Probeklausur

Hinweise zur Klausur:

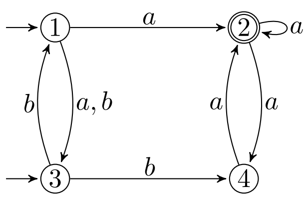
- Klausurtermin: 24. 2. 2017 um 9 Uhr (Einlass) in RUD26 0'110 und 0'115.
- Nachklausurtermin: 5. 4. 2017 um 9 Uhr (Einlass) in RUD26 0'115 (die Nachklausur kann auch ohne Teilnahme an der ersten Klausur mitgeschrieben werden).
- Anmeldung in Agnes nur mit Übungsschein (d.h. 190 Punkte in Moodle oder alter ÜS) bis 17.2.2017 (Klausur) bzw. 29.3.2017 (Nachklausur).
- Die Bearbeitungszeit wird 120 Minuten betragen.
- Bitte bringen Sie Ihren Studenten- und einen Lichtbildausweis (Personalausweis, Reisepass oder Führerschein) mit.
- Als Hilfsmittel sind eigene Notizen (auch gedruckt) und Skript erlaubt. Bücher und elektronische Geräte (Taschenrechner, Handy etc.) sind **nicht** zugelassen.
- Am 21.2.2017 ab 11.15 Uhr findet in Rud 26 0'307 eine Fragestunde statt.

Aufgabe 1 — ***12 Punkte***

Betrachten Sie den untenstehenden NFA N.

(a) Welche der Wörter ε, ba, $aaba$ und $bbbba$ gehören zu $L(N)$?

(b) Wandeln Sie N mit der Potenzmengenkonstruktion in einen äquivalenten DFA um.
Hinweis: Es müssen nur erreichbare Zustände angegeben werden.



Aufgabe 2 — ***18 Punkte***

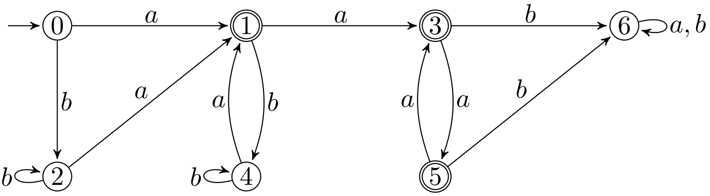
Betrachten Sie den untenstehenden DFA M mit $L(M) = L$.

(a) Geben Sie jeweils einen möglichst kurzen regulären Ausdruck für die Sprachen $L^2_{0,1}$, $L^3_{1,5}$ und $L^5_{4,2}$ an.

(b) Minimieren Sie M mit dem Verfahren aus der Vorlesung.

(c) Geben Sie für jedes Wortpaar (x, y) mit $x, y \in \{\varepsilon, aaa, aba, abab, ababa\}$ an, ob $x \sim_L y$ gilt oder nicht.

(d) Geben Sie zwei Repräsentantensysteme für die Nerode-Relation $\sim_L$ an, die disjunkt sind.



Aufgabe 3 ***18 Punkte***

(a) Zeigen Sie, dass $A = \left\{x^n \# x^n \,\middle|\, x \in \{a,b\}^*, n \geq 0\right\}$ nicht regulär ist.

(b) Geben Sie die Pumpingzahlen bzgl. des Pumpinglemmas für reguläre Sprachen von $B = \{bbb\}^*$, $C = \{aa\}$ sowie $B \cup C$ an.

(c) Es seien l_D und l_E die Pumpingzahlen (bzgl. des Pumpinglemmas für reguläre Sprachen) zweier beliebiger Sprachen D und E mit endlicher Pumpingzahl. Geben Sie eine obere Schranke für die Pumpingzahl $l_{D\cup E}$ von $D \cup E$ an und begründen Sie.

Aufgabe 4 ***15 Punkte***

Betrachten Sie die Sprache

$$L = \Big\{ w \in \{a,b,c\}^* \;\Big|\; \#_a(w) = \#_b(w) = \#_c(w) \text{ und in } w \text{ steht kein } c \text{ links von einem } a \Big\}.$$

Zeigen Sie, dass L kontextsensitiv ist, indem Sie eine Grammatik vom Typ 1 für L angeben.

Aufgabe 5 ***18 Punkte***

Betrachten Sie die Grammatik $G = (\{S,X,Y\}, \{a,b\}, P, S)$ mit

$$\begin{aligned} P\colon\quad S &\to SX,\ a \\ X &\to YS,\ YY,\ a \\ Y &\to SX,\ XY,\ b \end{aligned}$$

sowie die Wörter $w_1 = abbb$ und $w_2 = aabb$.

