Vorlesungsskript

Einführung in die Komplexitätstheorie

Wintersemester 2016/17

Prof. Dr. Johannes Köbler
Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Komplexität und Kryptografie

24. November 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

In der Komplexitätstheorie werden algorithmische Probleme daraufhin untersucht, welche Rechenressourcen zu ihrer Lösung benötigt werden. Naturgemäß bestehen daher enge Querbezüge zu

- Algorithmen (obere Schranken)
- Automatentheorie (Rechenmodelle)
- Berechenbarkeit (Was ist überhaupt algorithmisch lösbar?)
- Logik (liefert viele algorithmische Probleme, mit ihrer Hilfe kann auch die Komplexität von Problemen charakterisiert werden)
- Kryptografie (Wieviel Rechenressourcen benötigt ein Gegner, um ein Kryptosystem zu brechen?)

Zur weiteren Motivation betrachten wir eine Reihe von konkreten algorithmischen Problemstellungen.

Erreichbarkeitsproblem in Digraphen (Reach):

Gegeben: Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $V = \{1, \ldots, n\}$ und $E \subseteq V \times V$.
Gefragt: Gibt es in G einen Weg von Knoten 1 zu Knoten n?

Zur Erinnerung: Eine Folge $(v_1, \ldots, v_k)$ von Knoten heißt **Weg** in G, falls für $j = 1, \ldots, k-1$ gilt: $(v_j, v_{j+1}) \in E$.

Da als Antwort nur "ja" oder "nein" möglich ist, handelt es sich um ein **Entscheidungsproblem**. Ein solches lässt sich formal durch eine Sprache beschreiben, die alle positiven (mit "ja" zu beantwortenden) Problemeingaben enthält:

$$\textsc{Reach} = \{G \,|\, \text{in } G \text{ ex. ein Weg von 1 nach } n\}.$$

Hierbei setzen wir eine Kodierung von Graphen durch Wörter über einem geeigneten Alphabet Σ voraus. Wir können G beispielsweise durch eine Binärfolge der Länge n^2 kodieren, die aus den n Zeilen der Adjazenzmatrix von G gebildet wird.

Wir entscheiden Reach durch einen Wegsuche-Algorithmus. Dieser markiert nach und nach alle Knoten, die vom Knoten 1 aus erreichbar sind. Hierzu speichert er jeden markierten Knoten solange in einer Menge S bis er sämtliche Nachbarknoten markiert hat. Genaueres ist folgendem Algorithmus zu entnehmen:

Algorithmus `suche-Weg`(G)

```
1  Input: Gerichteter Graph G = (V,E) mit V = {1,...,n}
2    S := {1}
3    markiere Knoten 1
4    repeat
5      waehle einen Knoten u ∈ S
6      S := S − {u}
7      for all (u,v) ∈ E do
8        if v ist nicht markiert then
9          markiere v
10         S := S ∪ {v}
11   until S = ∅
12   if n ist markiert then accept else reject
```

Es ist üblich, den Ressourcenverbrauch von Algorithmen (wie z.B. Rechenzeit oder Speicherplatz) in Abhängigkeit von der Größe der Problemeingabe zu messen. Falls die Eingabe aus einem Graphen besteht, kann beispielsweise die Anzahl n der Knoten (und/oder die Anzahl m der Kanten) als Bezugsgröße dienen. Der Ressourcenverbrauch hängt auch davon ab, wie wir die Eingabe kodieren. So führt die Repräsentation eines Graphen als Adjazenzliste oftmals zu effizienteren Lösungsverfahren.

Komplexitätsbetrachtungen:

- Reach ist in Zeit $O(n^2)$ entscheidbar.

- Reach ist nichtdeterministisch in Platz $O(\log n)$ entscheidbar (und daher deterministisch in Platz $O(\log^2 n)$; Satz von Savitch).

Als nächstes betrachten wir das Problem, einen maximalen Fluss in einem Netzwerk zu bestimmen.

Maximaler Fluß (MaxFlow):

Gegeben: Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $V = \{1, \ldots, n\}$, $E \subseteq V \times V$ und einer Kapazitätsfunktion $c : E \to \mathbb{N}$.

Gesucht: Ein Fluss $f : E \to \mathbb{N}$ von 1 nach n in G, d.h.

- $\forall e \in E : f(e) \leq c(e)$ und
- $\forall v \in V - \{1, n\} : \sum_{(v,u)\in E} f(v, u) = \sum_{(u,v)\in E} f(u, v)$,

mit maximalem Wert $w(f) = \sum_{(1,v)\in E} f(1, v)$.

Da hier nach einer Lösung (Fluss) mit optimalem Wert gesucht wird, handelt es sich um ein **Optimierungsproblem** (genauer: Maximierungsproblem). Im Gegensatz hierzu wird bei vielen Entscheidungsproblemen nach der Existenz einer Lösung (mit gewissen Eigenschaften) gefragt.

Komplexitätsbetrachtungen:

- MaxFlow ist in Zeit $O(n^5)$ lösbar.
- MaxFlow ist in Platz $O(n^2)$ lösbar.

Das folgende Problem scheint zwar auf den ersten Blick nur wenig mit dem Problem MaxFlow gemein zu haben. In Wirklichkeit entpuppt es sich jedoch als ein Spezialfall von MaxFlow.

