  von Wörtern in  $\Sigma^*$ .  
 gefragt: Gibt es eine Folge  $\alpha = (i_1, \dots, i_n)$ ,  $n \geq 1$ , von Indizes  $i_j \in \{1, \dots, k\}$  mit  $x_{i_1} \dots x_{i_n} = y_{i_1} \dots y_{i_n}$ ?
- Das **modifizierte PCP über  $\Sigma$**  (kurz  $\text{MPCP}_\Sigma$ ) fragt nach einer Lösung  $\alpha = (i_1, \dots, i_n)$  mit  $i_1 = 1$ .
- Wir notieren eine PCP-Instanz meist in Form einer Matrix  $\begin{pmatrix} x_1 \dots x_k \\ y_1 \dots y_k \end{pmatrix}$  und kodieren sie durch das Wort  $x_1 \# y_1 \# \dots \# x_k \# y_k$ .

## Beispiel

Die Instanz  $I = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & ab & caa \\ aca & bc & aa \end{pmatrix}$  besitzt wegen

$$x_1 x_3 x_2 x_3 = acaabcaa$$

$$y_1 y_3 y_2 y_3 = acaabcaa$$

die PCP-Lösung  $\alpha = (1, 3, 2, 3)$ , die auch eine MPCP-Lösung ist.

# Das Postsche Korrespondenzproblem

## Lemma

Für jedes Alphabet  $\Sigma$  gilt  $\text{PCP}_\Sigma \leq \text{PCP}_{\{0,1\}}$ .

## Beweis

- Sei  $\Sigma = \{a_1, \dots, a_m\}$  und sei  $k = \max(1, \lceil \log_2(m) \rceil)$ . Dann können wir  $a_i$  durch eine  $k$ -stellige Binärzahl  $\text{bin}_k(a_i)$  mit dem Wert  $i - 1$  und ein Wort  $w = w_1 \dots w_n$  durch  $\text{bin}(w) = \text{bin}_k(w_1) \dots \text{bin}_k(w_n)$  kodieren.
- Nun folgt  $\text{PCP}_\Sigma \leq \text{PCP}_{\{0,1\}}$  mittels der Reduktionsfunktion

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \dots x_k \\ y_1 \dots y_k \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \text{bin}(x_1) \dots \text{bin}(x_k) \\ \text{bin}(y_1) \dots \text{bin}(y_k) \end{pmatrix}.$$

□

## Beispiel

Sei  $\Sigma = \{a, b, c\}$ . Dann ist  $k = \max(1, \lceil \log_2(3) \rceil) = 2$  und  $\text{bin}_2(a) = 00$ ,  $\text{bin}_2(b) = 01$  und  $\text{bin}_2(c) = 10$ . Somit ist

$$f \begin{pmatrix} a & ab & caa \\ aca & bc & aa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 00 & 0001 & 100000 \\ 001000 & 0110 & 0000 \end{pmatrix}$$

# Das Postsche Korrespondenzproblem

Im Folgenden lassen wir im Fall  $\Sigma = \{0, 1\}$  den Index weg und schreiben einfach PCP (bzw. MPCP).

## Satz

$\text{MPCP} \leq \text{PCP}$ .

## Beweis

- Wir zeigen  $\text{MPCP} \leq \text{PCP}_\Sigma$  für  $\Sigma = \{0, 1, \langle, |, \rangle\}$ .
- Für ein Wort  $w = w_1 \dots w_n$  sei

$$\begin{array}{cccc}
 \overleftarrow{w} & \overleftarrow{w} & \overleftarrow{w} & \overleftarrow{w} \\
 \langle w_1 | \dots | w_n \rangle & \langle w_1 | \dots | w_n \rangle & | w_1 | \dots | w_n & w_1 | \dots | w_n \rangle
 \end{array}$$

Beweis von MPCP  $\leq$  PCP

- Für ein Wort  $w = w_1 \dots w_n$  sei

$$\begin{array}{cccc} \overleftarrow{w} & \overleftarrow{w} & \overleftarrow{w} & \overleftarrow{w} \\ \hline \langle |w_1| \dots |w_n| & w_1| \dots |w_n| & \langle |w_1| \dots |w_n| & |w_1| \dots |w_n| \end{array}$$

- Wir reduzieren MPCP mittels folgender Funktion  $f$  auf  $\text{PCP}_\Sigma$ :

$$f : \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \\ y_1 & \dots & y_k \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \overleftarrow{x_1} & \overleftarrow{x_1} & \dots & \overleftarrow{x_k} & \rangle \\ \overleftarrow{y_1} & \overleftarrow{y_1} & \dots & \overleftarrow{y_k} & | \rangle \end{pmatrix}$$

- Dabei nehmen wir an, dass  $(x_i, y_i) \neq (\varepsilon, \varepsilon)$  ist, da wir diese Paare im Fall  $i > 1$  einfach weglassen und im Fall  $i = 1$   $f(I) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  setzen können.

