Übungsblatt 10

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 10.1.–13. 1. 2017
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 15:10 Uhr am 18. 1. 2017

Essentielle Begriffe: LBA, DLBA, DCSL, berechenbare Funktion, partielle bzw. totale Funktion, REC

Abzugeben sind 3 Blätter jeweils mit den Aufgaben: 71; 72; 73

Hinweis: Sie dürfen folgenden Satz ohne Beweis nutzen:
Sei $c \in \mathbb{N}$. Für jede k-NTM M, die für jede Eingabe x höchstens $c + c|x|$ Bandfelder besucht (d.h. $|u_1 a_1 v_1 \dots u_k a_k v_k| \le c + c|x|$), gibt es einen LBA M' mit $L(M) = L(M')$. Falls M eine k-DTM ist, so kann M' als DLBA konstruiert werden.

Aufgabe 67 Zeigen Sie: ***mündlich***

(a) Für jeden LBA (DLBA) M existiert ein LBA (DLBA) M' mit $L(M) = L(M')$, der bei jeder Eingabe hält und dies, falls ein Endzustand erreicht wird, direkt nach Erreichen des Endzustands tut. *(optional)*

(b) DCSL und CSL sind unter $\cup$, $\cap$, Produkt und Sternhülle abgeschlossen.

(c) DCSL = co-DCSL. (*Bemerkung:* Es gilt auch CSL = co-CSL.)

Hinweis: Nutzen Sie obigen Hinweis bei (b) und (c).

Aufgabe 68 Zeigen Sie, dass CFL in DCSL enthalten ist. ***mündlich***

Hinweis: Konstruieren Sie aus einer CNF-Grammatik $G = (N, \Sigma, P, S)$ eine 3-DTM, die für eine Eingabe der Länge n alle Satzformen $\alpha \in N^n$ (d.h. alle nur aus Nichtterminalen bestehenden Satzformen der Länge n) betrachtet. Nutzen Sie dann den Hinweis von oben, um die Existenz eines DLBAs zu zeigen.

Bemerkung: Da L aus Aufgabe 64 nicht kontextfrei ist, gilt also CFL $\subsetneq$ DCSL. Die Frage, ob auch DCSL $\subsetneq$ CSL gilt, ist bis heute ungelöst und als *LBA-Problem* bekannt.

Aufgabe 69 Sei $L \subseteq \{0,1\}^*$. ***mündlich***

Die *Unärkodierung* von L ist $un(L) = \left\{0^i \,\middle|\, \exists x \in L : bin(i) = 1x\right\}$ (nicht $bin(i) = x$, um führende Nullen in L zu ermöglichen). Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) $L \in \mathsf{RE} \Rightarrow un(L) \in \mathsf{RE}$ und $L \in \mathsf{REC} \Rightarrow un(L) \in \mathsf{REC}$,

(b) $un(L) \in \mathsf{RE} \Rightarrow L \in \mathsf{RE}$ und $un(L) \in \mathsf{REC} \Rightarrow L \in \mathsf{REC}$,

(c) $L \in \mathsf{REG} \Rightarrow un(L) \in \mathsf{REG}$, *(optional)*

*(d) $un(L) \in \mathsf{REG} \Rightarrow L \in \mathsf{REG}$. *(optional)*

Bemerkung: Es gilt: $L \in \mathsf{CFL} \not\Rightarrow un(L) \in \mathsf{CFL}$, $un(L) \in \mathsf{CFL} \Rightarrow L \in \mathsf{CFL}$, $L \in \mathsf{CSL} \Rightarrow un(L) \in \mathsf{CSL}$ sowie $un(L) \in \mathsf{CSL} \not\Rightarrow L \in \mathsf{CSL}$.

Aufgabe 70 ***mündlich***

Die *Goldbachsche Vermutung* lautet:

Jede gerade Zahl größer 2 ist die Summe zweier Primzahlen.

Es ist nicht bekannt, ob diese Vermutung wahr ist. Wir definieren die totale Funktion $f\colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}$ und die partielle Funktion $g\colon \{0,1\}^* \to \{1\} \cup \{\uparrow\}$ wie folgt:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{die Goldbachvermutung ist falsch,} \\ 0, & \text{die Goldbachvermutung ist richtig,} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1, & f(x) = 1, \\ \uparrow, & f(x) = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f berechenbar ist.

(b) Beschreiben Sie informell eine DTM M, die g berechnet.

Aufgabe 71 ***12 Punkte***

Die *Primzahlzwillingsvermutung* lautet:

Es gibt unendlich viele Primzahlpaare p, q mit $|p - q| = 2$.

Es ist bis heute ungeklärt, ob diese Vermutung wahr ist. Sind die totalen Funktionen $f_i : \{0,1\}^* \to \{0,1\}$ mit $i \in \{1,2,3\}$ berechenbar? Begründen Sie!

(a) $f_1(x) = 1 \Leftrightarrow$ die Primzahlzwillingsvermutung ist wahr *(4 Punkte)*

(b) $f_2(x) = 1 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : x = bin(n)$ und n sowie $n+2$ sind Primzahlen *(4 Punkte)*

(c) $f_3(x) = 1 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n-2, n$ und $n+2$ sind Primzahlen *(4 Punkte)*

Aufgabe 72 Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen: ***10 Punkte***

(1) A ist vom Typ 0, (2) A wird von einer 1-NTM akzeptiert.

Aufgabe 73 Zeigen Sie, dass $\mathsf{CSL} \subsetneq \mathsf{REC}$ gilt. ***8 Punkte***

Hinweis: Betrachten Sie die Sprache $\overline{D}$ mit
$D = \left\{w \in \{0,1\}^+ \mid M_w \text{ ist ein LBA, der die Eingabe } \hat{w} \text{ akzeptiert}\right\}$.