Perfektes Matching in bipartiten Graphen (Matching):

Gegeben: Ein bipartiter Graph $G = (U, W, E)$ mit $U \cap W = \emptyset$ und $e \cap U \neq \emptyset \neq e \cap W$ für alle Kanten $e \in E$.

Gefragt: Besitzt G ein perfektes Matching?

Zur Erinnerung: Eine Kantenmenge $M \subseteq E$ heißt **Matching**, falls für alle Kanten $e, e' \in M$ mit $e \neq e'$ gilt: $e \cap e' = \emptyset$. Gilt zudem $\|M\| = n/2$, so heißt M **perfekt** (n ist die Knotenzahl von G).

Komplexitätsbetrachtungen:

- Matching ist in Zeit $O(n^3)$ entscheidbar.
- Matching ist in Platz $O(n^2)$ entscheidbar.

Die bisher betrachteten Probleme können in deterministischer Polynomialzeit gelöst werden und gelten daher als effizient lösbar. Zum Schluss dieses Abschnitts betrachten wir ein Problem, für das vermutlich nur ineffiziente Algorithmen existieren. Wie üblich bezeichnen wir die Gruppe aller Permutationen auf der Menge $\{1, \ldots, n\}$ mit S_n.

Travelling Salesman Problem (TSP):

Gegeben: Eine symmetrische $n \times n$-Distanzmatrix $D = (d_{ij})$ mit $d_{ij} \in \mathbb{N}$.

Gesucht: Eine kürzeste Rundreise, d.h. eine Permutation $\pi \in S_n$ mit minimalem Wert $w(\pi) = \sum_{i=1}^{n} d_{\pi(i),\pi(i+1)}$, wobei wir $\pi(n + 1) = \pi(1)$ setzen.

Komplexitätsbetrachtungen:

- TSP ist in Zeit $O(n!)$ lösbar (Ausprobieren aller Rundreisen).
- TSP ist in Platz $O(n)$ lösbar (mit demselben Algorithmus).
- Durch dynamisches Programmieren* lässt sich TSP in Zeit $O(n^2 2^n)$ lösen, der Platzverbrauch erhöht sich dabei jedoch auf $O(n2^n)$ (siehe Übungen).

*Hierzu berechnen wir für alle Teilmengen $S \subseteq \{2, \ldots, n\}$ und alle $j \in S$ die Länge $l(S, j)$ eines kürzesten Pfades von 1 nach j, der alle Städte in S genau einmal besucht.

2 Rechenmodelle

2.1 Deterministische Turingmaschinen

Definition 1 (**Mehrband-Turingmaschine**)**.**

Eine ***deterministische k-Band-Turingmaschine*** *(**k*-**DTM** *oder einfach* **DTM***) ist ein 5-Tupel $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0)$. Dabei ist*

- Q *eine endliche Menge von* ***Zuständen****,*
- Σ *eine endliche Menge von Symbolen (das* ***Eingabealphabet****) mit $\sqcup, \triangleright \notin \Sigma$ ($\sqcup$ heißt* ***Blank*** *und $\triangleright$ heißt* ***Anfangssymbol****,*
- Γ *das* ***Arbeitsalphabet*** *mit $\Sigma \cup \{\sqcup, \triangleright\} \subseteq \Gamma$,*
- $\delta : Q \times \Gamma^k \to (Q \cup \{q_h, q_{ja}, q_{nein}\}) \times (\Gamma \times \{L, R, N\})^k$ *die* ***Überführungsfunktion*** *(q_h heißt* ***Haltezustand****, q_{ja}* ***akzeptierender*** *und q_{nein}* ***verwerfender Endzustand***
- *und q_0 der* ***Startzustand****.*

Befindet sich M im Zustand $q \in Q$ und stehen die Schreib-Lese-Köpfe auf Feldern mit den Inschriften $a_1, \ldots, a_k$ (a_i auf Band i), so geht M bei Ausführung der Anweisung $\delta : (q, a_1, \ldots, a_k) \mapsto (q', a'_1, D_1, \ldots, a'_k, D_k)$ in den Zustand q' über, ersetzt auf Band i das Symbol a_i durch a'_i und bewegt den Kopf gemäß D_i (im Fall $D_i = L$ um ein Feld nach links, im Fall $D_i = R$ um ein Feld nach rechts und im Fall $D_i = N$ wird der Kopf nicht bewegt).

Außerdem verlangen wir von δ, dass für jede Anweisung $(q, a_1, \ldots, a_k) \mapsto (q', a'_1, D_1, \ldots, a'_k, D_k)$ mit $a_i = \triangleright$ die Bedingung $a'_i = \triangleright$ und $D_i = R$ erfüllt ist (d.h. das Anfangszeichen $\triangleright$ darf nicht durch ein anderes Zeichen überschrieben werden und der Kopf muss nach dem Lesen von $\triangleright$ immer nach rechts bewegt werden).

