

Einführung in die Theoretische Informatik

Johannes Köbler



Institut für Informatik
Humboldt-Universität zu Berlin

WS 2016/17

Bemerkung

- Wie wir gesehen haben, ist folgende Sprache nicht regulär:

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}.$$

- Es ist aber leicht, eine kontextfreie Grammatik für L zu finden:

$$G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S) \text{ mit } P = \{S \rightarrow aSb, S \rightarrow \varepsilon\}.$$

- Damit ist klar, dass die Klasse der regulären Sprachen echt in der Klasse der kontextfreien Sprachen enthalten ist:

$$\text{REG} \subsetneq \text{CFL}.$$

- Als nächstes wollen wir zeigen, dass die Klasse der kontextfreien Sprachen wiederum echt in der Klasse der kontextsensitiven Sprachen enthalten ist:

$$\text{CFL} \subsetneq \text{CSL}.$$

- Kontextfreie Grammatiken sind dadurch charakterisiert, dass sie nur Regeln der Form $A \rightarrow \alpha$ haben.
- Dies lässt die Verwendung von beliebigen ε -Regeln der Form $A \rightarrow \varepsilon$ zu.
- Eine kontextsensitive Grammatik darf dagegen höchstens die ε -Regel $S \rightarrow \varepsilon$ haben.
- Voraussetzung hierfür ist, dass S das Startsymbol ist und dieses nicht auf der rechten Seite einer Regel vorkommt.
- Daher sind nicht alle kontextfreien Grammatiken kontextsensitiv.
- Beispielsweise ist die Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aSb, S \rightarrow \varepsilon\}, S)$ nicht kontextsensitiv, da sie die Regel $S \rightarrow \varepsilon$ enthält, obwohl S auf der rechten Seite der Regel $S \rightarrow aSb$ vorkommt.
- Wir werden jedoch sehen, dass sich zu jeder kontextfreien Grammatik eine äquivalente kontextsensitive Grammatik konstruieren lässt.

Satz

Zu jeder kontextfreien Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ gibt es eine kontextfreie Grammatik $G' = (V, \Sigma, P', S)$ ohne ε -Regeln mit $L(G') = L(G) \setminus \{\varepsilon\}$.

Beweis

- Zuerst berechnen wir die Menge $E = \{A \in V \mid A \Rightarrow^* \varepsilon\}$ aller *ε -ableitbaren* Variablen:

```

1    $E' := \{A \in V \mid A \rightarrow \varepsilon\}$ 
2   repeat
3      $E := E'$ 
4      $E' := E \cup \{A \in V \mid \exists B_1, \dots, B_k \in E : A \rightarrow B_1 \dots B_k\}$ 
5   until  $E = E'$ 

```

- Nun bilden wir P' wie folgt:

$$\left\{ A \rightarrow \alpha' \mid \begin{array}{l} \text{es ex. eine Regel } A \rightarrow_G \alpha, \text{ so dass } \alpha' \neq \varepsilon \text{ aus } \alpha \text{ durch} \\ \text{Entfernen von beliebig vielen Variablen } A \in E \text{ entsteht} \end{array} \right\}. \quad \square$$

Beispiel

Betrachte die Grammatik $G = (\{S, T, U, X, Y, Z\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit

$$P: \quad S \rightarrow aY, bX, Z; \quad Y \rightarrow bS, aYY; \quad T \rightarrow U; \\ X \rightarrow aS, bXX; \quad Z \rightarrow \varepsilon, S, T, cZ; \quad U \rightarrow abc.$$

- Berechnung von E :

E'	$\{Z\}$	$\{Z, S\}$
E	$\{Z, S\}$	$\{Z, S\}$

- Entferne $Z \rightarrow \varepsilon$ und füge $Y \rightarrow b$ (wegen $Y \rightarrow bS$), $X \rightarrow a$ (wegen $X \rightarrow aS$) und $Z \rightarrow c$ (wegen $Z \rightarrow cZ$) hinzu:

$$P': \quad S \rightarrow aY, bX, Z; \quad Y \rightarrow b, bS, aYY; \quad T \rightarrow U; \\ X \rightarrow a, aS, bXX; \quad Z \rightarrow c, S, T, cZ; \quad U \rightarrow abc.$$

Satz

Zu jeder kontextfreien Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ gibt es eine kontextfreie Grammatik $G' = (V, \Sigma, P', S)$ ohne ε -Regeln mit $L(G') = L(G) \setminus \{\varepsilon\}$.

Korollar

$\text{REG} \not\subseteq \text{CFL} \subseteq \text{CSL} \subseteq \text{RE}$.

Beweis

- Es ist nur noch die Inklusion $\text{CFL} \subseteq \text{CSL}$ zu zeigen.
- Nach obigem Satz ex. zu $L \in \text{CFL}$ eine kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ ohne ε -Regeln mit $L(G) = L \setminus \{\varepsilon\}$.
- Da G dann auch kontextsensitiv ist, folgt hieraus im Fall $\varepsilon \notin L$ unmittelbar $L(G) = L \in \text{CSL}$.
- Im Fall $\varepsilon \in L$ erzeugt die kontextsensitive Grammatik

$$G' = (V \cup \{S'\}, \Sigma, P \cup \{S' \rightarrow S, \varepsilon\}, S')$$

die Sprache $L(G') = L$, d.h. $L \in \text{CSL}$.

Abschlusseigenschaften von CFL

Satz

CFL ist abgeschlossen unter Vereinigung, Produkt und Sternhülle.

Beweis

Seien $G_1 = (V_1, \Sigma, P_1, S_1)$ und $G_2 = (V_2, \Sigma, P_2, S_2)$ kontextfreie Grammatiken mit $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ und sei S eine neue Variable.

Dann erzeugen die kontextfreien Grammatiken

$$G_3 = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup P_2 \cup \{S \rightarrow S_1, S_2\}, S)$$

die Vereinigung $L(G_3) = L(G_1) \cup L(G_2)$,

$$G_4 = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup P_2 \cup \{S \rightarrow S_1 S_2\}, S)$$

das Produkt $L(G_4) = L(G_1)L(G_2)$ und

$$G_5 = (V_1 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup \{S \rightarrow S_1 S, \epsilon\}, S)$$

die Sternhülle $L(G_1)^*$. □

Satz

CFL ist abgeschlossen unter Vereinigung, Produkt und Sternhülle.

Frage

Ist die Klasse CFL auch abgeschlossen unter

- Schnitt und
- Komplement?

Antwort

Nein.

Hierzu müssen wir für bestimmte Sprachen nachweisen, dass sie nicht kontextfrei sind. Dies gelingt mit einem Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen, für dessen Beweis wir Grammatiken in Chomsky-Normalform benötigen.

Definition

Eine Grammatik (V, Σ, P, S) ist in **Chomsky-Normalform (CNF)**, falls $P \subseteq V \times (V^2 \cup \Sigma)$ ist, also alle Regeln die Form $A \rightarrow BC$ oder $A \rightarrow a$ haben.

Satz

Zu jeder kontextfreien Sprache $L \in \text{CFL}$ gibt es eine CNF-Grammatik G' mit $L(G') = L \setminus \{\varepsilon\}$.

Anwendungen der Chomsky-Normalform

- CNF-Grammatiken ermöglichen den Beweis des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen.
- Zudem bilden sie die Basis für eine effiziente Lösung des Wortproblems für kontextfreie Sprachen.

Satz (Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen)

Zu jeder kontextfreien Sprache L gibt es eine Zahl l , so dass sich alle Wörter $z \in L$ mit $|z| \geq l$ in $z = uvwxy$ zerlegen lassen mit

- 1 $vx \neq \varepsilon$,
- 2 $|vwx| \leq l$ und
- 3 $uv^iwx^iy \in L$ für alle $i \geq 0$.

Das Wortproblem für kontextfreie Grammatiken

Gegeben: Eine kontextfreie Grammatik G und ein Wort x .

Gefragt: Ist $x \in L(G)$?

Satz

Das Wortproblem für kontextfreie Grammatiken ist effizient entscheidbar.

Um eine kontextfreie Grammatik in Chomsky-Normalform zu bringen, müssen wir neben den ε -Regeln $A \rightarrow \varepsilon$ auch sämtliche Variablenumbenennungen $A \rightarrow B$ loswerden.

Definition

Regeln der Form $A \rightarrow B$ heißen **Variablenumbenennungen**.

Satz

Zu jeder kontextfreien Grammatik G ex. eine kontextfreie Grammatik G' ohne Variablenumbenennungen mit $L(G') = L(G)$.

Beweis

- Zuerst entfernen wir sukzessive alle Zyklen

$$A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_k \rightarrow A_1.$$

Hierzu entfernen wir diese Regeln aus P und ersetzen alle Vorkommen der Variablen A_2, \dots, A_k in den übrigen Regeln durch A_1 .

(Sollte sich unter den entfernten Variablen A_2, \dots, A_k die Startvariable S befinden, so sei A_1 die neue Startvariable.)

Beispiel (Fortsetzung)

$$P: S \rightarrow aY, bX, Z; \quad Y \rightarrow b, bS, aYY; \quad T \rightarrow U;$$
$$X \rightarrow a, aS, bXX; \quad Z \rightarrow c, S, T, cZ; \quad U \rightarrow abc.$$

- Entferne den Zyklus $S \rightarrow Z \rightarrow S$ und ersetze alle Vorkommen von Z durch S :

$$S \rightarrow aY, bX, c, T, cS; \quad Y \rightarrow b, bS, aYY; \quad T \rightarrow U;$$
$$X \rightarrow a, aS, bXX; \quad U \rightarrow abc.$$

Entfernen von Variablenumbenennungen

Satz

Zu jeder kontextfreien Grammatik G ex. eine kontextfreie Grammatik G' ohne Variablenumbenennungen mit $L(G') = L(G)$.