## Beispiel

$$f : \begin{pmatrix} 00 & 1 & 101 & 11 \\ 001 & 11 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \langle |0|0| & 0|0| & 1| & 1|0|1| & 1|1| & \rangle \\ \langle |0|0|1 & |0|0|1 & |1|1 & |0 & |1 & | \rangle \end{pmatrix}$$

# Beweis von MPCP $\leq$ PCP

- Wir reduzieren MPCP mittels folgender Funktion  $f$  auf PCP $_{\Sigma}$ :

$$f : \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \\ y_1 & \dots & y_k \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \overleftarrow{x_1} & \overleftarrow{x_1} & \dots & \overleftarrow{x_k} & \rangle \\ \overleftarrow{y_1} & \overleftarrow{y_1} & \dots & \overleftarrow{y_k} & | \rangle \end{pmatrix}$$

- Dabei nehmen wir an, dass  $(x_i, y_i) \neq (\varepsilon, \varepsilon)$  ist, da wir diese Paare im Fall  $i > 1$  einfach weglassen und im Fall  $i = 1$   $f(I) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  setzen können.
- Da jede MPCP-Lösung  $\alpha = (1, i_2, \dots, i_n)$  für  $I$  auf eine PCP-Lösung  $\alpha' = (1, i_2 + 1, \dots, i_n + 1, k + 2)$  für  $f(I)$  führt, folgt

$$I \in \text{MPCP} \Rightarrow f(I) \in \text{PCP}_{\Sigma}.$$

- Für die umgekehrte Implikation sei  $\alpha' = (i_1, \dots, i_n)$  eine PCP-Lösung für

$$f(I) = \begin{pmatrix} \overleftarrow{x_1} & \overleftarrow{x_1} & \dots & \overleftarrow{x_k} & \rangle \\ \overleftarrow{y_1} & \overleftarrow{y_1} & \dots & \overleftarrow{y_k} & | \rangle \end{pmatrix}.$$

- Für die umgekehrte Implikation sei  $\alpha' = (i_1, \dots, i_n)$  eine PCP-Lösung für

$$f(I) = \left( \begin{array}{cccc} \overleftarrow{x_1} & \overline{x_1} & \dots & \overline{x_k} & \rangle \\ \overleftarrow{y_1} & \overline{y_1} & \dots & \overline{y_k} & | \rangle \end{array} \right).$$

- Dann muss  $i_1 = 1$  und  $i_n = k + 2$  sein, da das Lösungswort mit  $\langle$  beginnen und mit  $\rangle$  enden muss (und  $f(I)$  nicht das Paar  $(\varepsilon, \varepsilon)$  enthält).
- Wählen wir  $\alpha'$  von minimaler Länge, so ist  $i_j \in \{2, \dots, k + 1\}$  für  $j = 2, \dots, n - 1$ .
- Dann ist aber  $\alpha = (i_1, i_2 - 1, \dots, i_{n-1} - 1)$  eine MPCP-Lösung für  $I$ .  $\square$

# Unentscheidbarkeit des PCP

## Satz

PCP ist RE-vollständig und damit unentscheidbar.

## Beweis.

- PCP ist semi-entscheidbar, da eine DTM systematisch nach einer Lösung suchen kann.
- Um zu zeigen, dass PCP RE-hart ist, sei  $A$  eine beliebige Sprache in RE und sei  $G = (V, \Sigma, P, S)$  eine Typ-0 Grammatik für  $A$ .
- Wir zeigen  $A \leq \text{MPCP}_\Gamma$  für  $\Gamma = V \cup \Sigma \cup \{\langle, |, \rangle\}$ .
- Wegen  $\text{MPCP}_\Gamma \leq \text{PCP}$  folgt hieraus  $A \leq \text{PCP}$ .

## Beweisidee für die Reduktion $A \leq \text{MPCP}_\Gamma$ :

Transformiere eine Eingabe  $w \in \Sigma^*$  in eine Instanz  $f(w) = \begin{pmatrix} x_1 \dots x_k \\ y_1 \dots y_k \end{pmatrix}$ , so dass  $\alpha = (i_1, \dots, i_n)$  genau dann eine MPCP-Lösung für  $f(w)$  ist, wenn das zugehörige **Lösungswort**  $x_{i_1} \dots x_{i_n} = y_{i_1} \dots y_{i_n}$  eine Ableitung  $S = \alpha_0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \alpha_m = w$  von  $w$  kodiert.

