

Übungsblatt 13

*Besprechung der mündlichen Aufgaben am 31.1.–3. 2. 2017
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 15:10 Uhr am 8. 2. 2017*

Essentielle Begriffe: GOTO-Programm, \mathcal{O} -Notation, $\text{DTIME}(t(n))$, P, (NP)

Abzugeben sind 3 Blätter jeweils mit den Aufgaben: 87; 88; 92

Aufgabe 86

mündlich

Geben Sie ein GOTO-Programm an, das bei Eingabe n die n -te Fibonacci-Zahl $f(n)$ berechnet. Dabei ist $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definiert durch

$$f(n) = \begin{cases} n & \text{wenn } n \leq 1 \\ f(n-1) + f(n-2) & \text{wenn } n \geq 2. \end{cases}$$

Aufgabe 87 Gegeben sei die 2-DTM $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \emptyset)$

10 Punkte

mit $Z = \{q_0, q_1, q'_0, q'_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a\}$, $\Gamma = \{a, \phi, \sqcup\}$ und

$$\delta : \begin{array}{llll} q_0 a \sqcup \rightarrow q_1 \phi \sqcup RN, & q_0 \phi \sqcup \rightarrow q_0 \phi \sqcup RN, & q_1 a \sqcup \rightarrow q'_0 a \sqcup RN, & q_1 \phi \sqcup \rightarrow q_1 \phi \sqcup RN, \\ q'_0 a \sqcup \rightarrow q'_1 \phi \sqcup RN, & q'_0 \phi \sqcup \rightarrow q'_0 \phi \sqcup RN, & q'_1 a \sqcup \rightarrow q'_0 a \sqcup RN, & q'_1 \phi \sqcup \rightarrow q'_1 \phi \sqcup RN, \\ q_0 \sqcup \sqcup \rightarrow q_2 \sqcup a LR, & q'_1 \sqcup \sqcup \rightarrow q_2 \sqcup a LR, & q_2 a \sqcup \rightarrow q_2 a \sqcup LN, & q_2 \phi \sqcup \rightarrow q_2 \phi \sqcup LN, \\ q_2 \sqcup \sqcup \rightarrow q_0 \sqcup \sqcup RN & & & \end{array}$$

- Beschreiben Sie die Rechnung von M bei Eingabe a^7 . (*mündlich*)
- Geben Sie die von M berechnete Funktion g und ihre numerische Repräsentation $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $f(n) = \text{num}_{\{a\}}(g(\text{str}_{\{a\}}(n)))$ an. Begründen Sie. (*mündlich*)
- Geben Sie für f ein GOTO-Programm mit Korrektheitsbegründung an, das nur die Register r_0 bis r_3 nutzt und maximal 16 Anweisungen enthält. (*10 Punkte*)

Aufgabe 88 Es seien $f(x, y) = x \text{ MOD } y$ und $g(x, y) = x \text{ DIV } y$.

10 Punkte

Dabei ist $x \text{ DIV } y$ das maximale $d \in \mathbb{N}$ mit $dy \leq x$ und $x \text{ MOD } y := x - (x \text{ DIV } y)y$.
Geben Sie GOTO-Programme für f und g an.

Aufgabe 89 Stimmen folgende Aussagen? Begründen Sie.

mündlich

- $\sum_{i=1}^n i = \mathcal{O}(n^2)$
- $2^{\mathcal{O}(n)} = \mathcal{O}(2^n)$

Aufgabe 90 Sei Σ ein Alphabet mit $\|\Sigma\| > 1$. Zeigen Sie: **mündlich**

(a) Es existiert kein injektiver Homomorphismus $h : \Sigma^* \rightarrow \{0\}^*$. *(optional)*

Hinweis: Homomorphismen für Sprachen wurden in **Aufgabe 39** definiert.

(b) Es existiert ein injektiver Homomorphismus $h : \Sigma^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ für den h und h^{-1} in Linearzeit berechenbar sind. (*Hinweis:* Nutzen Sie z.B. eine geeignet modifizierte Version der Funktion *bin* aus der Vorlesung.)

(c) Jede Sprache $A \in \text{DTIME}(t(n))$ ist in Linearzeit auf eine Sprache $B \subseteq \{0, 1\}^*$ in $\text{DTIME}(\mathcal{O}(t(n)))$ reduzierbar.

Aufgabe 91 **mündlich**

Begründen Sie, warum die folgenden Probleme effizient lösbar sind, d.h. in P liegen.

- LP_{DFA} (das Leerheitsproblem für DFAs),
- SP_{DFA} (das Schnittproblem für DFAs),
- IP_{DFA} (das Inklusionsproblem für DFAs),
- ÄP_{DFA} (das Äquivalenzproblem für DFAs).

Aufgabe 92 Zeigen Sie: **10+20 Punkte**

(a) NP ist unter \cup , \cap , Produkt und Sternhülle abgeschlossen. *(2+2+3+3 P.)*

(b) Auch P ist unter diesen Operationen abgeschlossen. *(1+1+2+6 ZP.)*

Hinweis: Benutzen Sie dynamische Programmierung (ähnlich dem CYK-Algorithmus), um zu zeigen, dass P unter Sternhülle abgeschlossen ist.

Ein Homomorphismus heißt ε -frei, falls $h(w) \neq \varepsilon$ für alle $w \neq \varepsilon$ gilt.

(c) NP ist unter ε -freien Homomorphismen abgeschlossen. *(2 ZP.)*

(d) NP ist nicht unter beliebigen Homomorphismen abgeschlossen. *(4 ZP.)*

(e) P ist nicht unter ε -freien Homomorphismen abgeschlossen, falls $\text{P} \neq \text{NP}$. *(4 ZP.)*

Hinweis: Ein Weg ist es zu zeigen, dass das Halteproblem entscheidbar wäre, falls NP unter beliebigen Homomorphismen abgeschlossen wäre und dass $\text{SAT} \in \text{P}$ gilt, falls P unter ε -freien Homomorphismen abgeschlossen ist.