Übungsblatt 4

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 15.11.–18. 11. 2016
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 15:10 Uhr am 23. 11. 2016
Essentielle Begriffe: größtes, kleinstes, maximales, minimales Element, Hasse-Diagramm, Schranken, Infimum, Supremum, isomorph, zusammenhängend, (ungerichteter) Graph, gerichteter Graph, Subgraph

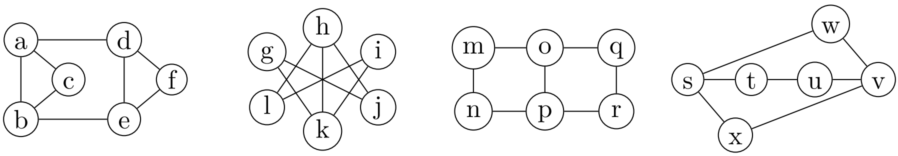
Abzugeben sind 3 Blätter jeweils mit den Aufgaben: 25; **26+27**; 28

Aufgabe 24 Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $x, y \in \Sigma^*$. ***mündlich***
Dann heiße x *Teilwort* von y ($x \sqsubseteq y$), falls $u, v \in \Sigma^*$ existieren mit $y = uxv$.

(a) Zeigen Sie, dass $\sqsubseteq$ eine Ordnung auf Σ^* ist.
(b) Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm der Einschränkung $\sqsubseteq_A$ von $\sqsubseteq$ auf die Menge $A = \{a, b, aa, ab, ba, aab, abb, bba, aabba\}$.
(c) Bestimmen Sie alle größten, kleinsten, minimalen und maximalen Elemente von A in der Ordnung $(A, \sqsubseteq_A)$.
(d) Bestimmen Sie obere und untere Schranken sowie Supremum und Infimum von $H := \{abb, bba\}$ in der Ordnung $(A, \sqsubseteq_A)$ (sofern vorhanden).

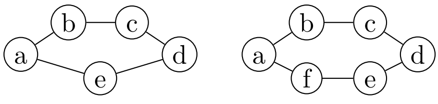
Aufgabe 25 Seien E_1 und E_2 Äquivalenzrelationen auf A. ***12 Punkte***
Sind dann auch $E_1 \cap E_2, E_1 \cup E_2, E_1 \circ E_2$ Äquivalenzrelationen? Welche der drei Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität bleiben jeweils erhalten, welche nicht? Begründen Sie.

Aufgabe 26 ***5 Punkte***
Als den *Komplementärgraphen* eines Graphen $G = (V, E)$ bezeichnen wir den Graphen $\overline{G} = (V, \{\{u, v\} \mid u \neq v, \{u, v\} \notin E\})$. Weiter bezeichnen wir G als *selbstkomplementär*, falls er zu $\overline{G}$ isomorph ist.



G_1 G_2 G_3 G_4

(a) Betrachten Sie die Graphen $G_1, \ldots, G_4$. Bestimmen Sie für alle $1 \leq i < j \leq 4$, ob die Graphen G_i und G_j isomorph sind. Begründen Sie Ihre Antwort. *(mündlich)*

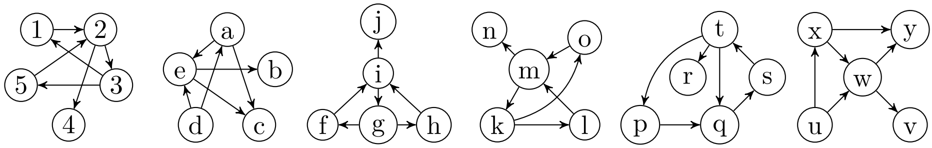


C_5 C_6

(b) Betrachten Sie nun die Graphen C_5 und C_6. Welche der Graphen sind selbstkomplementär? Begründen Sie Ihre Antwort. *(mündlich)*

(c) Geben Sie möglichst viele nichtisomorphe selbstkomplementäre Graphen mit bis zu 7 Knoten an. Begründen Sie, warum es nicht mehr gibt. *(5 Punkte)*

Aufgabe 27 Es seien die folgenden gerichteten Graphen gegeben: ***7 Punkte***



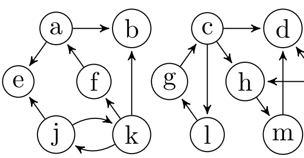
G H_1 H_2 H_3 H_4 H_5

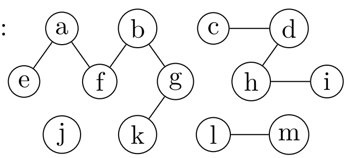
(a) Welche der gerichteten Graphen $H_1, \ldots, H_5$ sind isomorph zu G, welche nicht? Wenn Sie isomorphe gerichtete Graphen vorliegen haben, geben Sie einen Isomorphismus zwischen den jeweiligen gerichteten Graphen an. Bei nicht isomorphen gerichteten Graphen begründen Sie kurz Ihre Antwort. *(5 Punkte)*

(b) Welche der gerichteten Graphen $H_1, \ldots, H_5$ sind zu H_1 isomorph? *(2 Punkte)*

Aufgabe 28 ***6 Punkte***

Ein Digraph $G' = (V', R')$ heißt *Subgraph* (oder auch *Teilgraph*) des Digraphen $G = (V, R)$, falls $V' \subseteq V$ und $R' \subseteq R$ gilt. Die bzgl. Subgraphenordnung maximalen (stark) zusammenhängenden Subgraphen von G bezeichnen wir als die *(starken) Zusammenhangskomponenten* von G. Für zwei Knoten x und y gelte xZy (xSy), falls es eine (starke) Zusammenhangskomponente gibt, in der sowohl x als auch y liegen. Gegeben seien der Digraph G_d und der Graph G_u.

G_d: 

G_u: 

(a) Geben Sie die Knotenmengen der Zusammenhangskomponenten des Digraphen G_d an. *(mündlich)*

(b) Drücken Sie Z durch die Kantenrelation R aus. Begründen Sie. *(mündlich)*

(c) Lösen Sie (a) für den Zusammenhang Z in G_u. *(2 Punkte)*

(d) Wie lässt sich die Lösung aus (b) für Graphen vereinfachen? *(1 Punkt)*

(e, f) Lösen Sie (a) und (b) für den starken Zusammenhang S in G_d. *(3 Punkte)*