Beweis von  $A \leq \text{MPCP}_\Gamma$ 

- Wir bilden  $f(w)$  aus folgenden Wortpaaren:
  - $(\langle, \langle | S)$ ,
  - für jede Regel  $l \rightarrow r$  in  $P$ :  $(l, r)$ ,
  - für alle  $a \in V \cup \Sigma \cup \{|\}$ :  $(a, a)$ ,
  - sowie das Paar  $(w |, \rangle)$

„Startpaar“

„Ableitungspaare“

„Kopierpaare“

„Abschlusspaar“

# Unentscheidbarkeit des PCP

## Beispiel

- Sei  $G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aSbS, \varepsilon\}, S)$  und  $w = aabb$ .
- Die MPCP-Instanz  $f(aabb)$  enthält dann die acht Wortpaare

$$f(aabb) = \left( \begin{array}{c} \langle \quad S \quad S \quad S \quad a \quad b \quad | \quad aabb| \rangle \\ \langle |S \quad aSbS \quad \varepsilon \quad S \quad a \quad b \quad | \quad \rangle \end{array} \right).$$

- Der Ableitung  $\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSb\underline{S}bS \Rightarrow aa\underline{S}bbS \Rightarrow aabb\underline{S} \Rightarrow aabb$  entspricht dann das MPCP-Lösungswort

$$\begin{array}{l} \langle |S|aSbS|aaSbSbS|aaSbbsS|aabbS|aabb| \rangle \\ \langle |S|aSbS|aaSbSbS|aaSbbsS|aabbS|aabb| \rangle \end{array}$$

- Das kürzeste MPCP-Lösungswort für  $f(aabb)$  ist

$$\begin{array}{l} \langle |S|aSbS|aaSbSb|aabb| \rangle \\ \langle |S|aSbS|aaSbSb|aabb| \rangle \end{array}$$

- Dieses entspricht der „parallelisierten“ Ableitung

$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}b\underline{S} \Rightarrow^2 aa\underline{S}b\underline{S}b \Rightarrow^2 aabb$$

Beweis von  $A \leq \text{MPCP}_\Gamma$ 

- Wir bilden  $f(w)$  aus folgenden Wortpaaren:

- $(\langle, \langle | S)$ ,
- für jede Regel  $l \rightarrow r$  in  $P$ :  $(l, r)$ ,
- für alle  $a \in V \cup \Sigma \cup \{|\}$ :  $(a, a)$ ,
- sowie das Paar  $(w | \rangle, \rangle)$

„Startpaar“

„Ableitungspaare“

„Kopierpaare“

„Abschlusspaar“

- Nun lässt sich leicht aus einer Ableitung  $S = \alpha_0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \alpha_m = w$  von  $w$  in  $G$  eine MPCP-Lösung mit dem Lösungswort

$$\langle |\alpha_0 | \alpha_1 | \dots | \alpha_m | \rangle$$

angeben.

- Umgekehrt lässt sich aus jeder MPCP-Lösung auch eine Ableitung von  $w$  in  $G$  gewinnen, womit

$$w \in L(M) \Leftrightarrow f(w) \in \text{MPCP}_\Gamma$$

gezeigt ist.

## Das Schnittproblem für kontextfreie Grammatiken ( $SP_{Typ2}$ )

Gegeben: Zwei kontextfreie Grammatiken  $G_1$  und  $G_2$ .

Gefragt: Ist  $L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset$ ?

### Satz

Das Schnittproblem für kontextfreie Grammatiken ist RE-vollständig.

## Satz

Das Schnittproblem für kontextfreie Grammatiken ist RE-vollständig.

## Beweis

- Das Problem  $SP_{Typ2}$  ist semi-entscheidbar, da eine DTM systematisch nach einem Wort  $x \in L(G_1) \cap L(G_2)$  suchen kann.
- Um PCP auf  $SP_{Typ2}$  zu reduzieren, betrachten wir für eine Folge  $s = (x_1, \dots, x_k)$  von Strings  $x_i \in \{0, 1\}^*$  die Sprache

$$L_s = \{i_n \dots i_1 \# x_{i_1} \dots x_{i_n} \mid n \geq 1, 1 \leq i_1, \dots, i_n \leq k\}$$

über dem Alphabet  $\Sigma = \{1, \dots, k, \#, 0, 1\}$ .

- Die Sprache  $L_s$  wird von der Grammatik  $G_s = (\{A\}, \Sigma, P_s, A)$  mit der Regelmenge

$$P_s: A \rightarrow 1Ax_1, \dots, kAx_k, 1\#x_1, \dots, k\#x_k$$

erzeugt.