Beweis

- Zuerst entfernen wir alle Zyklen

$$A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_k \rightarrow A_1.$$

- Nun werden wir sukzessive die restlichen Variablenumbenennungen los, indem wir
 - eine Regel $A \rightarrow B$ wählen, so dass in P keine Variablenumbenennung $B \rightarrow C$ mit B auf der linken Seite existiert,
 - diese Regel $A \rightarrow B$ aus P entfernen und
 - für jede Regel $B \rightarrow \alpha$ in P die Regel $A \rightarrow \alpha$ zu P hinzunehmen. \square

Beispiel (Fortsetzung)

$S \rightarrow aY, bX, c, T, cS; \quad Y \rightarrow b, bS, aYY; \quad T \rightarrow U;$
 $X \rightarrow a, aS, bXX; \quad U \rightarrow abc.$

- Entferne die Regel $T \rightarrow U$ und füge die Regel $T \rightarrow abc$ hinzu (wegen $U \rightarrow abc$):

$S \rightarrow aY, bX, c, T, cS; \quad Y \rightarrow b, bS, aYY; \quad T \rightarrow abc;$
 $X \rightarrow a, aS, bXX; \quad U \rightarrow abc.$

- Entferne dann auch die Regel $S \rightarrow T$ und füge die Regel $S \rightarrow abc$ (wegen $T \rightarrow abc$) hinzu:

$S \rightarrow abc, aY, bX, c, cS; \quad Y \rightarrow b, bS, aYY; \quad T \rightarrow abc;$
 $X \rightarrow a, aS, bXX; \quad U \rightarrow abc.$

- Da T und U nirgends mehr auf der rechten Seite vorkommen, können wir die Regeln $T \rightarrow abc$ und $U \rightarrow abc$ weglassen:

$S \rightarrow abc, aY, bX, c, cS; \quad Y \rightarrow b, bS, aYY; \quad X \rightarrow a, aS, bXX.$



Bereits gezeigt:

Korollar

Zu jeder kontextfreien Grammatik G ex. eine kontextfreie Grammatik G' ohne ε -Regeln und ohne Variablenumbenennungen mit $L(G') = L(G) \setminus \{\varepsilon\}$.

Noch zu zeigen:

Satz

Zu jeder kontextfreien Sprache $L \in \text{CFL}$ gibt es eine CNF-Grammatik G' mit $L(G') = L \setminus \{\varepsilon\}$.

Umwandlung in Chomsky-Normalform

Satz

Zu jeder kontextfreien Sprache $L \in \text{CFL}$ gibt es eine CNF-Grammatik G' mit $L(G') = L \setminus \{\varepsilon\}$.

Beweis

- Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik ohne ε -Regeln und ohne Variablenumbenennungen für $L \setminus \{\varepsilon\}$.
- Wir transformieren G wie folgt in eine CNF-Grammatik.
- Füge für jedes Terminalsymbol $a \in \Sigma$ eine neue Variable X_a zu V und eine neue Regel $X_a \rightarrow a$ zu P hinzu.
- Ersetze alle Vorkommen von a durch X_a , außer wenn a alleine auf der rechten Seite einer Regel steht.
- Ersetze jede Regel $A \rightarrow B_1 \dots B_k$, $k \geq 3$, durch die $k - 1$ Regeln

$$A \rightarrow B_1 A_1, A_1 \rightarrow B_2 A_2, \dots, A_{k-3} \rightarrow B_{k-2} A_{k-2}, A_{k-2} \rightarrow B_{k-1} B_k,$$

wobei A_1, \dots, A_{k-2} neue Variablen sind. □

Beispiel (Fortsetzung)

- Betrachte die Regeln

$$P: S \rightarrow abc, aY, bX, cS, c; \quad X \rightarrow aS, bXX, a; \quad Y \rightarrow bS, aYY, b.$$

- Ersetze a , b und c durch A , B und C (außer wenn sie alleine rechts vorkommen) und füge die Regeln $A \rightarrow a$, $B \rightarrow b$, $C \rightarrow c$ hinzu:

$$S \rightarrow ABC, AY, BX, CS, c; \quad X \rightarrow AS, BXX, a;$$

$$Y \rightarrow BS, AYY, b; \quad A \rightarrow a; \quad B \rightarrow b; \quad C \rightarrow c.$$

- Ersetze die Regeln $S \rightarrow ABC$, $X \rightarrow BXX$ und $Y \rightarrow AYY$ durch die Regeln $S \rightarrow AS'$, $S' \rightarrow BC$, $X \rightarrow BX'$, $X' \rightarrow XX$ und $Y \rightarrow AY'$, $Y' \rightarrow YY$:

$$S \rightarrow AS', AY, BX, CS, c; \quad S' \rightarrow BC; \quad X \rightarrow AS, BX', a; \quad X' \rightarrow XX;$$

$$Y \rightarrow BS, AY', b; \quad Y' \rightarrow YY; \quad A \rightarrow a; \quad B \rightarrow b; \quad C \rightarrow c.$$


Links- und Rechtsableitungen

Definition

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik.

- Eine Ableitung

$$\underline{S} \Rightarrow l_1 \underline{A_1} r_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow l_{m-1} \underline{A_{m-1}} r_{m-1} \Rightarrow \alpha_m$$

heißt **Linksableitung** von α_m (kurz $S \Rightarrow_L^* \alpha_m$), falls in jedem Ableitungsschritt die am weitesten links stehende Variable ersetzt wird, d.h. es gilt $l_i \in \Sigma^*$ für $i = 1, \dots, m-1$.

- **Rechtsableitungen** $S_0 \Rightarrow_R^* \alpha_m$ sind analog definiert.
- G heißt **mehrdeutig**, wenn es ein Wort $x \in L(G)$ gibt, das zwei verschiedene Linksableitungen hat. Andernfalls heißt G **eindeutig**.

Leicht zu sehen:

Für alle $x \in \Sigma^*$ gilt: $x \in L(G) \Leftrightarrow S \Rightarrow^* x \Leftrightarrow S \Rightarrow_L^* x \Leftrightarrow S \Rightarrow_R^* x$.

Beispiel

- In $G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aSbS, \varepsilon\}, S)$ gibt es **8** Ableitungen für das Wort $aabb$:

$$\underline{S} \Rightarrow_L a\underline{S}bS \Rightarrow_L aa\underline{S}bSbS \Rightarrow_L aab\underline{S}bS \Rightarrow_L aabb\underline{S} \Rightarrow_L aabb$$

$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aa\underline{S}bSbS \Rightarrow aab\underline{S}bS \Rightarrow aab\underline{S}b \Rightarrow aabb$$

$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSb\underline{S}bS \Rightarrow aa\underline{S}bbS \Rightarrow aabb\underline{S} \Rightarrow aabb$$

$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSb\underline{S}bS \Rightarrow aaSbb\underline{S} \Rightarrow aa\underline{S}bb \Rightarrow aabb$$

$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSbSb\underline{S} \Rightarrow aa\underline{S}bSb \Rightarrow aab\underline{S}b \Rightarrow aabb$$

$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSbSb\underline{S} \Rightarrow aaSb\underline{S}b \Rightarrow aa\underline{S}bb \Rightarrow aabb$$

$$\underline{S} \Rightarrow aSb\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}b \Rightarrow aa\underline{S}bSb \Rightarrow aab\underline{S}b \Rightarrow aabb$$

$$\underline{S} \Rightarrow_R aSb\underline{S} \Rightarrow_R a\underline{S}b \Rightarrow_R aaSb\underline{S}b \Rightarrow_R aa\underline{S}bb \Rightarrow_R aabb$$


Beispiel

- Die Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aSbS, \varepsilon\}, S)$ ist eindeutig.
- Dies liegt daran, dass in jeder Satzform $\alpha S \beta$ von G das Suffix β entweder leer ist oder mit einem b beginnt.
- Daher muss jede Linksableitung eines Wortes $x \in L(G)$ die am weitesten links stehende Variable der aktuellen Satzform $\alpha S \beta$ genau dann nach $aSbS$ expandieren, wenn in x auf das Präfix α ein a folgt.
- Dagegen ist die Grammatik $G' = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aSbS, ab, \varepsilon\}, S)$ mehrdeutig, da das Wort $x = ab$ zwei Linksableitungen hat:

$$\underline{S} \Rightarrow ab \text{ und } \underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow ab\underline{S} \Rightarrow ab.$$



Gerichtete Bäume und Wälder

Sei $G = (V, E)$ ein Digraph.

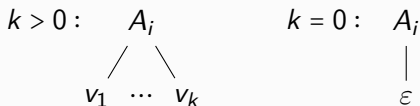
- Ein (**gerichteter**) v_0 - v_k -**Weg** in G ist eine Folge von Knoten v_0, \dots, v_k mit $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für $i = 0, \dots, k-1$. Seine **Länge** ist k .
- Ein Weg heißt **Pfad**, falls alle Knoten paarweise verschieden sind.
- Ein u - v -Weg der Länge ≥ 1 mit $u = v$ heißt **Zyklus**.
- G heißt **azyklisch**, wenn es in G keinen Zyklus gibt.
- G heißt **gerichteter Wald**, wenn G azyklisch ist und jeder Knoten $v \in V$ Eingangsgrad $\deg^-(v) \leq 1$ hat.
- Ein Knoten $u \in V$ vom Ausgangsgrad $\deg^+(u) = 0$ heißt **Blatt**.
- Ein Knoten $w \in V$ heißt **Wurzel** von G , falls alle Knoten $v \in V$ von w aus erreichbar sind (d.h. es gibt einen w - v -Weg in G).
- Ein **gerichteter Wald**, der eine Wurzel hat, heißt **gerichteter Baum**.
- Da die Kantenrichtungen durch die Wahl der Wurzel eindeutig bestimmt sind, kann auf ihre Angabe verzichtet werden. Man spricht dann auch von einem **Wurzelbaum**.