Definition 2. *Eine* ***Konfiguration*** *ist ein $(2k+1)$-Tupel $K = (q, u_1, v_1, \ldots, u_k, v_k) \in Q \times (\Gamma^* \times \Gamma^+)^k$ und besagt, dass*

- *q der momentane Zustand und*
- *$u_i v_i \sqcup \sqcup \cdots$ die Inschrift des i-ten Bandes ist, und dass*
- *sich der Kopf auf Band i auf dem ersten Zeichen von v_i befindet.*

Definition 3. *Eine Konfiguration $K' = (q', u'_1, v'_1, \ldots, u'_k, v'_k)$ heißt* ***Folgekonfiguration*** *von $K = (q, u_1, a_1 v_1, \ldots, u_k, a_k v_k)$ (kurz: $K \underset{M}{\longrightarrow} K'$), falls eine Anweisung*

$$(q, a_1, \ldots, a_k) \mapsto (q', a'_1, D_1, \ldots, a'_k, D_k)$$

in δ und $b_1, \ldots, b_k \in \Gamma$ existieren, so dass für $i = 1, \ldots, k$ jeweils eine der folgenden drei Bedingungen gilt:

1. *$D_i = N$, $u'_i = u_i$ und $v'_i = a'_i v_i$,*
2. *$D_i = L$, $u_i = u'_i b_i$ und $v'_i = b_i a'_i v_i$,*
3. *$D_i = R$, $u'_i = u_i a'_i$ und $v'_i = \begin{cases} \sqcup, & v_i = \varepsilon, \\ v_i, & \text{sonst}, \end{cases}$*

Wir schreiben $K \underset{M}{\longrightarrow}^t K'$, falls Konfigurationen $K_0, \ldots, K_t$ existieren mit $K_0 = K$ und $K_t = K'$, sowie $K_i \underset{M}{\longrightarrow} K_{i+1}$ für $i = 0, \ldots, t-1$. Die reflexive, transitive Hülle von $\underset{M}{\longrightarrow}$ bezeichnen wir mit $\underset{M}{\longrightarrow}^*$, d.h. $K \underset{M}{\longrightarrow}^* K'$ bedeutet, dass ein $t \geq 0$ existiert mit $K \underset{M}{\longrightarrow}^t K'$.

Definition 4. *Sei $x \in \Sigma^*$ eine Eingabe. Die zugehörige* ***Startkonfiguration*** *ist*

$$K_x = (q_0, \varepsilon, \triangleright x, \underbrace{\varepsilon, \triangleright, \ldots, \varepsilon, \triangleright}_{(k-1)\text{-mal}}).$$

Definition 5. *Eine Konfiguration $K = (q, u_1, v_1, \ldots, u_k, v_k)$ mit $q \in \{q_h, q_{\text{ja}}, q_{\text{nein}}\}$ heißt* ***Endkonfiguration****. Im Fall $q = q_{\text{ja}}$ (bzw. $q = q_{\text{nein}}$) heißt K* ***akzeptierende*** *(bzw.* ***verwerfende****)* ***Endkonfiguration****.*

Definition 6.
Eine DTM M ***hält*** *bei Eingabe $x \in \Sigma^*$ (kurz: $M(x)$ hält), falls es eine Endkonfiguration $K = (q, u_1, v_1, \ldots, u_k, v_k)$ gibt mit*

$$K_x \xrightarrow[M]{}^* K.$$

Weiter definieren wir das ***Resultat*** *$M(x)$ der Rechnung von M bei Eingabe x,*

$$M(x) = \begin{cases} \text{ja}, & M(x) \text{ hält im Zustand } q_{\text{ja}}, \\ \text{nein}, & M(x) \text{ hält im Zustand } q_{\text{nein}}, \\ y, & M(x) \text{ hält im Zustand } q_h, \\ \uparrow \text{ (undefiniert)}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei ergibt sich y aus $u_k v_k$, indem das erste Symbol $\triangleright$ und sämtliche Blanks am Ende entfernt werden, d. h. $u_k v_k = \triangleright y \sqcup^i$ für ein $i \geq 0$. Für $M(x) =$ ja sagen wir auch „$M(x)$ akzeptiert“ und für $M(x) =$ nein „$M(x)$ verwirft“.

Definition 7. *Die von einer* DTM *M* ***akzeptierte Sprache*** *ist*

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid M(x) \text{ akzeptiert}\}.$$

Eine DTM, die eine Sprache L akzeptiert, darf also bei Eingaben $x \notin L$ unendlich lange rechnen. In diesem Fall heißt L **semi-entscheidbar** (oder **rekursiv aufzählbar**). Dagegen muss eine DTM, die eine Sprache L entscheidet, bei jeder Eingabe halten.

Definition 8. *Sei $L \subseteq \Sigma^*$. Eine* DTM *M* ***entscheidet*** *L, falls für alle $x \in \Sigma^*$ gilt:*

$$x \in L \Rightarrow M(x) \text{ akz.}$$
$$x \notin L \Rightarrow M(x) \text{ verw.}$$

In diesem Fall heißt L ***entscheidbar*** *(oder* ***rekursiv****).*

Definition 9. *Sei $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ eine Funktion. Eine* DTM *M* ***berechnet*** *f, falls für alle $x \in \Sigma^*$ gilt:*

$$M(x) = f(x).$$

f heißt dann ***berechenbar*** *(oder* ***rekursiv****).*

Aus dem Grundstudium wissen wir, dass eine nichtleere Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ genau dann semi-entscheidbar ist, wenn eine berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ existiert, deren Bild $\mathit{range}(f) = \{f(x) \mid x \in \Sigma^*\}$ die Sprache L ist.

2.2 Nichtdeterministische Berechnungen

Anders als eine DTM, für die in jeder Konfiguration höchstens eine Anweisung ausführbar ist, hat eine nichtdeterministische Turingmaschine in jedem Rechenschritt die Wahl unter einer endlichen Anzahl von Anweisungen.