## Reduktion von PCP auf das Schnittproblem für CFL

- Zu einer PCP-Instanz  $I = \begin{pmatrix} x_1 \dots x_k \\ y_1 \dots y_k \end{pmatrix}$  bilden wir das Paar  $(G_s, G_t)$ , wobei  $s = (x_1, \dots, x_k)$  und  $t = (y_1, \dots, y_k)$  ist.
- Dann ist  $L(G_s) \cap L(G_t)$  die Sprache

$$\{i_n \dots i_1 \# x_{i_1} \dots x_{i_n} \mid 1 \leq n, x_{i_1} \dots x_{i_n} = y_{i_1} \dots y_{i_n}\}.$$

- Folglich ist  $\alpha = (i_1, \dots, i_n)$  genau dann eine Lösung für  $I$ , wenn  $i_n \dots i_1 \# x_{i_1} \dots x_{i_n} \in L(G_s) \cap L(G_t)$  ist.
- Also vermittelt  $f : I \mapsto (G_s, G_t)$  eine Reduktion von PCP auf das Schnittproblem für CFL. □

## Beispiel

- Die PCP-Instanz

$$I = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 001 & 01100 \\ 00110 & 01011 & 00 \end{pmatrix}$$

wird auf das Grammatikpaar  $(G_s, G_t)$  mit folgenden Regeln reduziert:

$$P_s: A \rightarrow 1A0, 2A001, 3A01100, 1\#0, 2\#001, 3\#01100$$

$$P_t: A \rightarrow 1A00110, 2A01011, 3A00, 1\#00110, 2\#01011, 3\#00$$

- Der PCP-Lösung  $\alpha = (1, 3, 2, 3)$  entspricht dann das Wort

$$\begin{aligned} 3231\#x_1x_3x_2x_3 &= 3231\#00110000101100 \\ &= 3231\#00110000101100 = 3231\#y_1y_3y_2y_3 \end{aligned}$$

im Schnitt  $L(G_s) \cap L(G_t)$ .



Das Schnittproblem für deterministische Kellerautomaten ( $SP_{DPDA}$ )

Gegeben: Zwei DPDAs  $M_1$  und  $M_2$ .

Gefragt: Gilt  $L(M_1) \cap L(M_2) = \emptyset$ ?

Korollar

$SP_{DPDA}$  ist unentscheidbar.

Beweisidee

Für die Sprache  $L_S = \{i_n \dots i_1 \# x_{i_1} \dots x_{i_n} \mid n \geq 1, 1 \leq i_1, \dots, i_n \leq k\}$  lässt sich leicht ein DPDA  $M_S$  angeben mit  $L(M_S) = L_S$ . □

## Das Äquivalenzproblem für kontextfreie Grammatiken ( $\text{ÄP}_{\text{Typ2}}$ )

Gegeben: Zwei kontextfreie Grammatiken  $G_1$  und  $G_2$ .

Gefragt: Gilt  $L(G_1) = L(G_2)$ ?

### Korollar

$\text{ÄP}_{\text{Typ2}}$  ist unentscheidbar.

### Beweisidee

- Wir reduzieren das Komplement von PCP auf  $\text{ÄP}_{\text{Typ2}}$ .

- Es gilt

$$I \notin \text{PCP} \Leftrightarrow L_s \cap L_t = \emptyset \Leftrightarrow \bar{L}_s \cup \bar{L}_t = \Sigma^*.$$

- Daher vermittelt die Funktion  $f : I \mapsto \langle G_1, G_2 \rangle$  die gewünschte Reduktion, wobei  $G_1$  und  $G_2$  kontextfreie Grammatiken sind mit

$$L(G_1) = \bar{L}_s \cup \bar{L}_t \text{ und } L(G_2) = \Sigma^*$$

# Das Leerheitsproblem für DLBAs

## Das Leerheitsproblem für DLBAs ( $LP_{DLBA}$ )

Gegeben: Ein DLBA  $M$ .

Gefragt: Ist  $L(M) = \emptyset$ ?

## Satz

Das Leerheitsproblem für DLBAs ist unentscheidbar.

## Beweisidee

- Wir reduzieren  $\overline{PCP}$  auf  $LP_{DLBA}$ .
- Hierzu überführen wir eine PCP-Instanz  $I = \binom{s}{t}$  in einen DLBA  $M$  mit

$$L(M) = L_s \cap L_t.$$

- Dann ist die Funktion  $f : I \mapsto M$  berechenbar und es gilt

$$I \in PCP \Leftrightarrow L_s \cap L_t \neq \emptyset \Leftrightarrow L(M) \neq \emptyset \Leftrightarrow M \notin LP_{DLBA} \quad \square$$

## Entscheidbare Probleme

Dagegen ist es nicht schwer,

- für eine kontextfreie Grammatik  $G$  zu entscheiden, ob mindestens ein Wort in  $G$  ableitbar ist (Leerheitsproblem  $LP_{\text{Typ2}}$  für kontextfreie Grammatiken), und
- für eine kontextsensitive Grammatik  $G$  und ein Wort  $x$  zu entscheiden, ob  $x$  in  $G$  ableitbar ist (Wortproblem  $WP_{\text{Typ1}}$  für kontextsensitive Grammatiken).

