

Übungsblatt 8

*Besprechung der mündlichen Aufgaben am 13.12.–16.12.2016
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 15:10 Uhr am 4.1.2017*

Essentielle Begriffe: DCFL, DPDA, (eindeutige Grammatik)

Abzugeben sind 3 Blätter jeweils mit den Aufgaben: 54; 59; **56 + 57**

Aufgabe 53 Gegeben sei die Sprache $L = \{a^n b^m \mid n > m \geq 0\}$. **mündlich**

- (a) Geben Sie einen PDA M mit höchstens zwei Zuständen für L an und beweisen Sie dessen Korrektheit.
- (b) Konstruieren Sie aus M eine kontextfreie Grammatik. Verwenden Sie das Verfahren aus der Vorlesung.

Aufgabe 54 Gegeben sei der PDA $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q, \#)$ **13 Punkte**
mit $Z = \{p, q\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \{A, B, \#\}$ und der Überföhrungsfunktion

$$\begin{array}{llll} \delta : qa\# \rightarrow qAA\# & (1) & qaA \rightarrow qAA & (2) & qbA \rightarrow p & (3) & p\epsilon\# \rightarrow p & (4) \\ pbA \rightarrow p & (5) & pb\# \rightarrow pB\# & (6) & pbB \rightarrow pBB & (7) & pcB \rightarrow p & (8) \end{array}$$

- (a) Geben Sie eine explizite Beschreibung für $L(M)$ an. *(2 Punkte)*
- (b) Konstruieren Sie zu M eine äquivalente kontextfreie Grammatik G . Verwenden Sie das Verfahren aus der Vorlesung. *(8 Punkte)*
- (c) Geben Sie eine akzeptierende Rechnung von $M(abbbcc)$ und die zugehörige Ableitung in der Grammatik G an. *(3 Punkte)*

Aufgabe 55 **mündlich**

Zeigen Sie, dass CFL und DCFL unter Schnitt und Mengendifferenz mit regulären Sprachen abgeschlossen sind. Konstruieren Sie dazu für $A \in \text{CFL}$ und $B \in \text{REG}$ einen PDA für $A \cap B$, modifizieren Sie anschließend Ihre Konstruktion für $A \in \text{DCFL}$ und folgern Sie schlussendlich jeweils, dass auch ein PDA (bzw. DPDA) für $A \setminus B$ existiert.

Aufgabe 56 **5 Punkte**

- (a) Zeigen Sie, dass (nicht zwingend deterministische) PDAs mit Endzuständen genau die kontextfreien Sprachen akzeptieren und folgern Sie: $\text{DCFL} \subseteq \text{CFL}$. *(mdl.)*
- (b) Zeigen Sie, dass deterministische Kellerautomaten ohne Endzustände genau die präfixfreien Sprachen in DCFL charakterisieren. *(5 Punkte)*

Aufgabe 57 Betrachten Sie die Sprachen**5+3 Punkte**

$$L_1 = \{a^n b^m c^m \mid n, m \geq 0\},$$

$$L_2 = \{a^n b^n c^m \mid n, m \geq 0\},$$

$$L_3 = \{a^i b^j c^k \mid i \neq j \text{ und } i, j, k \geq 1\} \quad \text{und} \quad L_4 = \{a^i b^j c^k \mid j \neq k \text{ und } i, j, k \geq 1\}.$$

- (a) Geben Sie DPDAs für L_1 und L_3 an. (mündlich, optional)

Bemerkung: Analog zu einem DPDA für L_1 kann man einen für L_2 konstruieren. Der Abschluss von DCFL unter \cap ist daher nicht in CFL enthalten, da $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\} \notin \text{CFL}$.

- (b) Beschreiben Sie, wie sich aus DPDAs für L_3 und L_4 ein DPDA für $L_3 \cup 0L_4$ konstruieren lässt. (mündlich)

- (c) Zeigen Sie, dass DCFL nicht unter Differenz abgeschlossen ist. (mündlich)

Hinweis: Sie dürfen bereits benutzen, dass DCFL unter Komplement abgeschlossen ist. Dies wird später in der Vorlesung gezeigt.

- (d) Zeigen Sie, dass die Sprachklasse DCFL auch nicht unter Sternhüllenbildung abgeschlossen ist. (5 Punkte)

Hinweis: In der Vorlesung wurde gezeigt, dass DCFL nicht unter Produktbildung abgeschlossen ist, da $\{\varepsilon, 0\} \in \text{DCFL}$ und $L = L_3 \cup 0L_4 \in \text{DCFL}$, aber $\{\varepsilon, 0\}L \notin \text{DCFL}$.

Zeigen Sie $L \cup \{0\} \in \text{DCFL}$ und $(L \cup \{0\})^* \notin \text{DCFL}$

- (e) Zeigen Sie, dass DCFL nicht unter Homomorphismen (siehe [Aufgabe 39](#)) abgeschlossen ist. (3 Zusatzpunkte)

Aufgabe 58**mündlich**

- (a) Zeigen Sie, dass das Komplement von $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ kontextfrei ist (d. h. $\bar{L} \in \text{CFL} \setminus \text{DCFL}$).

Hinweis: Nutzen Sie die Sprachen aus [Aufgabe 57](#).

- (b) Geben Sie kontextfreie Grammatiken für die Sprachen $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$ und \bar{L} an und erläutern Sie deren Regeln. (optional)

Bemerkung: Damit ist $L \in \text{CFL} \cap \text{co-CFL}$. L ist aber nicht in DCFL.

Aufgabe 59**7 Punkte**

Eine kontextfreie Sprache L heißt *eindeutig*, falls für L eine eindeutige kontextfreie Grammatik existiert. Ist dagegen jede kontextfreie Grammatik für L mehrdeutig, so heißt L (*inhärent*) *mehrdeutig*. Geben Sie eine eindeutige Grammatik für die Sprache $L = (L_3 \cup 0L_4)^R$ (mit L_3 und L_4 aus [Aufgabe 57](#)) an, erläutern Sie Ihre Konstruktion und begründen Sie kurz, warum ihre Grammatik eindeutig ist.

Bemerkung: Alle Sprachen in DCFL sind eindeutig. Mit [Aufgabe 59](#) folgt daraus, dass DCFL eine echte Teilklasse der Klasse der eindeutigen kontextfreien Sprachen ist. Da die kontextfreie Sprache $\{a^i b^j c^k \mid i=j \text{ oder } j=k\}$ inhärent mehrdeutig ist, bilden die eindeutigen kontextfreien Sprachen wiederum eine echte Teilklasse von CFL.