Definition 10. *Eine* ***nichtdeterministische k-Band-Turingmaschine*** *(kurz* ***k-NTM*** *oder einfach* **NTM***) ist ein 5-Tupel $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0)$, wobei Q, Σ, Γ, q_0 genau wie bei einer k-DTM definiert sind und*

$$\delta : Q \times \Gamma^k \to \mathcal{P}(Q \cup \{q_h, q_{\text{ja}} q_{\text{nein}}\} \times (\Gamma \times \{R, L, N\})^k)$$

die Eigenschaft hat, dass für $(q', a'_1, D_1, \ldots, a'_k, D_k) \in \delta(q, a_1, \ldots, a_k)$ im Fall $a_i = \triangleright$ immer $a'_i = \triangleright$ und $D_i = R$ gilt.

Die Begriffe **Konfiguration**, **Start-** und **Endkonfiguration** übertragen sich unmittelbar von DTMs auf NTMs. Der Begriff der **Folgekonfiguration** lässt sich übertragen, indem wir $\delta(q, a_1, \ldots, a_k) = (q', a'_1, D_1, \ldots, a'_k, D_k)$ durch $(q', a'_1, D_1, \ldots, a'_k, D_k) \in \delta(q, a_1, \ldots, a_k)$ ersetzen. In beiden Fällen schreiben wir auch $(q, a_1, \ldots, a_k) \mapsto (q', a'_1, D_1, \ldots, a'_k, D_k)$.
Wir werden NTMs nur zum Erkennen von Sprachen (d.h. als Akzeptoren) und nicht zum Berechnen von Funktionen benutzen.

Definition 11. *Sei M eine* NTM.

a) *$M(x)$ **hält** (kurz $M(x)\downarrow$), falls $M(x)$ nur endlich lange Rechnungen ausführt. Andernfalls schreiben wir $M(x)\uparrow$.*

b) *$M(x)$ **akzeptiert**, falls $M(x)$ hält und eine akzeptierende Endkonfiguration K existiert mit $K_x \to^* K$.*

c) *$M(x)$ **verwirft**, falls $M(x)$ hält und $M(x)$ nicht akzeptiert.*

d) *Die von M **akzeptierte Sprache** ist*

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \,|\, M(x) \text{ akzeptiert}\}.$$

e) *M **entscheidet** $L(M)$, falls M alle Eingaben $x \notin L(M)$ verwirft.*

2.3 Zeitkomplexität

Der Zeitverbrauch $time_M(x)$ einer Turingmaschine M bei Eingabe x ist die maximale Anzahl von Rechenschritten, die M ausgehend von der Startkonfiguration K_x ausführen kann (bzw. undefiniert oder ∞, falls unendlich lange Rechnungen existieren).

Definition 12.

a) *Sei M eine TM (d.h. eine DTM oder NTM) und sei $x \in \Sigma^*$ eine Eingabe. Dann ist*

$$time_M(x) = \max\{t \geq 0 \,|\, \exists K : K_x \to^t K\}$$

*die **Rechenzeit** von M bei Eingabe x, wobei $\max \mathbb{N} = \infty$ ist.*

b) *Sei $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine monoton wachsende Funktion. Dann ist M **$t(n)$-zeitbeschränkt**, falls für alle $x \in \Sigma^*$ gilt:*

$$time_M(x) \leq t(|x|).$$

Alle Sprachen, die in (nicht-)deterministischer Zeit $t(n)$ entscheidbar sind, fassen wir in den Komplexitätsklassen

$$\mathsf{DTIME}(t(n)) = \{L(M) \,|\, M \text{ ist eine } t(n)\text{-zeitbeschränkte DTM}\}$$

bzw.

$$\mathsf{NTIME}(t(n)) = \{L(M) \,|\, M \text{ ist eine } t(n)\text{-zeitbeschränkte NTM}\}$$

zusammen. Ferner sei

$$\mathsf{FTIME}(t(n)) = \left\{ f \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ wird von einer } t(n)\text{-zeitbe-} \\ \text{schränkten DTM berechnet} \end{array} \right\}.$$

Für eine Klasse F von Funktionen $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei $\mathsf{DTIME}(F) = \bigcup_{t \in F} \mathsf{DTIME}(f(n))$. $\mathsf{NTIME}(F)$ und $\mathsf{FTIME}(F)$ sind analog definiert. Die Klasse aller polynomiell beschränkten Funktionen bezeichnen wir mit $\mathrm{poly}(n)$. Die wichtigsten Zeitkomplexitätsklassen sind

$$\begin{aligned}
\mathsf{LINTIME} &= \mathsf{DTIME}(\mathcal{O}(n)) = \bigcup_{c \geq 1} \mathsf{DTIME}(cn + c) && \text{„Linearzeit“,} \\
\mathsf{P} &= \mathsf{DTIME}(\mathrm{poly}(n)) = \bigcup_{c \geq 1} \mathsf{DTIME}(n^c + c) && \text{„Polynomialzeit“,} \\
\mathsf{E} &= \mathsf{DTIME}(2^{\mathcal{O}(n)}) = \bigcup_{c \geq 1} \mathsf{DTIME}(2^{cn+c}) && \\
& && \text{„Lineare Exponentialzeit“,} \\
\mathsf{EXP} &= \mathsf{DTIME}(2^{\mathrm{poly}(n)}) = \bigcup_{c \geq 1} \mathsf{DTIME}(2^{n^c+c}) && \text{„Exponentialzeit“.}
\end{aligned}$$

Die Klassen $\mathsf{NP}, \mathsf{NE}, \mathsf{NEXP}$ und $\mathsf{FP}, \mathsf{FE}, \mathsf{FEXP}$ sind analog definiert.