Wir ordnen einer Ableitung

$$\underline{A_0} \Rightarrow l_1 \underline{A_1} r_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow l_{m-1} \underline{A_{m-1}} r_{m-1} \Rightarrow \alpha_m$$

den **Syntaxbaum** (oder **Ableitungsbaum**, engl. *parse tree*) T_m zu, wobei die Bäume T_0, \dots, T_m induktiv wie folgt definiert sind:

- T_0 besteht aus einem einzigen Knoten, der mit A_0 markiert ist.
- Wird im $(i+1)$ -ten Ableitungsschritt die Regel $A_i \rightarrow v_1 \dots v_k$ mit $v_1, \dots, v_k \in \Sigma \cup V$ angewandt, so entsteht T_{i+1} aus T_i , indem wir das Blatt A_i durch folgenden Unterbaum ersetzen:



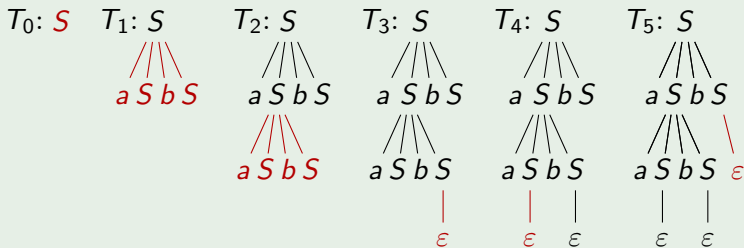
- Hierbei stellen wir uns die Kanten von oben nach unten gerichtet und die Kinder $v_1 \dots v_k$ von links nach rechts geordnet vor.
- Syntaxbäume sind also **geordnete** Wurzelbäume.

Beispiel

- Betrachte die Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aSbS, \epsilon\}, S)$ und die Ableitung

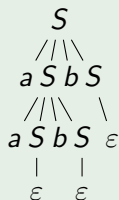
$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aa\underline{S}b\underline{S}bS \Rightarrow aa\underline{S}bbS \Rightarrow aabb\underline{S} \Rightarrow aabb$$

- Die zugehörigen Syntaxbäume sind dann



Beispiel

- In $G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aSbS, \epsilon\}, S)$ führen alle 8 Ableitungen des Wortes $aabb$ auf denselben Syntaxbaum:



Syntaxbäume und Linksableitungen

- Seien T_0, \dots, T_m die zu einer Ableitung $S = \alpha_0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \alpha_m$ gehörigen Syntaxbäume.
- Dann haben alle Syntaxbäume T_0, \dots, T_m die Wurzel S .
- Die Satzform α_i ergibt sich aus T_i , indem wir die Blätter von T_i von links nach rechts zu einem Wort zusammensetzen.
- Auf den Syntaxbaum T_m führen neben $\alpha_0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \alpha_m$ alle Ableitungen, die sich von dieser nur in der Reihenfolge der Regelanwendungen unterscheiden.
- Dazu gehört genau eine Linksableitung.
- Linksableitungen und Syntaxbäume entsprechen sich also eineindeutig.
- Dasselbe gilt für Rechtsableitungen.
- Ist T Syntaxbaum einer CNF-Grammatik, so hat jeder Knoten in T höchstens zwei Kinder (d.h. T ist ein **Binärbaum**).

Definition

Die **Tiefe** eines Baumes mit Wurzel w ist die maximale Länge eines Weges von w zu einem Blatt.

Lemma

Ein Binärbaum B der Tiefe $\leq k$ hat $\leq 2^k$ Blätter.

Beweis durch Induktion über k :

$k = 0$: Ein Baum der Tiefe 0 kann nur einen Knoten haben.

$k \rightsquigarrow k + 1$: Sei B ein Binärbaum der Tiefe $\leq k + 1$.

Dann hängen an B 's Wurzel maximal zwei Unterbäume.

Da deren Tiefe $\leq k$ ist, haben sie nach IV $\leq 2^k$ Blätter.

Also hat $B \leq 2^{k+1}$ Blätter. □

Lemma

Ein Binärbaum B der Tiefe $\leq k$ hat $\leq 2^k$ Blätter.

Korollar

Ein Binärbaum B mit $> 2^{k-1}$ Blättern hat eine Tiefe $\geq k$.

Beweis

Wäre die Tiefe von B kleiner als k (also $\leq k - 1$), so hätte B nach obigem Lemma $\leq 2^{k-1}$ Blätter (Widerspruch). \square

Satz (Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen)

Zu jeder kontextfreien Sprache $L \in \text{CFL}$ gibt es eine Zahl l , so dass sich alle Wörter $z \in L$ mit $|z| \geq l$ in $z = uvwxy$ zerlegen lassen mit

- 1 $vx \neq \varepsilon$,
- 2 $|vwx| \leq l$ und
- 3 $uv^iwx^iy \in L$ für alle $i \geq 0$.

Beispiel

- Betrachte die Sprache $L = \{a^n b^n | n \geq 0\}$.
- Dann lässt sich jedes Wort $z = a^n b^n = a^{n-1} a b b^{n-1}$ in L mit $|z| \geq 2$ pumpen:
 - Zerlege z in $z = uvwxy$ mit $u = a^{n-1}$, $v = a$, $w = \epsilon$, $x = b$, $y = b^{n-1}$.
 - Dann ist für alle $i \geq 0$ das Wort $uv^i wx^i y = a^{n-1} a^i b^i b^{n-1} \in L$.



Beispiel

- Die Sprache $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ ist nicht kontextfrei.
- Für eine vorgegebene Zahl $l \geq 0$ hat nämlich $z = a^l b^l c^l$ die Länge $|z| = 3l \geq l$.
- Dieses Wort lässt sich aber nicht pumpen:

Für jede Zerlegung $z = uvwxy$ mit $vx \neq \varepsilon$ und $|vwx| \leq l$ gehört $z' = uv^0wx^0y = uwy$ nicht zu L :

- Wegen $vx \neq \varepsilon$ ist $|z'| < |z|$.
- Wegen $|vwx| \leq l$ kann in vx nicht jedes der drei Zeichen a, b, c vorkommen.
- Kommt aber in vx beispielsweise kein a vor, so ist $\#_a(z) = \#_a(z')$ und somit gilt

$$|z'| < |z| = 3 \#_a(z) = 3 \#_a(z').$$

- Also gehört z' nicht zu L .

Beweis des Pumping-Lemmas

Satz (Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen)

Zu jeder kontextfreien Sprache $L \in \text{CFL}$ gibt es eine Zahl l , so dass sich alle Wörter $z \in L$ mit $|z| \geq l$ in $z = uvwxy$ zerlegen lassen mit

- ① $vx \neq \varepsilon$,
- ② $|vwx| \leq l$ und
- ③ $uv^iwx^iy \in L$ für alle $i \geq 0$.

Beweis

- Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine CNF-Grammatik für $L \setminus \{\varepsilon\}$.
- Ist nun $z = z_1 \dots z_n \in L$ mit $n \geq 1$, so ex. in G eine Ableitung

$$S = \alpha_0 \Rightarrow \alpha_1 \dots \Rightarrow \alpha_m = z.$$

- Da G in CNF ist, werden hierbei genau $n-1$ Regeln der Form $A \rightarrow BC$ und genau n Regeln der Form $A \rightarrow a$ angewandt.

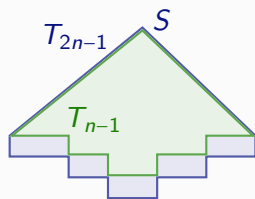
Beweis des Pumping-Lemmas

Beweis

- Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine CNF-Grammatik für $L \setminus \{\varepsilon\}$.
- Ist nun $z = z_1 \dots z_n \in L$ mit $n \geq 1$, so ex. in G eine Ableitung

$$S = \alpha_0 \Rightarrow \alpha_1 \dots \Rightarrow \alpha_m = z.$$

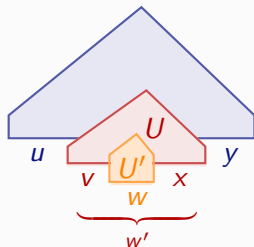
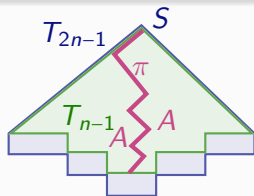
- Da G in CNF ist, werden hierbei genau $n-1$ Regeln der Form $A \rightarrow BC$ und genau n Regeln der Form $A \rightarrow a$ angewandt.
- Folglich ist $m = 2n - 1$ und z hat den Syntaxbaum T_{2n-1} .
- Wir können annehmen, dass die $n-1$ Regeln der Form $A \rightarrow BC$ vor den n Regeln der Form $A \rightarrow a$ zur Anwendung kommen.
- Dann besteht α_{n-1} aus n Variablen und T_{n-1} hat wie T_{2n-1} genau n Blätter.
- Setzen wir $l = 2^k$, wobei $k = \|V\|$ ist, so hat T_{n-1} im Fall $n \geq l$ mindestens die Tiefe k , da T_{n-1} mindestens $l = 2^k > 2^{k-1}$ Blätter hat.



