

Übungsblatt 12

*Besprechung der mündlichen Aufgaben am 24.1.–27.1.2017
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 15:10 Uhr am 1.2.2017*

Essentielle Begriffe: Satz von Rice, PCP, MPCP

Abzugeben sind 3 Blätter jeweils mit den Aufgaben: 80; 85; 81+84

Aufgabe 79

mündlich, optional

Für eine Sprachklasse \mathcal{S} sei $L_{\mathcal{S}} = \{w \in \{0,1\}^* \mid L(M_w) \in \mathcal{S}\}$. Beweisen sie folgende Variante des Satzes von Rice: $L_{\mathcal{S}}$ ist unentscheidbar, außer wenn $L_{\mathcal{S}} \in \{\emptyset, \{0,1\}^*\}$.

Aufgabe 80

12 Punkte

Bestimmen Sie, welche der folgenden Sprachen entscheidbar, semi-entscheidbar, oder nicht semi-entscheidbar sind. Begründen Sie.

- (a) $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{es gibt ein } w' \in \{0,1\}^* \text{ mit } M_w(w') = 0\}$ (*mündlich*)
- (b) $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{es gibt ein } w' \in \{0,1\}^* \text{ mit } M_{w'}(w) = 0\}$ (*mündlich*)
- (c) $L_3 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \overline{L(M_w)} \text{ ist semi-entscheidbar}\}$ (*mündlich*)
- (d) $L_4 = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w(w) \text{ führt immer die Kopfbewegung } R \text{ aus}\}$ (*mündlich*)
- (e) $L_5 = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w(w) \text{ führt nie die Kopfbewegung } N \text{ aus}\}$ (*mündlich*)
- (f) $L_6 = \{w \in \{0,1\}^* \mid L(M_w) \text{ ist rekursiv aufzählbar}\}$ (*3 Punkte*)
- (g) $L_7 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{es gibt ein } w' \neq w \text{ mit } L(M_w) = L(M_{w'})\}$ (*3 Punkte*)
- (h) $L_8 = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w(w) = w\}$ (*3 Punkte*)
- (i) $L_9 = \{w \in \{0,1\}^* \mid L(M_w) \in \text{REG}\}$ (*3 Punkte*)

Aufgabe 81

8+2 Punkte

Betrachten Sie die Grammatik $G = (\{A, B, C\}, \{a, b\}, P, A)$ mit folgenden Regeln:

$P: A \rightarrow BabC$ (1) $Ba \rightarrow Cba, aBa$ (2,3) $bC \rightarrow bCb$ (4) $C \rightarrow ab$ (5)

- (a) Geben Sie eine Ableitung für das Wort $v = aabbababb$ in G an. (*2 Punkte*)
- (b) Sei $\Gamma = \{A, B, C, a, b, \langle, |, \rangle\}$ und sei f die in der Vorlesung definierte Funktion, die $L(G)$ auf MPCP_{Γ} reduziert. Geben Sie für ein beliebiges Wort $w \in \{a, b\}^*$ explizit die zugehörige MPCP_{Γ} -Instanz $f(w)$ an. (*4 Punkte*)
- (c) Bestimmen Sie eine MPCP_{Γ} -Lösung α der Länge höchstens 23 (höchstens 22, genau 21) für $f(v)$ und das entsprechende Lösungswort. (*2 P., 1+1 ZP.*)

Aufgabe 82 Entscheiden Sie die beiden folgenden PCP-Instanzen: **mündlich**

$$I_1 = \begin{pmatrix} a & ba & abb & bab \\ ab & ab & bb & abb \end{pmatrix} \qquad I_2 = \begin{pmatrix} aaaa & aa \\ aaa & aaaaa \end{pmatrix}$$

Geben Sie im positiven Fall eine PCP-Lösung an und beweisen Sie im negativen Fall, dass keine PCP-Lösung existiert.

Aufgabe 83 Zeigen Sie, dass folgende Probleme entscheidbar sind. **mündlich**

- (a) LP_{Typ2} : Das Leerheitsproblem für kontextfreie Grammatiken.
- (b) Das Schnittproblem (SP_{Typ3}), Inklusionsproblem (IP_{Typ3}) und Äquivalenzproblem ($\dot{A}P_{\text{Typ3}}$) für reguläre Grammatiken.

Aufgabe 84 **20 Zusatzpunkte**

- (a) Zeigen Sie die Entscheidbarkeit des Problems PCP^* : (mündlich, optional)

Gegeben: Eine PCP-Instanz $\begin{pmatrix} x_1 \cdots x_k \\ y_1 \cdots y_k \end{pmatrix}$.

Gefragt: Gibt es Indexfolgen i_1, \dots, i_m und j_1, \dots, j_n mit $m, n \geq 1$ und $x_{i_1} \cdots x_{i_m} = y_{j_1} \cdots y_{j_n}$?

Hinweis: Reduzieren Sie PCP^* auf SP_{Typ3} .

- * (b) Zeigen Sie, die Entscheidbarkeit des Problems PCP^{**} : (10 Zusatzpunkte)

Gegeben: Eine PCP-Instanz $I = \begin{pmatrix} x_1 \cdots x_k \\ y_1 \cdots y_k \end{pmatrix}$.

Gefragt: Gibt es Indexfolgen i_1, \dots, i_n und j_1, \dots, j_n mit $n \geq 1$ und $x_{i_1} \cdots x_{i_n} = y_{j_1} \cdots y_{j_n}$?

Hinweis: Reduzieren Sie PCP^{**} auf $\overline{LP_{\text{Typ2}}}$, d.h. konstruieren Sie für eine Instanz I eine Sprache $L_I \in \text{CFL}$ mit $I \in PCP^{**} \Leftrightarrow L_I \neq \emptyset$.

- (c) Betrachten Sie die PCP-Instanz $I = \begin{pmatrix} aba & a & bab \\ a & ab & abaa \end{pmatrix}$ und deren kürzeste Lösung $\alpha = (i_1, \dots, i_n)$. Berechnen Sie die Länge n (*Hinweis:* $n \leq 300$) und die Indexsumme $s(\alpha) = \sum_{j=1}^n i_j$ von α . (10 Zusatzpunkte)

Aufgabe 85 Es seien die Laufzeiten von 5 Algorithmen gegeben: **10 Punkte**

Algorithmus	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
Laufzeit	$5 \cdot 10^8 n$	$10^3 n^2$	$10 \cdot 2^{n/2}$	2^{2n}	$n!$

Die Algorithmen werden auf einem Rechner implementiert, der 10^9 Operationen pro Sekunde abarbeitet.

- (a) Bestimmen Sie jeweils die maximale Länge n_1 der Probleminstanzen, die mit diesen Algorithmen innerhalb einer Minute lösbar sind. (5 Punkte)
- (b) Sei n_2 die maximale Länge, die ein Rechner mit k -facher Geschwindigkeit in dieser Zeit bewältigt. Welche Beziehung besteht zwischen n_1 und n_2 ? (5 Punkte)