### Satz

- Das Leerheitsproblem für kontextfreie Grammatiken ist entscheidbar.
- Das Wortproblem für kontextsensitive Grammatiken ist entscheidbar.

### Beweis.

Siehe Übungen.

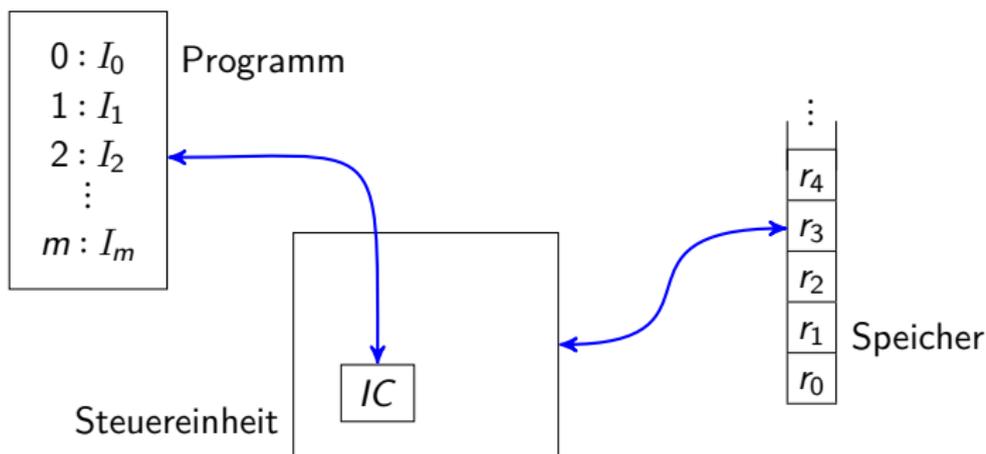


In folgender Tabelle fassen wir nochmals zusammen, welche der betrachteten Entscheidungsprobleme für die verschiedenen Stufen der Chomsky-Hierarchie entscheidbar sind.

	Wort- problem $x \in L?$	Leerheits- problem $L = \emptyset?$	Äquivalenz- problem $L_1 = L_2?$	Schnitt- problem $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset?$
REG	ja	ja	ja	ja
DCFL	ja	ja	ja <sup>a</sup>	nein
CFL	ja	ja	nein	nein
DCSL	ja	nein	nein	nein
CSL	ja	nein	nein	nein
RE	nein	nein	nein	nein

<sup>a</sup>Bewiesen in 1997 von Géraud Sénizergues (Univ. Bordeaux).

# Die Registermaschine (random access machine, RAM) 319



- führt ein Programm  $P = (I_0, \dots, I_m)$  aus, das aus einer endlichen Folge von Befehlen (**instructions**)  $I_i$  besteht,
- hat einen Befehlszähler (**instruction counter**)  $IC$ , der die Nummer des nächsten Befehls angibt (zu Beginn ist  $IC = 0$ ),
- verfügt über einen frei adressierbaren Speicher (**random access memory**) mit unendlich vielen Speicherzellen (Registern)  $r_i$ ,  $i \geq 0$ , die beliebig große natürliche Zahlen aufnehmen können.

In **GOTO-Programmen** sind folgende Befehle zulässig (wobei  $i, j, c \in \mathbb{N}$ ):

Befehl	Semantik
$r_i := r_j + c$	setzt Register $r_i$ auf den Wert $r_j + c$
$r_i := r_j \dot{-} c$	setzt Register $r_i$ auf den Wert $\max(0, r_j - c)$
<b>GOTO</b> $j$	setzt den Befehlszähler $IC$ auf den Wert $j$
<b>IF</b> $r_i = c$ <b>THEN GOTO</b> $j$	setzt $IC$ auf $j$ , falls $r_i$ den Wert $c$ hat
<b>HALT</b>	beendet die Programmausführung

Bei Ausführung der ersten beiden Befehle wird zudem der Befehlszähler  $IC$  um eins erhöht.

## GOTO-Berechenbarkeit

## Definition

Eine partielle Funktion  $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\uparrow\}$  heißt **GOTO-berechenbar**, falls es ein GOTO-Programm  $P = (I_0, \dots, I_m)$  mit folgender Eigenschaft gibt:

- Wird  $P$  auf einer RAM mit den Werten  $r_i = n_i$  für  $i = 1, \dots, k$ , sowie  $IC = 0$  und  $r_i = 0$  für  $i = 0, k + 1, k + 2, \dots$  gestartet, so
- hält  $P$  genau dann, wenn  $(n_1, \dots, n_k) \in \text{dom}(f)$  ist, und
- wenn  $P$  hält, hat  $r_0$  nach Beendigung von  $P$  den Wert  $f(n_1, \dots, n_k)$ .