Beweis des Pumping-Lemmas

Beweis (Fortsetzung)

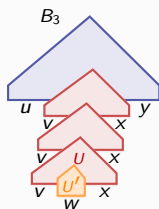
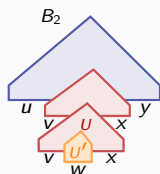
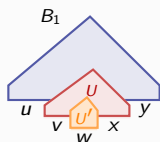
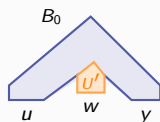
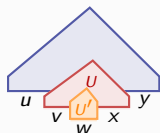
- Setzen wir $l = 2^k$, wobei $k = \|V\|$ ist, so hat T_{n-1} im Fall $n \geq l$ mindestens die Tiefe k , da T_{n-1} mindestens $l = 2^k > 2^{k-1}$ Blätter hat.
- Sei π ein von der Wurzel ausgehender Pfad maximaler Länge in T_{n-1} .
- Dann hat π mindestens die Länge k und unter den letzten $k + 1$ Knoten von π müssen zwei mit derselben Variablen A markiert sein.
- Seien U und U' die von diesen Knoten ausgehenden Unterbäume des vollständigen Syntaxbaums T_{2n-1} .
- Nun zerlegen wir z wie folgt:
 - w' ist das Teilwort von $z = uw'y$, das von U erzeugt wird und
 - w ist das Teilwort von $w' = vwx$, das von U' erzeugt wird.



Beweis des Pumping-Lemmas

Beweis (Schluss)

- Dann ist $vx \neq \varepsilon$ (Bed. 1), da U mehr Blätter hat als U' .
- Zudem hat U höchstens $2^k = l$ Blätter, da der Baum $U^* = U \cap T_{n-1}$ höchstens die Tiefe k hat (andernfalls wäre π nicht maximal).
Folglich ist $|vwx| \leq l$ (Bed. 2).
- Schließlich lassen sich Syntaxbäume B_i für die Wörter uv^iwx^iy , $i \geq 0$, wie folgt konstruieren (Bed. 3):
 - B_0 entsteht aus $B_1 = T_{2n-1}$, indem wir U durch U' ersetzen.
 - B_{i+1} entsteht aus B_i , indem wir U' durch U ersetzen:



Wie wir gesehen haben, ist die Klasse CFL abgeschlossen unter

- Vereinigung,
- Produkt und
- Sternhülle.

Satz

CFL ist nicht abgeschlossen unter

- Schnitt und
- Komplement.

Abschlusseigenschaften von CFL

Beweis von $L_1, L_2 \in \text{CFL} \not\Rightarrow L_1 \cap L_2 \in \text{CFL}$

- Die beiden Sprachen

$$L_1 = \{a^n b^m c^m \mid n, m \geq 0\} \quad \text{und} \quad L_2 = \{a^n b^n c^m \mid n, m \geq 0\}$$

sind kontextfrei (siehe Übungen).

- Nicht jedoch ihr Schnitt $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$.
- Also ist CFL nicht unter Schnitt abgeschlossen.

Beweis von $L \in \text{CFL} \not\Rightarrow \bar{L} \in \text{CFL}$

Wäre CFL unter Komplement abgeschlossen, so wäre CFL wegen de Morgan auch unter Schnitt abgeschlossen:

$$A, B \in \text{CFL} \Rightarrow \bar{A}, \bar{B} \in \text{CFL} \Rightarrow \bar{A} \cup \bar{B} \in \text{CFL} \Rightarrow \overline{\bar{A} \cup \bar{B}} = A \cap B \in \text{CFL} \quad \zeta$$

Das Wortproblem für kontextfreie Grammatiken

Gegeben: Eine kontextfreie Grammatik G und ein Wort x .

Gefragt: Ist $x \in L(G)$?

Frage

Wie lässt sich das Wortproblem für kontextfreie Grammatiken entscheiden?

Der CYK-Algorithmus

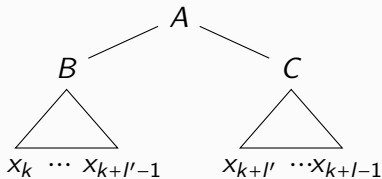
- Sei eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ und ein Wort $x = x_1 \dots x_n$ gegeben.
- Falls $x = \varepsilon$ ist, können wir effizient prüfen, ob $S \Rightarrow^* \varepsilon$ gilt.
- Hierzu genügt es, die Menge $E = \{A \in V \mid A \Rightarrow^* \varepsilon\}$ aller ε -ableitbaren Variablen zu berechnen und zu prüfen, ob $S \in E$ ist.
- Andernfalls bringen wir G in CNF und starten den nach seinen Autoren **Cocke**, **Younger** und **Kasami** benannten **CYK-Algorithmus**.
- Dieser bestimmt mittels **dynamischer Programmierung** für $l = 1, \dots, n$ und $k = 1, \dots, n - l + 1$ die Menge $V_{l,k}$ aller Variablen, aus denen das Teilwort $x_k \dots x_{k+l-1}$ ableitbar ist.
- Dann gilt $x \in L(G) \Leftrightarrow S \in V_{n,1}$.

Berechnung der Mengen $V_{l,k}$

- Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine CNF-Grammatik und sei $x \in \Sigma^+$.
- Dann lassen sich die Mengen $V_{l,k} = \{A \in V \mid A \Rightarrow^* x_k \dots x_{k+l-1}\}$ wie folgt bestimmen.
- Für $l = 1$ gehört A zu $V_{1,k}$, falls die Regel $A \rightarrow x_k$ existiert:

$$V_{1,k} = \{A \in V \mid A \rightarrow x_k\}$$

- Für $l > 1$ gehört A zu $V_{l,k}$, falls eine Regel $A \rightarrow BC$ und eine Zahl $l' \in \{1, \dots, l-1\}$ ex. mit $B \in V_{l',k}$ und $C \in V_{l-l',k+l'}$:



$$V_{l,k} = \{A \in V \mid \exists l' < l, B \in V_{l',k}, C \in V_{l-l',k+l'}: A \rightarrow BC \in P\}$$

Algorithmus CYK(G, x)

```
1   Input: CNF-Grammatik  $G = (V, \Sigma, P, S)$  und Wort  $x = x_1 \dots x_n$ 
2   for  $k := 1$  to  $n$  do
3        $V_{1,k} := \{A \in V \mid A \rightarrow x_k \in P\}$ 
4   for  $l := 2$  to  $n$  do
5       for  $k := 1$  to  $n - l + 1$  do
6            $V_{l,k} := \emptyset$ 
7           for  $l' := 1$  to  $l - 1$  do
8               for all  $A \rightarrow BC \in P$  do
9                   if  $B \in V_{l',k}$  and  $C \in V_{l-l',k+l'}$  then
10                        $V_{l,k} := V_{l,k} \cup \{A\}$ 
11   if  $S \in V_{n,1}$  then accept else reject
```

Der CYK-Algorithmus lässt sich leicht dahingehend modifizieren, dass er im Fall $x \in L(G)$ auch einen Syntaxbaum T von x bestimmt.

Beispiel

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$P: S \rightarrow AS', AY, BX, CS, c, S' \rightarrow BC, X \rightarrow AS, BX', a, X' \rightarrow XX,$
 $Y \rightarrow BS, AY', b, Y' \rightarrow YY, A \rightarrow a, B \rightarrow b, C \rightarrow c.$

- Dann erhalten wir für das Wort $x = abb$ folgende Mengen $V_{l,k}$:

$k:$	1	2	3
	a	b	b
$l: 1$	{X, A}	{Y, B}	{Y, B}
2	{S}	{Y'}	
3	{Y}		

- Wegen $S \notin V_{3,1}$ ist $x \notin L(G)$.

Der CYK-Algorithmus

Beispiel (Fortsetzung)

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$P: S \rightarrow AS', AY, BX, CS, c, S' \rightarrow BC, X \rightarrow AS, BX', a, X' \rightarrow XX, Y \rightarrow BS, AY', b, Y' \rightarrow YY, A \rightarrow a, B \rightarrow b, C \rightarrow c.$

- Dagegen gehört das Wort $y = aababb$ zu $L(G)$:

	a	a	b	a	b	b
	$\{X, A\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
	$\{X'\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{Y'\}$	
	$\{X\}$	$\{X\}$	$\{Y\}$	$\{Y\}$		
	$\{X'\}$	$\{S\}$	$\{Y'\}$			
	$\{X\}$	$\{Y\}$				
	$\{S\}$					

Frage

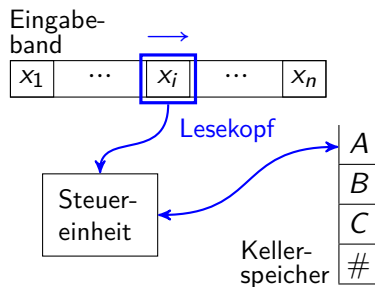
Wie lässt sich das Maschinenmodell des DFA erweitern, um die Sprache

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

und alle anderen kontextfreien Sprachen erkennen zu können?

Antwort

- Ein DFA kann Sprachen wie L nicht erkennen, da er nur seinen Zustand als Speicher benutzen kann und die Anzahl der Zustände zwar von L aber nicht von der Eingabe abhängen darf.
- Um kontextfreie Sprachen erkennen zu können, genügt bereits ein **Kellerspeicher** (auch **Stapel**, engl. *stack* oder *pushdown memory*).
- Dieser erlaubt nur den Zugriff auf die höchste belegte Speicheradresse.