2.4 Platzkomplexität

Zur Definition von Platzkomplexitätsklassen verwenden wir so genannte Offline-Turingmaschinen und Transducer. Diese haben die

Eigenschaft, dass sie das erste Band nur als Eingabeband (also nur zum Lesen) bzw. das k-te Band nur als Ausgabeband (also nur zum Schreiben) benutzen. Der Grund für diese Einschränkungen liegt darin, sinnvolle Definitionen für Komplexitätsklassen mit einem sublinearen Platzverbrauch zu erhalten.

Definition 13. *Eine TM M heißt **Offline-TM**, falls für jede Anweisung $(q, a_1, \ldots, a_k) \mapsto (q', a'_1, D_1, \ldots, a'_k, D_k)$ die Bedingung*

$$a'_1 = a_1 \wedge [a_1 = \sqcup \Rightarrow D_1 = L]$$

*gilt. Gilt weiterhin immer $D_k \neq L$ und ist M eine DTM, so heißt M **Transducer**.*

Dies bedeutet, dass eine Offline-TM nicht auf das Eingabeband schreiben darf (*read-only*). Beim Transducer dient das letzte Band als Ausgabeband, auch dieses kann nicht als Speicher benutzt werden (*write-only*).
Der Zeitverbrauch $time_M(x)$ von Offline-TMs und von Transducern ist genauso definiert wie bei DTMs. Als nächstes definieren wir den Platzverbrauch einer TM als die Anzahl aller während der Rechnung besuchten Bandfelder.

Definition 14.

a) Sei M eine TM und sei $x \in \Sigma^*$ eine Eingabe mit $time_M(x) < \infty$. Dann ist

$$space_M(x) = \max\{s \geq 1 \,|\, \exists K = (q, u_1, v_1, \ldots, u_k, v_k) \text{ mit } K_x \to^* K \text{ und } s = \sum_{i=1}^{k} |u_i v_i|\}$$

*der **Platzverbrauch** von M bei Eingabe x. Für eine Offline-TM ersetzen wir $\sum_{i=1}^{k} |u_i v_i|$ durch $\sum_{i=2}^{k} |u_i v_i|$ und für einen Transducer durch $\sum_{i=2}^{k-1} |u_i v_i|$.*

*b) Sei $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ monoton wachsend. Dann ist M **$s(n)$-platzbeschränkt**, falls für alle $x \in \Sigma^*$ gilt:*

$$space_M(x) \leq s(|x|) \text{ und } time_M(x) < \infty.$$

D.h., $space_M(x)$ ist undefiniert, falls $time_M(x) = \infty$ ist.

Alle Sprachen, die in (nicht-) deterministischem Platz $s(n)$ entscheidbar sind, fassen wir in den Komplexitätsklassen

$$\mathsf{DSPACE}(s(n)) = \left\{ L(M) \,\middle|\, \begin{array}{c} M \text{ ist eine } s(n)\text{-platzbe-} \\ \text{schränkte Offline-DTM} \end{array} \right\}$$

bzw.

$$\mathsf{NSPACE}(s(n)) = \left\{ L(M) \,\middle|\, \begin{array}{c} M \text{ ist eine } s(n)\text{-platzbe-} \\ \text{schränkte Offline-NTM} \end{array} \right\}$$

zusammen. Ferner sei

$$\mathsf{FSPACE}(s(n)) = \left\{ f \,\middle|\, \begin{array}{c} f \text{ wird von einem } s(n)\text{-platzbe-} \\ \text{schränkten Transducer berechnet} \end{array} \right\}.$$

Die wichtigsten Platzkomplexitätsklassen sind

$$\begin{aligned} \mathsf{L} = \mathsf{LOGSPACE} &= \mathsf{DSPACE}(O(\log n)) \\ \mathsf{L}^c &= \mathsf{DSPACE}(O(\log^c n)) \\ \mathsf{LINSPACE} &= \mathsf{DSPACE}(O(n)) \\ \mathsf{PSPACE} &= \mathsf{DSPACE}(\mathrm{poly}(n)) \\ \mathsf{ESPACE} &= \mathsf{DSPACE}(2^{\mathcal{O}(n)}) \\ \mathsf{EXPSPACE} &= \mathsf{DSPACE}(2^{\mathrm{poly}(n)}) \end{aligned}$$

Die Klassen $\mathsf{NL}, \mathsf{NLINSPACE}$ und $\mathsf{NPSPACE}$, sowie $\mathsf{FL}, \mathsf{FLINSPACE}$ und $\mathsf{FPSPACE}$ sind analog definiert, wobei $\mathsf{NPSPACE}$ mit PSPACE zusammenfällt (wie wir bald sehen werden).

3 Grundlegende Beziehungen

In diesem Kapitel leiten wir die wichtigsten Inklusionsbeziehungen zwischen deterministischen und nichtdeterministischen Platz- und Zeitkomplexitätsklassen her. Zuerst befassen wir uns jedoch mit Robustheitseigenschaften dieser Klassen.

