

Übungsblatt 5

*Besprechung der mündlichen Aufgaben am 22.11.–25. 11. 2016
 Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 15:10 Uhr am 30. 11. 2016*

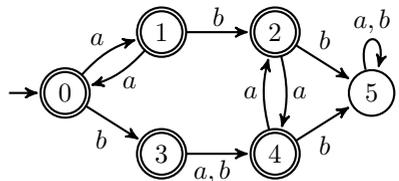
Essentielle Begriffe: DFA-Minimierung, Unterscheider, Nerode-Relation \sim_L , Pumpinglemma, Pumpingzahl

Abzugeben sind 3 Blätter jeweils mit den Aufgaben: 30; 32; **33+36**

Aufgabe 29 Gegeben sei nebenstehender DFA M .

mündlich

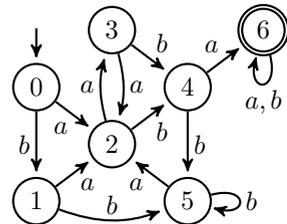
- (a) Minimieren Sie M mit dem Algorithmus aus der Vorlesung.
- (b) Bestimmen Sie den Index der Nerode-Relation $\sim_{L(M)}$ und geben Sie ein Repräsentantensystem für $\sim_{L(M)}$ an.



Aufgabe 30 Gegeben sei nebenstehender DFA M .

10 Punkte

- (a) Minimieren Sie M mit dem Algorithmus aus der Vorlesung.
- (b) Bestimmen Sie den Index der Nerode-Relation $\sim_{L(M)}$ und geben Sie ein Repräsentantensystem für $\sim_{L(M)}$ an.



Aufgabe 31 Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ ein DFA und für $i \geq 0$ sei

mündlich

$D_i = \{\{p, q\} \subseteq Z \mid p \text{ und } q \text{ haben einen Unterscheider } x \text{ der Länge } |x| \leq i\}$.

- (a) Zeigen Sie, dass die durch $p \sim_i q \Leftrightarrow \{p, q\} \notin D_i$ auf Z definierten Relationen \sim_i Äquivalenzrelationen sind und \sim_{i+1} eine Verfeinerung von \sim_i ist.
- (b) Schätzen Sie die Anzahl $k = \min\{i \geq 0 \mid D_{i+1} = D_i\}$ der benötigten Iterationen in Abhängigkeit von $m = \|Z\|$ möglichst gut nach oben ab.

Aufgabe 32 Sei $\Sigma = \{a, b\}$.

6 Punkte

Geben Sie einen Minimal-DFA M für $L = \{x_1 \dots x_n \in \Sigma^* \mid n \geq 1, x_1 = x_n\}$ an. Begründen Sie die Korrektheit und beweisen Sie die Minimalität von M .

Aufgabe 33**5 Punkte**

Die folgenden Sprachen sind nicht regulär. Beweisen Sie dies, indem Sie jeweils unendlich viele bzgl. der Nerode-Relation \sim_L paarweise nicht äquivalente Wörter angeben.

- (a) $L_1 = \{ww^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$, (mündlich)
 (b) $L_2 = \{a^n b^m \mid n > m > 0\}$. (5 Punkte)

Aufgabe 34 Folgende Aussagen haben die Form „Wenn A , dann B “. *mdl., opt.* Geben Sie die (äquivalente) *Kontraposition* „Wenn nicht B , dann nicht A “ an. Formen Sie dabei die Aussagen „nicht B “ und „nicht A “ so um, dass die Negation möglichst weit hinten auftritt.

- (a) Wenn L regulär ist, gibt es einen DFA M mit $L(M) = L$.
 (b) Wenn für alle $(a, b), (b, c) \in R$ auch $(a, c) \in R$ gilt, ist R transitiv.
 (c) Wenn $L = \{a\}^*$, dann gibt es für alle $i \geq 0$ ein $j \in \mathbb{Z}$, sodass $a^{i+j} \in L$.
 (d) Wenn $L \in \text{REG}$, dann existiert ein $l \geq 0$, sodass es für alle $i \geq l$ ein $0 < j \leq l$ gibt mit $a^i \in L \Rightarrow (a^{i+j} \in L \text{ und } a^{i-j} \in L)$.

Aufgabe 35**mündlich**

Sei B die Menge der Dezimaldarstellungen aller durch 3 teilbaren natürlichen Zahlen.

- (a) Geben Sie alle Zerlegungen des Wortes 123456 in Teilwörter uvw an, die für $\ell = 4$ alle drei Bedingungen in der Konklusion des Pumping-Lemmas erfüllen.
 (b) Bestimmen Sie die Pumpingzahl für B .

Aufgabe 36 Sei $L = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0\}$.

9 Punkte

- (a) Geben Sie alle Zerlegungen des Wortes $aaabb$ in Teilwörter uvw an, die für $\ell = 4$ alle drei Bedingungen in der Konklusion des Pumping-Lemmas erfüllen. (7 Punkte)
 (b) Bestimmen Sie die Pumpingzahl für L . (2 Punkte)

Aufgabe 37 Sei $\Sigma = \{0, 1\}$ und $k \geq 1$.

mündlich, optional

- (a) Bestimmen Sie einen Minimal-DFA für die Sprache

$$L_k = \{x = x_1 \dots x_n \in \Sigma^* \mid n \geq k, x_k = 1\}.$$

- (b) Geben Sie einen NFA für die gespiegelte Sprache L_k^R mit $\leq k + 1$ Zuständen an.
 (c) Bestimmen Sie die minimale Anzahl von Zuständen eines DFA für L_k^R .

- * (d) Geben Sie für jedes $k \geq 1$ einen NFA N mit k Zuständen an, so dass jeder DFA für $L(N)$ mindestens 2^k Zustände hat.

Aufgabe 38**mündlich, optional**

Sei L eine Sprache, die von einem DFA M mit m Zuständen erkannt wird. Zeigen Sie

- (a) Ist L endlich, so enthält L nur Wörter der Länge $\leq m - 1$.
 (b) Wenn es in L ein Wort w gibt, das 1^m als Teilwort enthält, dann gibt es für jede Zahl $k \geq 1$ ein Wort in L , das 1^k enthält. Gilt dies auch, wenn M ein NFA ist?