- verfügt zusätzlich über einen Kellerspeicher,
- kann auch ε -Übergänge machen,
- hat Lesezugriff auf das aktuelle Eingabezeichen und auf das oberste Kellersymbol,
- kann das oberste Kellersymbol löschen (durch eine **pop-Operation**) und
- durch beliebig viele Symbole ersetzen (durch eine **push-Operation**).

Notation

Für eine (unendliche) Menge M bezeichne $\mathcal{P}_e(M)$ die Menge aller endlichen Teilmengen von M , d.h.

$$\mathcal{P}_e(M) = \{A \subseteq M \mid A \text{ ist endlich}\}.$$

Definition

Ein **Kellerautomat** (kurz: **PDA**, engl. *pushdown automaton*) wird durch ein 6-Tupel $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#)$ beschrieben, wobei

- $Z \neq \emptyset$ eine endliche Menge von **Zuständen**,
- Σ das **Eingabealphabet**,
- Γ das **Kelleralphabet**,
- $\delta : Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \rightarrow \mathcal{P}_e(Z \times \Gamma^*)$ die **Überföhrungsfunktion**,
- $q_0 \in Z$ der **Startzustand** und
- $\# \in \Gamma$ das **Kelleranfangszeichen** ist.

Arbeitsweise eines PDA

- Wenn p der momentane Zustand, A das oberste Kellerzeichen und $u \in \Sigma$ das nächste Eingabezeichen (bzw. $u = \varepsilon$) ist, so kann M im Fall $(q, B_1 \dots B_k) \in \delta(p, u, A)$
 - in den Zustand q wechseln,
 - den Lesekopf auf dem Eingabeband um $|u| \in \{0, 1\}$ Positionen vorrücken und
 - das Zeichen A aus- sowie die Zeichenfolge $B_1 \dots B_k$ einkellern (danach ist B_1 das oberste Kellerzeichen).
- Hierfür sagen wir auch, M führt die **Anweisung**

$$puA \rightarrow qB_1 \dots B_k$$
 aus.
- Im Fall $u = \varepsilon$ spricht man auch von einem **ε -Übergang**.

- Eine **Konfiguration** wird durch ein Tripel

$$K = (p, x_i \dots x_n, A_1 \dots A_l) \in Z \times \Sigma^* \times \Gamma^*$$

beschrieben und besagt, dass

- p der momentane Zustand,
 - $x_i \dots x_n$ der ungelesene Rest der Eingabe und
 - $A_1 \dots A_l$ der aktuelle Kellerinhalt ist (A_1 ist oberstes Symbol).
- In der Konfiguration $K = (p, x_i \dots x_n, A_1 \dots A_l)$ kann M eine bel. Anweisung $puA_1 \rightarrow qB_1 \dots B_k$ mit $u \in \{\varepsilon, x_i\}$ ausführen.

Diese überführt M in die **Folgekonfiguration**

$$K' = (q, x_j \dots x_n, B_1 \dots B_k A_2 \dots A_l) \text{ mit } j = i + |u|.$$

Hierfür schreiben wir auch kurz $K \vdash K'$.

- Eine **Rechnung** von M bei Eingabe x ist eine Folge von Konfigurationen $K_0, K_1, K_2 \dots$ mit $K_0 = (q_0, x, \#)$ und $K_0 \vdash K_1 \vdash K_2 \dots$.
 K_0 heißt **Startkonfiguration** von M bei Eingabe x .

Notation

Die reflexive, transitive Hülle von \vdash bezeichnen wir wie üblich mit \vdash^* .

Definition

Die von $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#)$ **akzeptierte** oder **erkannte Sprache** ist

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists q \in Z : (q_0, x, \#) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)\}.$$

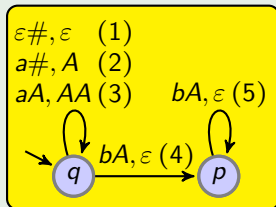
Bemerkung

- Ein PDA M akzeptiert also genau dann eine Eingabe x , wenn es eine Rechnung gibt, bei der M
 - das gesamte Eingabewort bis zum Ende liest und
 - den Keller leert.
- Man beachte, dass bei leerem Keller kein weiterer Übergang mehr möglich ist.

Beispiel

- Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q, \#)$ mit $Z = \{q, p\}$,
 $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{A, \#\}$ und

$$\delta : \begin{array}{l} q\varepsilon\# \rightarrow q \quad (1) \quad qa\# \rightarrow qA \quad (2) \quad qaA \rightarrow qAA \quad (3) \\ qbA \rightarrow p \quad (4) \quad pbA \rightarrow p \quad (5) \end{array}$$



- Dann akzeptiert M die Eingabe $x = aabb$:

$$(q, aabb, \#) \xrightarrow{(2)} (q, abb, A) \xrightarrow{(3)} (q, bb, AA) \xrightarrow{(4)} (p, b, A) \xrightarrow{(5)} (p, \varepsilon, \varepsilon)$$

- Allgemeiner akzeptiert M das Wort $x = a^n b^n$ mit folgender Rechnung:

$$n = 0: (q, \varepsilon, \#) \xrightarrow{(1)} (q, \varepsilon, \varepsilon)$$

$$n \geq 1: (q, a^n b^n, \#) \xrightarrow{(2)} (q, a^{n-1} b^n, A) \xrightarrow{(3)^{n-1}} (q, b^n, A^n)$$

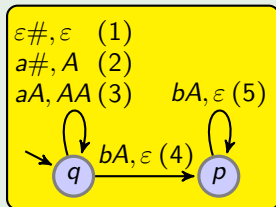
$$\xrightarrow{(4)} (p, b^{n-1}, A^{n-1}) \xrightarrow{(5)^{n-1}} (p, \varepsilon, \varepsilon)$$

- Dies zeigt, dass M alle Wörter der Form $a^n b^n$, $n \geq 0$, akzeptiert.

Ein Kellerautomat

Beispiel

- Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q, \#)$ mit $Z = \{q, p\}$,
 $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{A, \#\}$ und
 $\delta : q\epsilon\# \rightarrow q$ (1) $qa\# \rightarrow qA$ (2) $qaA \rightarrow qAA$ (3)
 $qbA \rightarrow p$ (4) $pbA \rightarrow p$ (5)

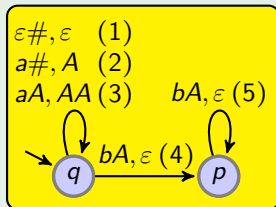


- Als nächstes zeigen wir, dass jede von M akzeptierte Eingabe $x = x_1 \dots x_n \in L(M)$ die Form $x = a^m b^m$ haben muss.
- Ausgehend von der Startkonfiguration $(q, x, \#)$ sind nur die Anweisungen (1) oder (2) ausführbar.
- Führt M zuerst Anweisung (1) aus, so wird der Keller geleert.
- Daher kann M in diesem Fall nur das leere Wort $x = \epsilon = a^0 b^0$ akzeptieren.
- Falls M mit Anweisung (2) beginnt, muss M später mittels Anweisung (4) in den Zustand p gelangen, da sonst der Keller nicht geleert wird.

Ein Kellerautomat

Beispiel

- Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q, \#)$ mit $Z = \{q, p\}$,
 $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{A, \#\}$ und
 $\delta : q\varepsilon\# \rightarrow q$ (1) $qa\# \rightarrow qA$ (2) $qaA \rightarrow qAA$ (3)
 $qbA \rightarrow p$ (4) $pbA \rightarrow p$ (5)



- Falls M mit Anweisung (2) beginnt, muss M später mittels Anweisung (4) in den Zustand p gelangen, da sonst der Keller nicht geleert wird.
- Dies geschieht, sobald M nach Lesen von $m \geq 1$ a 's das erste b liest:

$$\begin{aligned}
 (q, x_1 \dots x_n, \#) &\stackrel{(2)}{\vdash} (q, x_2 \dots x_n, A) \stackrel{(3)}{\vdash}^{m-1} (q, x_{m+1} \dots x_n, A^m) \\
 &\stackrel{(4)}{\vdash} (p, x_{m+2} \dots x_n, A^{m-1})
 \end{aligned}$$

mit $x_1 = x_2 = \dots = x_m = a$ und $x_{m+1} = b$.

- Um den Keller leeren zu können, muss M nun noch genau $m - 1$ b 's lesen, weshalb x auch in diesem Fall die Form $a^m b^m$ haben muss. ◀

Ziel

Als nächstes wollen wir zeigen, dass PDAs genau die kontextfreien Sprachen erkennen.