## Beispiel

Folgendes GOTO-Programm berechnet die Funktion  $f(x, y) = xy$ :

0	<b>IF</b> $r_1 = 0$ <b>THEN GOTO</b> 4	5	$r_3 := r_2$
1	$r_1 := r_1 \div 1$	6	<b>IF</b> $r_3 = 0$ <b>THEN GOTO</b> 3
2	<del><math>r_0 := r_0 + r_2</math></del> <b>GOTO</b> 5	7	$r_3 := r_3 \div 1$
3	<b>GOTO</b> 0	8	$r_0 := r_0 + 1$
4	<b>HALT</b>	9	<b>GOTO</b> 6



# WHILE- und LOOP-Programme

- Die Syntax von **WHILE-Programmen** ist induktiv wie folgt definiert (wobei  $i, j, c \in \mathbb{N}$ ):
  - Jede Wertzuweisung der Form  $x_i := x_j + c$  oder  $x_i := x_j \div c$  ist ein WHILE-Programm.
  - Falls  $P$  und  $Q$  WHILE-Programme sind, so auch
    - $P; Q$  und
    - **IF  $x_i = c$  THEN  $P$  ELSE  $Q$  END**
    - **WHILE  $x_i \neq c$  DO  $P$  END**
- Die Syntax von **LOOP-Programmen** ist genauso definiert, nur dass Schleifen der Form **LOOP  $x_i$  DO  $P$  END** an die Stelle von WHILE-Schleifen treten.
- Die Semantik von WHILE-Programmen ist selbsterklärend.
- Eine LOOP-Schleife **LOOP  $x_i$  DO  $P$  END** wird so oft ausgeführt, wie der Wert von  $x_i$  zu Beginn der Schleife angibt.

## WHILE- und LOOP-Berechenbarkeit

- Eine partielle Funktion  $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\uparrow\}$  heißt **WHILE-berechenbar**, falls es ein WHILE-Programm  $P$  mit folgender Eigenschaft gibt:
  - Wird  $P$  mit den Werten  $x_i = n_i$  für  $i = 1, \dots, k$  gestartet, so
  - hält  $P$  genau dann, wenn  $(n_1, \dots, n_k) \in \text{dom}(f)$  ist, und
  - wenn  $P$  hält, hat  $x_0$  den Wert  $f(n_1, \dots, n_k)$ .
- Die **LOOP-Berechenbarkeit** von  $f$  ist entsprechend definiert.

## Beispiel

Die Funktion  $f(n_1, n_2) = n_1 n_2$  wird von dem WHILE-Programm

**WHILE**  $x_1 \neq 0$  **DO**

~~$x_0 := x_0 + x_2;$~~

$x_1 := x_1 \div 1$

**END**

$x_3 := x_2;$

**WHILE**  $x_3 \neq 0$  **DO**

$x_0 := x_0 + 1; x_3 := x_3 \div 1$

**END**

sowie von folgendem LOOP-Programm berechnet:

**LOOP**  $x_1$  **DO**  ~~$x_0 := x_0 + x_2$~~  **END**

**LOOP**  $x_2$  **DO**  $x_0 := x_0 + 1$  **END** ◀

## Numerische Repräsentation von Wörtern

- Da DTMs auf Wörtern und GOTO-Programme auf Zahlen operieren, müssen wir Wörter durch Zahlen (und umgekehrt) kodieren.
- Sei  $\Sigma = \{a_0, \dots, a_{m-1}\}$  ein Alphabet. Dann können wir jedes Wort  $x = a_{i_1} \dots a_{i_n} \in \Sigma^*$  durch eine natürliche Zahl  $num_{\Sigma}(x)$  kodieren:

$$num_{\Sigma}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} m^j + \sum_{j=1}^n i_j m^{n-j} = \begin{cases} n, & m = 1 \\ \frac{m^n - 1}{m - 1} + (i_1 \dots i_n)_m, & m \geq 2 \end{cases}$$

- Da die Abbildung  $num_{\Sigma} : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$  bijektiv ist, können wir umgekehrt jede natürliche Zahl  $n$  durch das Wort  $str_{\Sigma}(n) = num_{\Sigma}^{-1}(n)$  kodieren.

## Beispiel

Für das Alphabet  $\Sigma = \{a, b, c\}$  erhalten wir folgende Kodierung:

$w$	$\varepsilon$	$a$	$b$	$c$	$aa$	$ab$	$ac$	$ba$	$bb$	$bc$	$ca$	$cb$	$cc$	$aaa$	$\dots$
$num_{\Sigma}(w)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$\dots$



- Ist  $\Sigma = \{0, 1\}$ , so lassen wir den Index weg und schreiben einfach  $num$  und  $str$  anstelle von  $num_{\Sigma}$  und  $str_{\Sigma}$ :

$x$	$\varepsilon$	0	1	00	01	10	...
$num(x)$	0	1	2	3	4	5	...