3.1 Robustheit von Komplexitätsklassen

Wir zeigen zuerst, dass platzbeschränkte TMs nur ein Arbeitsband benötigen.

Lemma 15 (Bandreduktion)**.**
*Zu jeder $s(n)$-platzbeschränkten Offline-*DTM *M ex. eine $s(n)$-platzbeschränkte Offline-2-*DTM *M' mit $L(M') = L(M)$.*

Beweis. Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0)$ eine Offline-k-DTM mit $k \geq 3$. Betrachte die Offline-*2*-DTM $M' = (Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q_0')$ mit $\Gamma' = \Gamma \cup (\Gamma \cup \hat{\Gamma})^{k-1}$, wobei $\hat{\Gamma}$ für jedes $a \in \Gamma$ die markierte Variante $\hat{a}$ enthält. M' hat dasselbe Eingabeband wie M, speichert aber die Inhalte von $(k-1)$ übereinander liegenden Feldern der Arbeitsbänder von M auf einem Feld ihres Arbeitsbandes. Zur Speicherung der Kopfpositionen von M werden Markierungen benutzt.

Initialisierung: In den ersten beiden Rechenschritten erzeugt M' auf ihrem Arbeitsband (Band 2) $k-1$ Spuren, die jeweils mit dem markierten Anfangszeichen $\hat{\triangleright}$ initialisiert werden:

$$K_x = (q_0', \varepsilon, \triangleright x, \varepsilon, \triangleright) \xrightarrow[M']{} (q_1', \triangleright, x, \triangleright, \sqcup) \xrightarrow[M']{} (q_2', \varepsilon, \triangleright x, \triangleright, \begin{pmatrix} \hat{\triangleright} \\ \vdots \\ \hat{\triangleright} \end{pmatrix})$$

Simulation: M' simuliert einen Rechenschritt von M, indem sie den Kopf auf dem Arbeitsband soweit nach rechts bewegt, bis sie alle $(k-1)$ markierten Zeichen $a_2, \ldots, a_k$ gefunden hat. Diese speichert sie neben dem aktuellen Zustand q von M in ihrem Zustand. Während M' den Kopf wieder nach links bewegt, führt M' folgende Aktionen durch: Ist a_1 das von M' (und von M) gelesene Eingabezeichen und ist $\delta(q, a_1, a_2, \ldots, a_k) = (q', a_1, D_1, a_2', D_2, \ldots, a_k', D_k)$, so bewegt M' den Eingabekopf gemäß D_1, ersetzt auf dem Arbeitsband die markierten Zeichen a_i durch a_i' und verschiebt deren Marken gemäß D_i, $i = 2, \ldots, k$.

Akzeptanzverhalten: M' akzeptiert genau dann, wenn M akzeptiert.

Offenbar gilt nun $L(M') = L(M)$ und $space_{M'}(x) \leq space_M(x)$. ■

In den Übungen wird gezeigt, dass die Sprache der Palindrome durch eine 2-DTM zwar in Linearzeit entscheidbar ist, eine 1-DTM hierzu jedoch Zeit $\Omega(n^2)$ benötigt. Tatsächlich lässt sich jede $t(n)$-zeitbeschränkte k-DTM M von einer 1-DTM M' in Zeit $O(t(n)^2)$ simulieren. Bei Verwendung einer 2-DTM ist die Simulation sogar in Zeit $O(t(n) \log t(n))$ durchführbar (siehe Übungen). Als nächstes wenden wir uns wichtigen Robustheitseigenschaften von Platz- und Zeitkomplexitätsklassen zu.

Satz 16 (Lineare Platzkompression und Beschleunigung)**.**
Für alle $c > 0$ gilt

i) $\mathsf{DSPACE}(s(n)) \subseteq \mathsf{DSPACE}(2 + cs(n))$*, (lin. space compression)*

ii) $\mathsf{DTIME}(t(n)) \subseteq \mathsf{DTIME}(2 + n + c \cdot t(n))$*. (linear speedup)*

Beweis. i) Sei $L \in \mathsf{DSPACE}(s(n))$ und sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0)$ eine $s(n)$-platzbeschränkte Offline-k-DTM mit $L(M) = L$. Nach vorigem Lemma können wir $k = 2$ annehmen. O.B.d.A. sei $c < 1$. Wähle $m = \lceil 1/c \rceil$ und betrachte die Offline-*2*-DTM

$$M' = (Q \times \{1, \ldots, m\}, \Sigma, \Sigma \cup \{\sqcup, \triangleright\} \cup \Gamma^m, \delta', (q_0, m))$$

mit

$$\delta'((q,i),a,b) = \begin{cases} ((q',1),a,D_1,\triangleright,R), \\ \qquad \text{falls } b = \triangleright \text{ und } \delta(q,a,\triangleright) = (q',a,D_1,\triangleright,R), \\ ((q',j),a,D_1,(b_1,\ldots,b_{i-1},b_i',b_{i+1},\ldots,b_m),D_2'), \\ \qquad \text{falls } [b = (b_1,\ldots,b_m) \text{ oder } b = \sqcup = b_1 = \\ \qquad \ldots = b_m] \text{ und } \delta(q,a,b_i) = (q',a,D_1,b_i',D_2), \end{cases}$$