Satz

$CFL = \{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\}.$

Beweis von $\text{CFL} \subseteq \{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\}$ **Idee:**

Konstruiere zu einer kontextfreien Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ einen PDA $M = (\{q\}, \Sigma, \Gamma, \delta, q, S)$ mit $\Gamma = V \cup \Sigma$, so dass folgende Äquivalenz gilt:

$$S \Rightarrow^* x_1 \dots x_n \text{ gdw. } (q, x_1 \dots x_n, S) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$$

- Hierzu fügen wir folgende Anweisungen zu δ hinzu:

für jede Regel $A \rightarrow_G \alpha$: $q \varepsilon A \rightarrow q \alpha$

für jedes Zeichen $a \in \Sigma$: $q a a \rightarrow q \varepsilon$

- M versucht also, eine Linksableitung für die Eingabe x zu finden.
- Da M hierbei den Syntaxbaum von oben nach unten aufbaut, wird M als *Top-Down Parser* bezeichnet.
- Dann gilt $S \Rightarrow_L^I x_1 \dots x_n$ gdw. $(q, x_1 \dots x_n, S) \vdash^{I+n} (q, \varepsilon, \varepsilon)$.
- Daher folgt

$$x \in L(G) \Leftrightarrow S \Rightarrow_L^* x \Leftrightarrow (q, x, S) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon) \Leftrightarrow x \in L(M)$$

Beweis von $\text{CFL} \subseteq \{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\}$

Beispiel

- Betrachte die Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$ mit den Regeln

$$P: S \rightarrow aSb \quad (1) \quad S \rightarrow \varepsilon \quad (2)$$

- Der zugehörige PDA besitzt dann die Anweisungen

$$\delta: qaa \rightarrow q \quad (0) \quad qbb \rightarrow q \quad (0')$$

$$q\varepsilon S \rightarrow qaSb \quad (1') \quad q\varepsilon S \rightarrow q \quad (2')$$

- Der Linksableitung $S \xRightarrow{(1)} aSb \xRightarrow{(1)} aaSbb \xRightarrow{(2)} aabb$ in G entspricht dann die Rechnung

$$\begin{aligned} (q, aabb, S) &\stackrel{(1')}{\vdash} (q, aabb, aSb) \stackrel{(0)}{\vdash} (q, abb, Sb) \stackrel{(1')}{\vdash} (q, abb, aSbb) \\ &\stackrel{(0)}{\vdash} (q, bb, Sbb) \stackrel{(2')}{\vdash} (q, bb, bb) \stackrel{(0')}{\vdash} (q, b, b) \stackrel{(0')}{\vdash} (q, \varepsilon, \varepsilon) \end{aligned}$$

von M und umgekehrt.



Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \text{CFL}$ **Idee:**

Konstruiere zu einem PDA $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#)$ eine kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit Variablen X_{pAq} , $A \in \Gamma$, $p, q \in Z$, so dass folgende Äquivalenz gilt:

$$X_{pAq} \Rightarrow^* x \text{ gdw. } (p, x, A) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon).$$

- Ein Wort x soll also genau dann in G aus X_{pAq} ableitbar sein, wenn M ausgehend vom Zustand p bei Lesen von x in den Zustand q gelangen kann und dabei das Zeichen A aus dem Keller entfernt.
- Hierzu fügen wir für jede Anweisung $puA \rightarrow p_1A_1 \dots A_k$, $k \geq 0$, die folgenden Regeln zu P hinzu:

$$\text{Für jede Zustandsfolge } p_2, \dots, p_{k+1}: X_{pAp_{k+1}} \rightarrow uX_{p_1A_1p_2} \dots X_{p_kA_kp_{k+1}}$$

- Um damit alle Wörter $x \in L(M)$ aus S ableiten zu können, benötigen wir jetzt nur noch die Regeln

$$S \rightarrow X_{q_0\#q}, q \in Z$$

Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \text{CFL}$

Beispiel

- Betrachte den PDA $M = (\{p, q\}, \{a, b\}, \{A, \#\}, \delta, p, \#)$ mit den Anweisungen

$$\begin{array}{lll} \delta : p\varepsilon\# \rightarrow q & (1) & pa\# \rightarrow pA & (2) & paA \rightarrow pAA & (3) \\ & & pbA \rightarrow q & (4) & qbA \rightarrow q & (5) \end{array}$$

- Dann erhalten wir die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit der Variablenmenge

$$V = \{S, X_{p\#\#}, X_{p\#q}, X_{q\#\#}, X_{q\#q}, X_{pAp}, X_{pAq}, X_{qAp}, X_{qAq}\}.$$

Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \text{CFL}$

Beispiel (Fortsetzung)

- P enthält neben den beiden Startregeln $S \rightarrow X_{p\#p}, X_{p\#q}$ ($0, 0'$) die folgenden Produktionen:

Anweisung	k	p_2, \dots, p_{k+1}	zugehörige Regeln
$p\epsilon\# \rightarrow q$	(1)	0	- $X_{p\#q} \rightarrow \epsilon$ (1')
$pa\# \rightarrow pA$	(2)	1	p $X_{p\#p} \rightarrow aX_{pAp}$ (2') q $X_{p\#q} \rightarrow aX_{pAq}$ (2'')
$paA \rightarrow pAA$	(3)	2	p, p $X_{pAp} \rightarrow aX_{pAp}X_{pAp}$ (3') p, q $X_{pAq} \rightarrow aX_{pAp}X_{pAq}$ (3'') q, p $X_{pAp} \rightarrow aX_{pAq}X_{qAp}$ (3''') q, q $X_{pAq} \rightarrow aX_{pAq}X_{qAq}$ (3'''')
$pbA \rightarrow q$	(4)	0	- $X_{pAq} \rightarrow b$ (4')
$qbA \rightarrow q$	(5)	0	- $X_{qAq} \rightarrow b$ (5')

Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \text{CFL}$

Beispiel (Schluss)

- Die Anweisungen

$$\begin{array}{lll} \delta : p\varepsilon\# \rightarrow q & (1) & pa\# \rightarrow pA & (2) & paA \rightarrow pAA & (3) \\ & & pbA \rightarrow q & (4) & qbA \rightarrow q & (5) \end{array}$$

von M führen also auf die folgenden Regeln von G :

$$\begin{array}{ll} S \rightarrow X_{p\#p}, X_{p\#q} & (0, 0') & X_{p\#q} \rightarrow \varepsilon & (1') \\ X_{p\#p} \rightarrow aX_{pAp} & (2') & X_{p\#q} \rightarrow aX_{pAq} & (2'') \\ X_{pAp} \rightarrow aX_{pAp}X_{pAp} & (3') & X_{pAq} \rightarrow aX_{pAp}X_{pAq} & (3'') \\ X_{pAp} \rightarrow aX_{pAq}X_{qAp} & (3''') & X_{pAq} \rightarrow aX_{pAq}X_{qAq} & (3''''') \\ X_{pAq} \rightarrow b & (4') & X_{qAq} \rightarrow b & (5') \end{array}$$

- Der akzeptierenden Rechnung

$$(p, aabb, \#) \stackrel{(2)}{\vdash} (p, abb, A) \stackrel{(3)}{\vdash} (p, bb, AA) \stackrel{(4)}{\vdash} (q, b, A) \stackrel{(5)}{\vdash} (q, \varepsilon, \varepsilon)$$

von M entspricht dann in G die Linksableitung

$$\underline{S} \stackrel{(0')}{\Rightarrow} X_{p\#q} \stackrel{(2'')}{\Rightarrow} aX_{pAq} \stackrel{(3''''')}{\Rightarrow} aaX_{pAq}X_{qAq} \stackrel{(4')}{\Rightarrow} aabX_{qAq} \stackrel{(5')}{\Rightarrow} aabb$$

Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \text{CFL}$

- Für einen PDA $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#)$ sei G die Grammatik (V, Σ, P, S) mit $V = \{S\} \cup \{X_{pAq} \mid p, q \in Z, A \in \Gamma\}$, wobei P neben den Regeln $S \rightarrow X_{q_0\#q}$, $q \in Z$, für jede Anweisung

$$p u A \rightarrow p_1 A_1 \dots A_k, \quad k \geq 0$$

von M und jede Zustandsfolge p_2, \dots, p_{k+1} die folgende Regel enthält:

$$X_{pA p_{k+1}} \rightarrow u X_{p_1 A_1 p_2} \dots X_{p_k A_k p_{k+1}}$$

- Dann lässt sich mit Hilfe der Äquivalenz

$$X_{pAq} \Rightarrow^* x \text{ gdw. } (p, x, A) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$$

deren Beweis wir später nachholen, leicht die Korrektheit von G zeigen:

$$x \in L(M) \Leftrightarrow (q_0, x, \#) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon) \text{ für ein } q \in Z$$

$$\Leftrightarrow S \Rightarrow X_{q_0\#q} \Rightarrow^* x \text{ für ein } q \in Z$$

$$\Leftrightarrow x \in L(G)$$

Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \text{CFL}$

- Es bleibt zu zeigen, dass für alle $p, q \in Z$, $A \in \Gamma$ und $x \in \Sigma^*$ folgende Äquivalenz gilt:

$$X_{pAq} \Rightarrow^* x \text{ gdw. } (p, x, A) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon) \quad (*)$$

- Hierzu zeigen wir durch Induktion über m folgende stärkere Behauptung:

$$X_{pAq} \Rightarrow^m x \text{ gdw. } (p, x, A) \vdash^m (q, \varepsilon, \varepsilon) \quad (**)$$

Beweis von $X_{pAq} \Rightarrow^m x \text{ gdw. } (p, x, A) \vdash^m (q, \varepsilon, \varepsilon) \quad (**)$

Induktionsanfang ($m = 0$): Da sowohl $X_{pAq} \Rightarrow^0 x$ als auch $(p, x, A) \vdash^0 (q, \varepsilon, \varepsilon)$ falsch sind, gilt $(**)$ für $m = 0$.

Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \text{CFL}$

Beweis von $X_{pAq} \Rightarrow^m x$ gdw. $(p, x, A) \vdash^m (q, \varepsilon, \varepsilon)$ (**)

Induktionsschritt ($m \rightsquigarrow m+1$) von links nach rechts:

- Sei x aus X_{pAq} in $m+1$ Schritten ableitbar und sei α die im ersten Schritt abgeleitete Satzform: $X_{pAq} \Rightarrow \alpha \Rightarrow^m x$
- Wegen $X_{pAq} \rightarrow_G \alpha$ gibt es eine Anweisung $puA \rightarrow p_1 A_1 \dots A_k$ und Zustände $p_2, \dots, p_{k+1} \in Z$ mit $p_{k+1} = q$ und

$$\alpha = u X_{p_1 A_1 p_2} \dots X_{p_k A_k p_{k+1}}$$

- Wegen $\alpha \Rightarrow^m x$ ex. eine Zerlegung $x = uu_1 \dots u_k$ von x sowie Zahlen $m_i \geq 1$ mit $m_1 + \dots + m_k = m$ und

$$X_{p_i A_i p_{i+1}} \Rightarrow^{m_i} u_i \text{ f\"ur } i = 1, \dots, k$$

- Nach IV gibt es somit Rechnungen

$$(p_i, u_i, A_i) \vdash^{m_i} (p_{i+1}, \varepsilon, \varepsilon) \text{ f\"ur } i = 1, \dots, k$$

Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \text{CFL}$

Beweis von $X_{pAq} \Rightarrow^m x$ gdw. $(p, x, A) \vdash^m (q, \varepsilon, \varepsilon)$ (**)

- Nach IV gibt es somit Rechnungen

$$(p_i, u_i, A_i) \vdash^{m_i} (p_{i+1}, \varepsilon, \varepsilon) \text{ f\"ur } i = 1, \dots, k$$

aus denen sich die gesuchte Rechnung der Länge $m + 1$ zusammensetzen lässt:

$$\begin{aligned} (p, x, A) &= (p, uu_1 \dots u_k, A) \\ &\vdash (p_1, u_1 \dots u_k, A_1 \dots A_k) \\ &\vdash^{m_1} (p_2, u_2 \dots u_k, A_2 \dots A_k) \\ &\vdots \\ &\vdash^{m_{k-1}} (p_k, u_k, A_k) \\ &\vdash^{m_k} (p_{k+1}, \varepsilon, \varepsilon) = (q, \varepsilon, \varepsilon) \end{aligned}$$

Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \text{CFL}$

Beweis von $X_{pAq} \Rightarrow^m x$ gdw. $(p, x, A) \vdash^m (q, \varepsilon, \varepsilon)$ (**)

Induktionsschritt ($m \rightsquigarrow m+1$) von rechts nach links:

- Sei eine Rechnung der Länge $m+1$ gegeben und sei $puA \rightarrow p_1A_1 \dots A_k$ die erste Anweisung:

$$(p, x, A) \vdash (p_1, x', A_1 \dots A_k) \vdash^m (q, \varepsilon, \varepsilon)$$

- Im Fall $k \geq 2$ sei p_i für $i = 2, \dots, k$ der Zustand, in den M mit dem Kellerinhalt $A_i \dots A_k$ gelangt.
- Zudem sei u_i für $i = 1, \dots, k$ das zwischen den Besuchen von p_i und p_{i+1} gelesene Teilwort von x , wobei $p_{k+1} = q$ ist.
- Dann gilt $x = ux'$ und $x' = u_1 \dots u_k$ sowie

$$(p_1, x', A_1 \dots A_k) \vdash^* (p_i, u_i \dots u_k, A_i \dots A_k) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$$

- Für $i = 1, \dots, k$ ex. daher Zahlen $m_i \geq 1$ mit

$$(p_i, u_i, A_i) \vdash^{m_i} (p_{i+1}, \varepsilon, \varepsilon) \text{ und } m_1 + \dots + m_k = m$$

Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \text{CFL}$

Beweis von $X_{pAq} \Rightarrow^m x$ gdw. $(p, x, A) \vdash^m (q, \varepsilon, \varepsilon)$ (**)

- Für $i = 1, \dots, k$ ex. daher Zahlen $m_i \geq 1$ mit

$$(p_i, u_i, A_i) \vdash^{m_i} (p_{i+1}, \varepsilon, \varepsilon) \text{ und } m_1 + \dots + m_k = m$$

- Nach IV ex. daher für $i = 1, \dots, k$ die Ableitungen

$$X_{p_i A_i p_{i+1}} \Rightarrow^{m_i} u_i$$

- Aufgrund der Anweisung $puA \rightarrow p_1 A_1 \dots A_k$ enthält P zudem die Regel $X_{pAq} \rightarrow uX_{p_1 A_1 p_2} \dots X_{p_{k-1} A_{k-1} p_k} X_{p_k A_k q}$, die sich wie folgt mit obigen Ableitungen zusammensetzen lässt:

$$\begin{aligned} X_{pAq} &\Rightarrow uX_{p_1 A_1 p_2} \dots X_{p_{k-1} A_{k-1} p_k} X_{p_k A_k q} \\ &\Rightarrow^{m_1} uu_1 \dots X_{p_{k-1} A_{k-1} p_k} X_{p_{k-1} A_k q} \\ &\quad \vdots \\ &\Rightarrow^{m_{k-1}} uu_1 \dots u_{k-1} X_{p_k A_k q} \\ &\Rightarrow^{m_k} uu_1 \dots u_k = x \end{aligned}$$

□

Deterministische Kellerautomaten

In der Praxis spielen det. Kellerautomaten eine wichtige Rolle.

Definition

- Ein Kellerautomat heißt **deterministisch**, falls \vdash rechtseindeutig ist:

$$K \vdash K_1 \wedge K \vdash K_2 \Rightarrow K_1 = K_2.$$

- Äquivalent hierzu ist, dass die Überföhrungsfunktion δ für alle $(q, a, A) \in Z \times \Sigma \times \Gamma$ folgende Bedingung erfüllt:

$$\|\delta(q, a, A)\| + \|\delta(q, \varepsilon, A)\| \leq 1.$$

- Hat nämlich eine Konfiguration $K = (q, x_i \dots x_n, A_1 \dots A_l)$ zwei Folgekonfigurationen $K_1 \neq K_2$, so gibt es 3 Fälle:
 - In K_1 und K_2 wurde x_i gelesen: Dann ist $\|\delta(q, x_i, A_1)\| \geq 2$.
 - Weder in K_1 noch in K_2 wurde x_i gelesen: Dann ist $\|\delta(q, \varepsilon, A_1)\| \geq 2$.
 - In K_1 wurde x_i gelesen, aber nicht in K_2 : Dann ist $\|\delta(q, x_i, A_1)\| \geq 1$ und $\|\delta(q, \varepsilon, A_1)\| \geq 1$.
- Gilt umgekehrt $\|\delta(q, a, A)\| + \|\delta(q, \varepsilon, A)\| \geq 2$, so ist leicht zu sehen, dass die Konfiguration $K = (q, a, A)$ zwei Folgekonfigurationen hat.

Beispiel

- Betrachte den PDA $M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \{A, B, \#\}, \delta, q_0, \#)$ mit

$$\begin{array}{llll} \delta: & q_0 a \# \rightarrow q_0 A \# & q_0 b \# \rightarrow q_0 B \# & q_0 a A \rightarrow q_0 A A & q_0 b A \rightarrow q_0 B A \\ & q_0 a B \rightarrow q_0 A B & q_0 b B \rightarrow q_0 B B & q_0 c A \rightarrow q_1 A & q_0 c B \rightarrow q_1 B \\ & q_1 a A \rightarrow q_1 & q_1 b B \rightarrow q_1 & q_1 \varepsilon \# \rightarrow q_2 & \end{array}$$

Darstellung von δ in Tabellenform

δ	$q_0, \#$	q_0, A	q_0, B	$q_1, \#$	q_1, A	q_1, B	$q_2, \#$	q_2, A	q_2, B
ε				q_2					
a	$q_0 A \#$	$q_0 A A$	$q_0 A B$		q_1				
b	$q_0 B \#$	$q_0 B A$	$q_0 B B$			q_1			
c		$q_1 A$	$q_1 B$						

- Man beachte, dass jedes Tabellenfeld höchstens eine Anweisung enthält und jede Spalte mit einem ε -Eintrag keine weiteren Einträge enthält.
- Daher ist die Bedingung $\|\delta(q, a, A)\| + \|\delta(q, \varepsilon, A)\| \leq 1$ für alle $q \in Z$, $a \in \Sigma$ und $A \in \Gamma$ erfüllt.

Deterministische Kellerautomaten

Frage

- Können deterministische Kellerautomaten zumindest alle regulären Sprachen durch Leeren des Kellers akzeptieren?
- Kann z.B. die Sprache $L = \{a, aa\}$ von einem deterministischen Kellerautomaten M durch Leeren des Kellers akzeptiert werden?

Antwort: Nein

- Um $x = a$ zu akzeptieren, muss M den Keller nach Lesen von a leeren und kann somit keine anderen Wörter mit dem Präfix a akzeptieren.
- Deterministische Kellerautomaten können also durch Leeren des Kellers nur **präfixfreie** Sprachen L akzeptieren (d.h. kein Wort $x \in L$ ist Präfix eines anderen Wortes in L).

Lösung des Problems

Wir vereinbaren, dass deterministische Kellerautomaten ihre Eingabe durch Erreichen eines Endzustands akzeptieren dürfen.

Deterministische Kellerautomaten

Definition

- Ein **Kellerautomat mit Endzuständen** wird durch ein 7-Tupel $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, E)$ beschrieben.
- Dabei sind die Komponenten $Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#$ wie bei einem PDA.
- Zusätzlich ist $E \subseteq Z$ eine Menge von **Endzuständen**.
- Die von M **akzeptierte** oder **erkannte Sprache** ist

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists p \in E, \alpha \in \Gamma^* : (q_0, x, \#) \vdash^* (p, \varepsilon, \alpha)\}.$$

- M ist ein **det. Kellerautomat mit Endzuständen** (kurz: **DPDA**), falls M für alle $(q, a, A) \in Z \times \Sigma \times \Gamma$ zusätzlich folgende Bedingung erfüllt:

$$\|\delta(q, a, A)\| + \|\delta(q, \varepsilon, A)\| \leq 1.$$

- Weiter sei **DCFL** = $\{L(M) \mid M \text{ ist ein DPDA}\}$.