$n$	0	1	2	3	4	5	...
$str(n)$	$\varepsilon$	0	1	00	01	10	...

- Zudem erweitern wir die Kodierungsfunktion  $str : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}^*$  zu einer Kodierungsfunktion  $str_k : \mathbb{N}^k \rightarrow \{0, 1, \#\}^*$  wie folgt:

$$str_k(n_1, \dots, n_k) = str(n_1)\# \dots \# str(n_k)$$

- Nun können wir eine partielle Funktion  $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\uparrow\}$  durch folgende partielle Wortfunktion  $\hat{f} : \{0, 1, \#\}^* \rightarrow \{0, 1\}^* \cup \{\uparrow\}$  repräsentieren:

$$\hat{f}(w) = \begin{cases} str(n), & w = str_k(n_1, \dots, n_k) \text{ und } f(n_1, \dots, n_k) = n \in \mathbb{N}, \\ \uparrow, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Wir nennen  $\hat{f}$  die **String-Repräsentation** von  $f$  und  $f$  die **numerische Repräsentation** von  $\hat{f}$ .

## Beispiel

Die Fkt.  $f : (n_1, n_2) \mapsto n_1 n_2$  wird durch folgende Wortfkt. repräsentiert:

$$\hat{f}(w) = \begin{cases} \text{str}(n_1 n_2), & w = \text{str}_2(n_1, n_2), \\ \uparrow, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$w$	$\varepsilon$	0	1	#	00	01	0#	10	11	1#	#0	#1	##	000
$(n_1, n_2)$	-	-	-	(0,0)	-	-	(1,0)	-	-	(2,0)	(0,1)	(0,2)	-	-
$n_1 n_2$	-	-	-	0	-	-	0	-	-	0	0	0	-	-
$\hat{f}(w)$	↑	↑	↑	$\varepsilon$	↑	↑	$\varepsilon$	↑	↑	$\varepsilon$	$\varepsilon$	$\varepsilon$	↑	↑

$w$	001	00#	010	011	01#	0#0	0#1	0##	100	101	10#	...
$(n_1, n_2)$	-	(3,0)	-	-	(4,0)	(1,1)	(1,2)	-	-	-	(5,0)	...
$n_1 n_2$	-	0	-	-	0	1	2	-	-	-	0	...
$\hat{f}(w)$	↑	$\varepsilon$	↑	↑	$\varepsilon$	0	1	↑	↑	↑	$\varepsilon$	...



**Satz**

Die String-Repräsentation  $\hat{f}$  einer partiellen Funktion  $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\uparrow\}$  ist genau dann Turing-berechenbar, wenn  $f$  GOTO-berechenbar ist.

- Sei  $P$  ein GOTO-Programm, das eine Funktion  $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\uparrow\}$  auf einer RAM  $R$  berechnet.
- Dann existiert eine Zahl  $m$ , so dass  $P$  nur Register  $r_i$  mit  $i \leq m$  benutzt.
- Daher lässt sich eine Konfiguration von  $R$  durch Angabe der Inhalte des Befehlszählers  $IC$  und der Register  $r_0, \dots, r_m$  beschreiben.
- Wir konstruieren eine  $(m+2)$ -DTM  $M$ , die
  - den Inhalt von  $IC$  in ihrem Zustand,
  - die Registerwerte  $r_1, \dots, r_m$  auf den Bändern  $1, \dots, m$  und
  - den Wert von  $r_0$  auf dem Ausgabeband  $m+2$  speichert.
- Ein Registerwert  $r_i$  wird hierbei in der Form  $str(r_i)$  gespeichert.
- Band  $m+1$  wird zur Ausführung von Hilfsberechnungen benutzt.

- Die Aufgabe von  $M$  ist es, bei Eingabe  $w \in \{0, 1, \#\}^*$  das Wort  $str(f(n_1, \dots, n_k))$  auszugeben, wenn  $w = str_k(n_1, \dots, n_k)$  für ein Tupel  $(n_1, \dots, n_k) \in dom(f)$  ist, und andernfalls nicht zu halten.
- Zuerst überprüft  $M$ , ob in  $w$  das  $\#$ -Zeichen  $(k - 1)$ -mal vorkommt.
- Dann kopiert  $M$  die Teilwörter  $str(n_i)$  für  $i = 2, \dots, k$  auf das  $i$ -te Band und löscht auf dem 1. Band alle Eingabezeichen bis auf  $str(n_1)$ .
- Für  $i = 1, \dots, m$  sind nun auf Band  $i$  die Registerinhalte  $r_i = n_i$  und auf Band  $m + 2$  der Wert  $r_0 = 0$  gespeichert.
- Danach führt  $M$  das Programm  $P$  Befehl für Befehl aus.
- Es ist klar, dass  $M$  jeden Befehl  $l$  in  $P$  durch eine geeignete Folge von Anweisungen simulieren kann, die die Registerinhalte und den Wert von  $IC$  entsprechend modifizieren.
- Sobald  $P$  stoppt, hält auch  $M$  und gibt das auf Band  $m + 2$  befindliche Wort  $str(r_0) = str(f(n_1, \dots, n_k)) = \hat{f}(w)$  aus.

