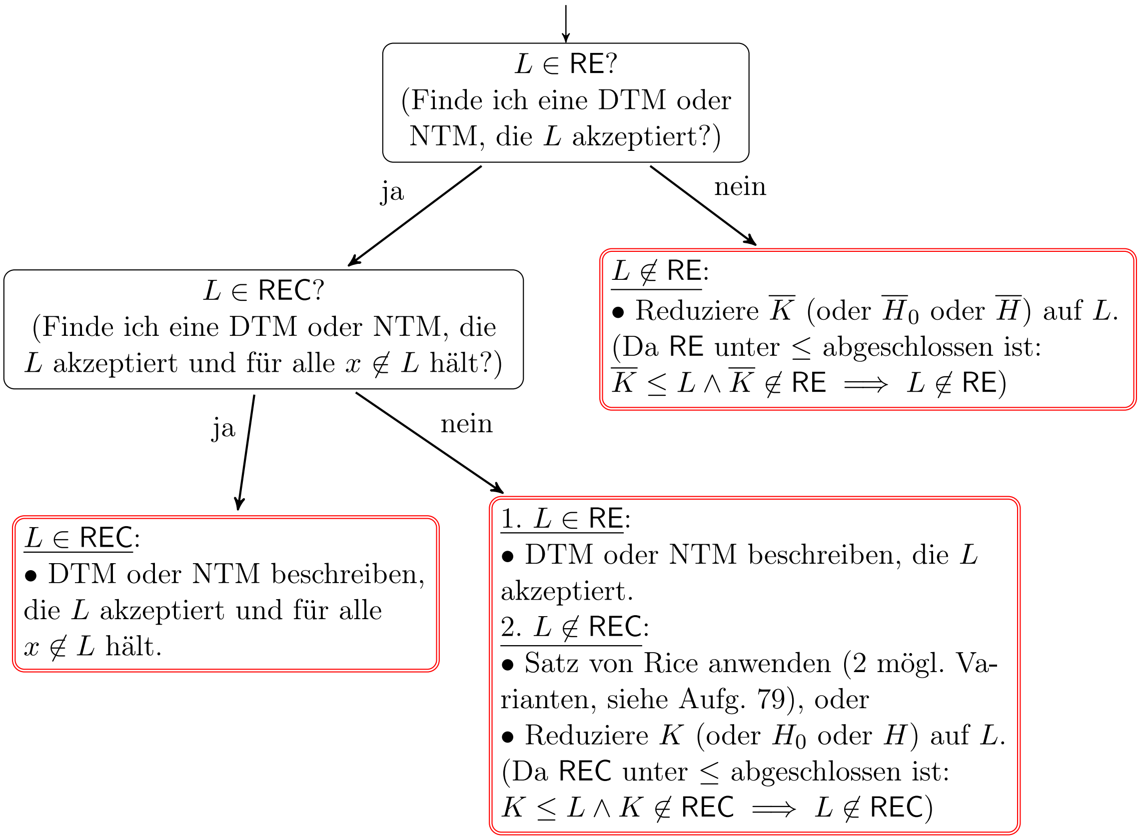
Musterlösung Aufgabe 80

Mögliche Strategie:



Je nach Aufgabenstellung kann eine andere Reihenfolge leichter zum Ergebnis führen. Wenn z.B. direkt auf Funktionen/Sprachklassen Bezug genommen wird, lohnt es sich, erst zu testen, ob der Satz von Rice anwendbar ist.

Musterlösung:

Aufgabe 80: Bestimmen Sie, welche der folgenden Sprachen entscheidbar, semi-entscheidbar, oder nicht semi-entscheidbar sind. Begründen Sie.

(a) $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{es gibt ein } w' \in \{0,1\}^* \text{ mit } M_w(w') = 0\}$

Lösung:

L_1 ist semi-entscheidbar:
Beschreibung einer NTM M, die L_1 akzeptiert: M rät eine potentielle Nullstelle $w' \in \{0,1\}^*$ und testet, ob $M_w(w') = 0$. Um ein w' zu raten, schreibt M sukzessive Zeichen auf ein Band. Dazu wählt M nichtdeterministisch in jedem Schritt, ob eine 0 geschrieben wird, eine 1 geschrieben wird oder das Wort beendet ist. (Daraus folgt nicht, dass $L \in \mathsf{REC}$, da es keine Schranke für die Länge $|w'|$ der Nullstelle gibt und es daher sein kann, dass das Raten nicht terminiert.)

Alternativ: Beschreibung einer DTM M, die L_1 akzeptiert: Bei Eingabe $w \in \{0,1\}^*$ simuliert M nacheinander für $i = 1, 2, 3, \ldots$ jeweils i Schritte von M_w bei Eingabe $w' \in \{0,1\}^*$ für alle w' der Länge höchstens i.

L_1 ist nicht entscheidbar:

$$\begin{aligned} L_1 &= \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{es gibt ein } w' \in \{0,1\}^* \text{ mit } M_w(w') = 0\} \\ &= \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ berechnet eine partielle Funktion in } \mathcal{F}_0 \ \} \quad \text{wobei} \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}_0 := \{f \mid \exists w' \in \{0,1\}^* \text{ mit } f(w') = 0\}$$

Nach dem Satz von Rice ist L_1 nicht entscheidbar, denn es gibt berechenbare partielle Funktionen f und g mit Definitionsbereich $\{0,1,\#\}^*$ so dass $f \in \mathcal{F}_0$ und $g \notin \mathcal{F}_0$, z.B.