Frage

Ist DCFL unter Komplementbildung abgeschlossen?

Antwort

Ja. Allerdings ergeben sich beim Versuch, einfach die End- und Nicht-endzustände eines DPDA M zu vertauschen, um einen DPDA \overline{M} für $\overline{L(M)}$ zu erhalten, folgende Schwierigkeiten:

- 1 Falls M eine Eingabe x nicht zu Ende liest, wird x weder von M noch von \overline{M} akzeptiert.
- 2 Falls M nach dem Lesen von x noch ε -Übergänge ausführt und dabei End- und Nichtendzustände besucht, wird x von M und von \overline{M} akzeptiert.

DPDAs, die ihre Eingabe zu Ende lesen

Satz

Jede Sprache $L \in \text{DCFL}$ wird von einem DPDA M' erkannt, der alle Eingaben zu Ende liest (und bei allen Eingaben hält).

Beweisskizze

Falls ein DPDA $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, E)$ eine Eingabe $x = x_1 \dots x_n$ nicht zu Ende liest, muss einer der folgenden drei Gründe vorliegen:

- ① M gerät in eine Konfiguration $(q, x_i \dots x_n, \varepsilon)$, $i \leq n$, mit leerem Keller.
- ② M gerät in eine Konfiguration $(q, x_i \dots x_n, A\gamma)$, $i \leq n$, in der wegen $\delta(q, x_i, A) = \delta(q, \varepsilon, A) = \emptyset$ keine Anweisung ausführbar ist.
- ③ M gerät in eine Konfiguration $(q, x_i \dots x_n, A\gamma)$, $i \leq n$, so dass M ausgehend von (q, ε, A) eine unendliche Folge von ε -Anweisungen ausführt.

Dies lässt sich vermeiden, indem zu Beginn der Rechnung ein neues Kellerzeichen auf dem Kellerboden platziert wird und ein neuer Fehlerzustand hinzugefügt wird, in dem der Rest der Eingabe gelesen wird. □

Komplementabschluss von DCFL

Satz

Die Klasse DCFL ist unter Komplement abgeschlossen.

Beweisskizze

- Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, E)$ ein DPDA, der alle Eingaben zu Ende liest, und sei $L(M) = L$.
- Wir konstruieren einen DPDA \bar{M} für \bar{L} , der M simuliert.
- Dabei merkt sich \bar{M} in seinem Zustand (q, i) neben dem aktuellen Zustand q von M in der Komponente i , ob M nach Lesen des letzten Zeichens (bzw. seit Rechenbeginn) einen Endzustand besucht hat ($i = 1$) oder nicht ($i = 2$).
- Möchte M das nächste Zeichen lesen und befindet sich \bar{M} im Zustand $(q, 2)$, so macht \bar{M} noch einen Umweg über den Endzustand $(q, 3)$.

Man beachte, dass \bar{M} in einem Endzustand keine ε -Übergänge macht. \square

Definition

Für eine Sprachklasse \mathcal{C} bezeichne $\text{co-}\mathcal{C}$ die Klasse $\{\bar{L} \mid L \in \mathcal{C}\}$ aller Komplemente von Sprachen in \mathcal{C} .

Korollar

- $\text{REG} = \text{co-REG}$,
- $\text{DCFL} = \text{co-DCFL}$,
- $\text{CFL} \neq \text{co-CFL}$.

Satz

Die Klasse DCFL ist nicht abgeschlossen unter Schnitt, Vereinigung, Produkt und Sternhülle.

$A, B \in \text{DCFL} \not\Rightarrow A \cap B \in \text{DCFL}$

- Die beiden Sprachen

$$L_1 = \{a^n b^m c^m \mid n, m \geq 0\} \quad \text{und} \quad L_2 = \{a^n b^n c^m \mid n, m \geq 0\}$$

sind sogar deterministisch kontextfrei (siehe Übungen).

- Da $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ nicht kontextfrei ist, liegt der Schnitt dieser Sprachen natürlich auch nicht in DCFL.

$A, B \in \text{DCFL} \not\Rightarrow A \cup B \in \text{DCFL}$

- Da DCFL unter Komplementbildung abgeschlossen ist, kann DCFL wegen de Morgan dann auch nicht unter Vereinigung abgeschlossen sein.

- Beispielsweise sind die Sprachen

$$L_3 = \{a^i b^j c^k \mid i \neq j \wedge i, j, k \geq 1\} \text{ und } L_4 = \{a^i b^j c^k \mid j \neq k \wedge i, j, k \geq 1\}.$$

deterministisch kontextfrei (siehe Übungen).

- Ihre Vereinigung gehört aber nicht zu DCFL, d.h.

$$L_3 \cup L_4 = \{a^i b^j c^k \mid (i \neq j \vee j \neq k) \wedge i, j, k \geq 1\} \in \text{CFL} \setminus \text{DCFL}.$$

- DCFL ist nämlich unter Schnitt mit regulären Sprachen abgeschlossen (siehe Übungen).

- Daher wäre mit $L_3 \cup L_4$ auch die Sprache

$$\overline{(L_3 \cup L_4)} \cap L(a^+ b^+ c^+) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$$

(deterministisch) kontextfrei.

$A, B \in \text{DCFL} \not\Rightarrow AB \in \text{DCFL}$

- Betrachte die DCFL Sprachen

$$L_3 = \{a^i b^j c^k \mid i \neq j \wedge i, j, k \geq 1\} \text{ und } L_4 = \{a^i b^j c^k \mid j \neq k \wedge i, j, k \geq 1\}.$$

- Wir wissen bereits, dass $L = L_3 \cup L_4 \notin \text{DCFL}$ ist.
- Dann ist aber auch die Sprache

$$0L = 0L_3 \cup 0L_4 \notin \text{DCFL},$$

da sich ein DPDA $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, E)$ für $0L$ leicht zu einem DPDA M' für L umbauen ließe:

- Sei (p, ε, γ) die Konfiguration, die M nach Lesen der Eingabe 0 erreicht.
- Dann erkennt der DPDA $M' = (Z \cup \{s\}, \Sigma, \Gamma, \delta', s, \#, E)$ die Sprache L , wobei δ' wie folgt definiert ist:

$$\delta'(q, u, A) = \begin{cases} (p, \gamma), & (q, u, A) = (s, \varepsilon, \#), \\ \delta(q, u, A), & (q, u, A) \in Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma. \end{cases}$$

$A, B \in \text{DCFL} \not\Rightarrow AB \in \text{DCFL}$

- Betrachte die DCFL Sprachen

$$L_3 = \{a^i b^j c^k \mid i \neq j \wedge i, j, k \geq 1\} \text{ und } L_4 = \{a^i b^j c^k \mid j \neq k \wedge i, j, k \geq 1\}.$$

- Es ist leicht zu sehen, dass auch die beiden Sprachen $\{\varepsilon, 0\}$ und $L_5 = L_3 \cup 0L_4$ in DCFL sind (siehe Übungen).
- Ihr Produkt $\{\varepsilon, 0\} L_5 = L_5 \cup 0L_5 = L_3 \cup 0L_4 \cup 0L_3 \cup 00L_4$ gehört aber nicht zu DCFL.
- Da DCFL unter Schnitt mit regulären Sprachen abgeschlossen ist, wäre andernfalls auch die Sprache

$$\{\varepsilon, 0\} L_5 \cap 0\{a, b, c\}^* = 0L_3 \cup 0L_4$$

in DCFL, was wir bereits ausgeschlossen haben.

Bemerkung

Dass DCFL auch nicht unter Sternhüllenbildung abgeschlossen ist, lässt sich ganz ähnlich zeigen (siehe Übungen).

Abschlusseigenschaften der Klassen REG, DCFL und CFL

	Vereinigung	Schnitt	Komplement	Produkt	Sternhülle
REG	<i>ja</i>	<i>ja</i>	<i>ja</i>	<i>ja</i>	<i>ja</i>
DCFL	<i>nein</i>	<i>nein</i>	<i>ja</i>	<i>nein</i>	<i>nein</i>
CFL	<i>ja</i>	<i>nein</i>	<i>nein</i>	<i>ja</i>	<i>ja</i>

- Die Klasse DCFL lässt sich auch mit Hilfe von speziellen kontextfreien Grammatiken charakterisieren, den so genannten $LR(k)$ -Grammatiken.
- Der erste Buchstabe L steht für die Leserichtung bei der Syntaxanalyse, d.h. das Eingabewort x wird von links (nach rechts) gelesen.
- Der zweite Buchstabe R bedeutet, dass bei der Syntaxanalyse eine Rechtsableitung entsteht.
- Schließlich gibt der Parameter k an, wieviele Zeichen man über das aktuelle Eingabezeichen hinauslesen muss, damit der nächste Schritt eindeutig feststeht (k wird auch als *Lookahead* bezeichnet).
- Durch $LR(0)$ -Grammatiken lassen sich nur die präfixfreien Sprachen in DCFL erzeugen.
- Dagegen erzeugen die $LR(k)$ -Grammatiken für jedes $k \geq 1$ genau die Sprachen in DCFL.
- Daneben gibt es noch $LL(k)$ -Grammatiken, die für wachsendes k immer mehr deterministisch kontextfreie Sprachen erzeugen.