wobei

$$j = \begin{cases} i, & D_2 = N \\ i+1, & D_2 = R, i < m \\ 1, & D_2 = R, i = m \\ m, & D_2 = L, i = 1 \\ i-1, & D_2 = L, i > 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad D_2' = \begin{cases} L, & D_2 = L, i = 1 \\ R, & D_2 = R, i = m \\ N, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist. Identifizieren wir die Zustände (q_{ja},i) mit q_{ja} und (q_{nein},i) mit q_{nein}, so ist leicht zu sehen, dass $L(M') = L(M) = L$ gilt. Zudem gilt

$$\begin{aligned} \mathit{space}_{M'} &\leq 1 + \lceil (\mathit{space}_M(x) - 1)/m \rceil \\ &\leq 2 + \mathit{space}_M(x)/m \\ &\leq 2 + c \cdot \mathit{space}_M(x) \qquad \text{(wegen } m = \lceil 1/c \rceil \geq 1/c). \end{aligned}$$

ii) Sei $L \in \mathsf{DTIME}(t(n))$ und sei $M = (Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0)$ eine $t(n)$-zeitbeschränkte k-DTM mit $L(M) = L$, wobei wir $k \geq 2$ annehmen. Wir konstruieren eine k-DTM M' mit $L(M') = L$ und $\mathit{time}_{M'}(x) \leq 2 + |x| + c \cdot \mathit{time}_M(x)$. M' verwendet das Alphabet $\Gamma' = \Gamma \cup \Gamma^m$ mit $m = \lceil 8/c \rceil$ und simuliert M wie folgt.

Initialisierung: M' kopiert die Eingabe $x = x_1 \ldots x_n$ in Blockform auf das zweite Band. Hierzu fasst M' je m Zeichen von x zu einem Block $(x_{im+1},\ldots,x_{(i+1)m})$, $i = 0,\ldots,l = \lceil n/m \rceil - 1$, zusammen, wobei der letzte Block $(x_{lm+1},\ldots,x_n,\sqcup,\ldots,\sqcup)$ mit $(l+1)m - n$ Blanks auf die Länge m gebracht wird. Sobald M' das erste Blank hinter der Eingabe x erreicht, ersetzt sie dieses durch das Zeichen $\triangleright$, d.h. das erste Band von M' ist nun mit $\triangleright x \triangleright$ und das zweite Band mit

$$\triangleright(x_1,\ldots,x_m)\ldots(x_{(l-1)m+1},\ldots,x_{lm})(x_{lm+1},\ldots,x_n,\sqcup,\ldots,\sqcup)$$

beschriftet. Hierzu benötigt M' genau $n+2$ Schritte. In weiteren $l+1 = \lceil n/m \rceil$ Schritten kehrt M' an den Beginn des 2. Bandes zurück. Von nun an benutzt M' das erste Band als Arbeitsband und das zweite als Eingabeband.

Simulation: M' simuliert jeweils eine Folge von m Schritten von M in 6 Schritten:

M' merkt sich in ihrem Zustand den Zustand q von M vor Ausführung dieser Folge und die aktuellen Kopfpositionen $i_j \in \{1,\ldots,m\}$ von M innerhalb der gerade gelesenen Blöcke auf den Bändern $j = 1,\ldots,k$. Die ersten 4 Schritte verwendet M', um die beiden Nachbarblöcke auf jedem Band zu erfassen ($LRRL$). Mit dieser Information kann M' die nächsten m Schritte von M vorausberechnen und die entsprechende Konfiguration in 2 weiteren Schritten herstellen.

Akzeptanzverhalten: M' akzeptiert genau dann, wenn M dies tut.

Es ist klar, dass $L(M') = L$ ist. Zudem gilt für jede Eingabe x der Länge $|x| = n$

$$\begin{aligned} \mathit{time}_{M'}(x) &\leq n + 2 + \lceil n/m \rceil + 6\lceil t(n)/m \rceil \\ &\leq n + 2 + 7\lceil t(n)/m \rceil \\ &\leq n + 2 + 7ct(n)/8 + 7 \\ &\leq n + 2 + ct(n), \text{ falls } c \cdot t(n)/8 \geq 7. \end{aligned}$$

Da das Ergebnis der Rechnung von $M(x)$ im Fall $t(n) < 56/c$ nur von konstant vielen Eingabezeichen abhängt, kann M' diese Eingaben schon während der Initialisierungsphase (durch table-lookup) in Zeit $n+2$ entscheiden. ■

Korollar 17.

i) $\mathsf{DSPACE}(O(s(n))) = \mathsf{DSPACE}(s(n))$, *falls* $s(n) \geq 2$.

ii) $\mathsf{DTIME}(O(t(n))) = \mathsf{DTIME}(t(n))$, *falls* $t(n) \geq (1+\varepsilon)n + 2$ *für ein* $\varepsilon > 0$ *ist.*

iii) $\mathsf{DTIME}(O(n)) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathsf{DTIME}((1+\varepsilon)n + 2)$.