- die Funktion f: $f(x) = 0$ für alle $x \in \{0,1,\#\}^*$ ist berechenbar und $f \in \mathcal{F}_0$, somit $L_{\mathcal{F}_0} \neq \emptyset$,
- die Funktion g: $g(x) = 1$ für alle $x \in \{0,1,\#\}^*$ ist berechenbar und $g \notin \mathcal{F}_0$, somit $L_{\mathcal{F}_0} \neq \{0,1\}^*$.

(b) $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{es gibt ein } w' \in \{0,1\}^* \text{ mit } M_{w'}(w) = 0\}$

Lösung:

L_2 ist entscheidbar:
$L_2 = \{0,1\}^*$, denn w' kann so gewählt werden, dass $M_{w'}(x) = 0$ für jede Eingabe x.

(c) $L_3 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \overline{L(M_w)} \text{ ist semi-entscheidbar}\}$

Lösung:

Beobachtung: $L_3 = \{w \in \{0,1\}^* \mid L(M_w) \in \mathsf{REC}\}$.
Denn $\overline{L(M_w)} \in \mathsf{RE} \iff L(M_w) \in \mathsf{co\text{-}RE}$. Zudem gilt $L(M_w) \in \mathsf{RE}$ für alle $w \in \{0,1\}^*$ (da $L(M_w)$ von der DTM M_w akzeptiert wird). Daraus folgt

$$\overline{L(M_w)} \in \mathsf{RE} \iff L(M_w) \in \mathsf{RE} \cap \mathsf{co\text{-}RE} \iff L(M_w) \in \mathsf{REC}$$

L_3 ist nicht semi-entscheidbar:
Das spezielle Halteproblem $\overline{K}$ lässt sich auf L_3 reduzieren mittels $h\colon w \mapsto w'$, wobei w' die Kodierung einer DTM ist, die unabhängig von ihrer Eingabe x zunächst $M_w(w)$ simuliert, danach $M_x(x)$ simuliert und genau dann akzeptiert wenn beide Simulationen halten.

Dann ist h berechenbar und für alle $w \in \{0,1\}^*$ gilt $w \in \overline{K} \iff w' \in L_3$, denn

$$\begin{aligned} w \in \overline{K} &\implies M_w(w) \text{ hält nicht} \implies M_{w'} \text{ hält bei jeder Eingabe } x \text{ nicht} \\ &\implies L(M_{w'}) = \emptyset \implies L(M_{w'}) \in \mathsf{REC} \quad \implies w' \in L_3 \\ w \notin \overline{K} &\implies w \in K \implies M_w(w) \text{ hält} \implies M_{w'}(x) \text{ akzeptiert g.d.w. } M_x(x) \text{ hält} \\ &\implies L(M_{w'}) = \{x \mid M_x(x) \text{ hält}\} \implies L(M_{w'}) = K \implies L(M_{w'}) \notin \mathsf{REC} \\ &\implies w' \notin L_3 \end{aligned}$$

(d) $L_4 = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w(w) \text{ führt immer die Kopfbewegung } R \text{ aus}\}$

Lösung:

L_4 ist entscheidbar:
Teste $|w| + \|Z\|$ Schritte der DTM M_w bei Eingabe w. Wenn dabei stets die Kopfbewegung R ausgeführt wurde, ist die DTM in einer Endlosschleife.

- Nach den ersten $|w|$ Schritten ist der Kopf auf dem ersten Bandzeichen $\sqcup$ hinter dem Wort.
- Da bei Rechtsbewegungen nun nur $\sqcup$ gelesen werden, und nur $\|Z\|$ viele Zustände existieren, muss sich die DTM M_w bei Eingabe w nach spätestens $\|Z\|$ weiteren Schritten in einer Endlosschleife befinden.

(e) $L_5 = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w(w) \text{ führt nie die Kopfbewegung } N \text{ aus}\}$

Lösung:

L_5 ist nicht semi-entscheidbar:
$\overline{K}$ lässt sich auf L_5 reduzieren.

Beobachtung: jede Anweisung $(z, a) \mapsto (z', a', N)$ in δ, kann ersetzt werden durch

$$\begin{gathered}(z, a) \mapsto (q_{z,z'}, a', R) \text{ und} \\ (q_{z,z'}, b) \mapsto (z', b, L) \text{ für alle } b \in \Gamma\end{gathered}$$

wobei für z und jedes z' der Zustand $q_{z,z'}$ ein neuer Zustand ist.
Für eine DTM M sei $N(M)$ die DTM, die man erhält, indem man obige Ersetzungen vornimmt.

Reduktion: $w \mapsto w'$ wobei w' die Kodierung einer DTM $M_{w'}$ ist, die zunächst $N(M_w)$ bei Eingabe w simuliert (unabhängig von ihrer eigenen Eingabe), und falls sie anhält, im folgenden Schritt die Kopfbewegung N ausführt. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
w \in \overline{K} &\implies M_w(w) \text{ hält nicht} \implies N(M_w)(w) \text{ hält nicht} \\
&\implies M_{w'} \text{ hält bei allen Eingaben } x \text{ nicht und führt nie die Kopfbewegung } N \text{ aus} \\
&\implies M_{w'}(w') \text{ führt nie die Kopfbewegung } N \text{ aus} \implies w' \in L_5 \\
w \in K &\implies M_w(w) \text{ hält} \implies N(M_w)(w) \text{ hält} \\
&\implies M_{w'} \text{ führt die Kopfbewegung } N \text{ aus bei allen Eingaben } x \\
&\implies M_{w'}(w') \text{ führt die Kopfbewegung } N \text{ aus} \implies w' \notin L_5
\end{aligned}$$