- Sei  $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$  eine DTM, die die String-Repräsentation  $\hat{f}$  einer partiellen Funktion  $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\uparrow\}$  berechnet.
- $M$  gibt also bei Eingabe  $w$  das Wort  $str(f(n_1, \dots, n_k))$  aus, falls  $w$  die Form  $w = str_k(n_1, \dots, n_k)$  hat und  $f(n_1, \dots, n_k)$  definiert ist, und hält andernfalls nicht.
- Wir konstruieren ein GOTO-Programm  $P$ , das bei Eingabe  $(n_1, \dots, n_k)$  die DTM  $M$  bei Eingabe  $w = str_k(n_1, \dots, n_k)$  simuliert.
- Wir können annehmen, dass  $M$  eine 1-DTM ist.
- Sei  $Z = \{q_0, \dots, q_r\}$  und  $\Gamma = \{a_0, \dots, a_{m-1}\}$ , wobei wir annehmen, dass  $a_0 = \sqcup$ ,  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 1$  und  $a_3 = \#$  ist.
- Eine Konfiguration  $K = uq_i v$  von  $M$  mit  $u = a_{i_1} \dots a_{i_s}$  und  $v = a_{j_1} \dots a_{j_t}$  wird wie folgt in den Registern  $r_0, r_1, r_2$  gespeichert:
  - $r_0 = (i_1 \dots i_s)_m$
  - $r_1 = i$
  - $r_2 = (j_t \dots j_1)_m$

- Eine Konfiguration  $K = uq_jv$  von  $M$  mit  $u = a_{i_1} \dots a_{i_s}$  und  $v = a_{j_1} \dots a_{j_t}$  wird wie folgt in den Registern  $r_0, r_1, r_2$  gespeichert:
  - $r_0 = (i_1 \dots i_s)_m$
  - $r_1 = j$
  - $r_2 = (j_t \dots j_1)_m$
- $P$  besteht aus 3 Programmteilen  $P = P_1, P_2, P_3$ :
  - $P_1$  stellt in den drei Registern  $r_0, r_1, r_2$  die Startkonfiguration  $K_w = q_0w$  von  $M$  bei Eingabe  $w = str_k(n_1, \dots, n_k)$  her, d.h.  $P_1$  berechnet in Register  $r_2$  die Zahl  $(j_t \dots j_1)_m$ , wobei  $w = a_{j_1} \dots a_{j_t}$  ist, und setzt  $r_0$  und  $r_1$  auf den Wert 0.
  - $P_2$  überführt die in  $r_0, r_1, r_2$  gespeicherte Konfiguration von  $M$  solange in die zugehörige Nachfolgekonfiguration bis  $M$  hält (siehe nächste Folie).
  - Danach transformiert  $P_3$  noch den aktuellen Inhalt  $(i_1 \dots i_s)_m$  von Register  $r_0$  in die Zahl  $num(a_{i_1} \dots a_{i_s})$  und hält.

- Das Programmstück  $P_2$  hat die Form

$$M_2 \quad r_3 := r_2 \text{ MOD } m$$

$$\text{IF } r_1 = 0 \wedge r_3 = 0 \text{ THEN GOTO } M_{0,0}$$

$$\vdots$$

$$\text{IF } r_1 = r \wedge r_3 = m - 1 \text{ THEN GOTO } M_{r,m-1}$$

- Die Befehle ab Position  $M_{i,j}$  hängen von  $\delta(q_i, a_j)$  ab:

- Im Fall  $\delta(q_i, a_j) = \emptyset$  markiert  $M_{i,j}$  den Beginn von  $P_3$ .

- Im Fall  $\delta(q_i, a_j) = \{(q_{i'}, a_{j'}, L)\}$  werden folgende Befehle ausgeführt:

$$M_{i,j} \quad r_1 := i'$$

$$r_2 := r_2 \text{ DIV } m$$

$$r_2 := r_2 m + j'$$

$$r_2 := r_2 m + (r_0 \text{ MOD } m)$$

$$r_0 := r_0 \text{ DIV } m$$

$$\text{GOTO } M_2$$

- Die übrigen Fälle sind ähnlich. Natürlich müssen die **MOD**- und **DIV**-Befehle noch durch geeignete Unterprogramme ersetzt werden.