(a) Testen Sie ob w_1 bzw. w_2 in $L(G)$ sind. Führen Sie dazu den CYK-Algorithmus für ein geeignetes Wort $w_3 \in \{a,b\}^*$ der Länge 5 durch.

(b) Geben Sie für das in $L(G)$ enthaltene Wort w_i (mit $i \in \{1,2\}$) einen Syntaxbaum und die zugehörige Linksableitung an.

(c) Ist G eindeutig? Begründen Sie.

(d) Geben Sie einen PDA für $L(G)$ an.

Aufgabe 6 ***12 Punkte***

Gibt es Sprachen A und B mit folgenden Eigenschaften? Falls ja, geben Sie jeweils solche an, falls nein, begründen Sie, warum keine existieren.

(a) $A = L(G)$ und G ist eine Typ-1-Grammatik in Chomsky-Normalform.

(b) $A \cap B = \emptyset$, $A \leq B$ und $B \leq A$.

(c) $A \cap B = \emptyset$, $A \nleq B$ und $B \nleq A$.

(d) $A, B \subseteq \{a, b\}^*$, $A \notin \mathsf{CFL}$, $B \in \mathsf{REG}$, und $A \cup 0B$ ist regulär.

Aufgabe 7 ***15 Punkte***

Stimmen folgende Aussagen? Begründen Sie.

(a) Die Sprache L_1 ist entscheidbar, wobei
$L_1 = \left\{w \in \{0,1\}^* \;\middle|\; \exists x \in \{0,1\}^* \colon \text{die Ausgabe } M_w(x) \text{ hat Länge } > 0\right\}$.

(b) Die Sprache L_1 ist entscheidbar, wobei
$L_1 = \left\{w \in \{0,1\}^* \;\middle|\; \exists w' \in \{0,1\}^* \colon M_w \text{ akzeptiert die Eingabe } w'\right\}$.

(c) Die Sprache L_2 ist semi-entscheidbar, wobei
$L_2 = \left\{w \in \{0,1\}^* \;\middle|\; \exists w' \in \{0,1\}^* \colon M_w \text{ entscheidet die Eingabe } w'\right\}$.

Aufgabe 8 ***10 Punkte***

Zeigen Sie

$$\text{VC} \leq^p \textsc{Clique},$$

indem Sie eine Reduktionsfunktion angeben, die VC in Polynomialzeit auf CLIQUE reduziert. Begründen Sie die Korrektheit Ihrer Reduktionsfunktion.

Aufgabe 9 ***12 Punkte***

Geben Sie jeweils ein Beispiel für folgende Objekte an:

(a) Ein GOTO-Programm P für eine injektive, aber nicht surjektive Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

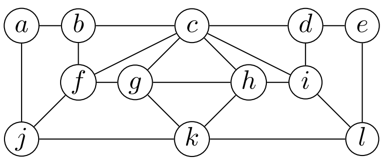
(b) Zwei Sprachen $L, L' \subseteq \{a, b\}^*$ mit $L \neq L'$ und $\sim_L = \sim_{L'}$.

(c) Eine PCP-Instanz I, deren kürzeste Lösung die Länge 12 hat.

(d) Eine Sprache A, die NP-schwer und co -NP-schwer ist.

Aufgabe 10 ***20 Punkte***

Betrachten Sie folgenden Graphen G.



(a) Bestimmen Sie folgende Parameter. Begründen Sie.

(1) $\alpha(G) = \max\{\|S\| \mid S \text{ ist stabil in } G\}$,
(2) $\chi(G) = \min\{k \geq 1 \mid G \text{ ist } k\text{-färbbar}\}$,
(3) $\mu(G) = \max\{\|M\| \mid M \text{ ist ein Matching in } G\}$,
(4) $\omega(G) = \max\{\|C\| \mid C \text{ ist eine Clique in } G\}$,
(5) $\beta(G) = \min\{\|U\| \mid U \text{ ist eine Knotenüberdeckung in } G\}$.

(b) Wieviele Kanten müssen zu G jeweils mindestens hinzugefügt werden, um

(1) eine Eulerlinie,

(2) eine Eulertour,

(3) einen Hamiltonpfad,

(4) einen Hamiltonkreis

zu erhalten? Begründen Sie.

(c) Geben Sie einen Subgraphen von G an, der zu folgendem Graphen isomorph ist.