Beweis. i) Sei $L \in \mathsf{DSPACE}(cs(n) + c)$ für eine Konstante $c \geq 0$. Ist $s(n) < 6$ für alle n, so folgt $L \in \mathsf{DSPACE}(\mathcal{O}(1)) = \mathsf{DSPACE}(0)$. Gilt dagegen $s(n) \geq 6$ für alle $n \geq n_0$, so existiert für $c' = 1/2c$ eine Offline-k-DTM M, die L für fast alle Eingaben in Platz $2 + c'cs(n) + c'c \leq 3 + s(n)/2 \leq s(n)$ entscheidet. Wegen $s(n) \geq 2$ können wir M leicht so modifizieren, dass sie auch die endlich vielen Ausnahmen in Platz $s(n)$ entscheidet.

ii) Sei $L \in \mathsf{DTIME}(ct(n) + c)$ für ein $c \geq 0$. Nach vorigem Satz existiert für $c' = \varepsilon/(2 + 2\varepsilon)c$ eine DTM M, die L in Zeit $time_M(x) \leq 2 + n + c'(ct(n) + c)$ entscheidet. Wegen $t(n) \geq (1+\varepsilon)n$ und da für alle $n \geq (4 + 2c'c)/\varepsilon$ die Ungleichung $2 + c'c \leq \varepsilon n/2$ gilt, folgt

$$time_M(x) \leq 2 + n + c'ct(n) + c'c = \underbrace{c'ct(n)}_{=\frac{\varepsilon t(n)}{2+2\varepsilon}} + \underbrace{2 + c'c + n}_{\leq \frac{(\varepsilon+2)n}{2} \leq \frac{(\varepsilon+2)t(n)}{2+2\varepsilon}} \leq t(n)$$

für fast alle n. Zudem können wir M wegen $t(n) \geq n + 2$ leicht so modifizieren, dass sie auch die endlich vielen Ausnahmen in Zeit $t(n)$ entscheidet.

iii) Klar, da $\mathsf{DTIME}(O(n)) = \mathsf{DTIME}(O((1+\varepsilon)n + 2))$ und diese Klasse nach *ii)* für jedes $\varepsilon > 0$ gleich $\mathsf{DTIME}((1+\varepsilon)n + 2)$ ist. ■

3.2 Deterministische Simulationen von nichtdeterministischen Berechnungen

In diesem Abschnitt betrachten wir möglichst platz- und zeiteffiziente deterministische Simulationen von nichtdeterministischen TMs.

Satz 18.

i) $\mathsf{NTIME}(t(n)) \subseteq \mathsf{DSPACE}(O(t(n)))$,

ii) $\mathsf{NSPACE}(s(n)) \subseteq \mathsf{DTIME}(2^{O(s(n)+\log n)})$.

Beweis. i) Sei $L \in \mathsf{NTIME}(t(n))$ und sei $N = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0)$ eine k-NTM, die L in Zeit $t(n)$ entscheidet. Weiter sei

$$d = \max_{(q,\vec{a}) \in Q \times \Gamma^k} \|\delta(q, \vec{a})\|$$

der maximale Verzweigungsgrad von N. Dann ist jede Rechnung

$$K_x = K_0 \underset{N}{\rightarrow} K_1 \underset{N}{\rightarrow} \ldots \underset{N}{\rightarrow} K_t$$

der Länge t von $N(x)$ eindeutig durch eine Folge $(i_1, \ldots, i_t) \in \{1, \ldots, d\}^t$ beschreibbar. Betrachte die Offline-*(k+2)*-DTM M, die auf ihrem 2. Band für $t = 1, 2, \ldots$ der Reihe nach alle Folgen $(i_1, \ldots, i_t) \in \{1, \ldots, d\}^t$ generiert. Für jede solche Folge kopiert M die Eingabe auf Band 3 und simuliert die zugehörige Rechnung von $N(x)$ auf den Bändern 3 bis $k + 2$. M akzeptiert, sobald N bei einer dieser Simulationen in den Zustand q_{ja} gelangt. Wird dagegen ein t erreicht, für das alle d^t Simulationen von N im Zustand q_{nein} oder q_{h} enden, so verwirft M. Nun ist leicht zu sehen, dass $L(M) = L(N)$ und der Platzverbrauch von M durch

$$space_M(x) \;\leq\; time_N(x) + space_N(x) \;\leq\; (k+1)(time_N(x) + 1)$$

beschränkt ist.

ii) Sei $L \in \mathsf{NSPACE}(s(n))$ und sei $N = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0)$ eine Offline-*2*-NTM, die L in Platz $s(n)$ entscheidet. Bei einer Eingabe x der Länge n kann N

- die Köpfe des Eingabe- bzw. Arbeitsbandes auf höchstens $n + 2$ bzw. $s(n)$ verschiedenen Bandfeldern positionieren,
- das Arbeitsband mit höchstens $\|\Gamma\|^{s(n)}$ verschiedenen Beschriftungen versehen und

- höchstens $\|Q\|$ verschiedene Zustände annehmen.

D.h. ausgehend von der Startkonfiguration K_x kann N in Platz $s(n)$ höchstens

$$t(n) = (n+2)s(n)\|\Gamma\|^{s(n)}\|Q\| \leq c^{s(n)+\log n}$$

verschiedene Konfigurationen erreichen, wobei c eine von N abhängige Konstante ist. Um N zu simulieren, testet M für $s = 1, 2, \ldots,$ ob $N(x)$ eine akzeptierende Endkonfiguration $K = (q_{\text{ja}}, u_1, v_1, u_2, v_2)$ der *Größe* $|u_2v_2| = s$ erreichen kann. Ist dies der Fall, akzeptiert M. Erreicht dagegen s einen Wert, so dass $N(x)$ keine Konfiguration der Größe s erreichen kann, verwirft M. Hierzu muss M für $s = 1, 2, \ldots, s(n)$ jeweils alle von der Startkonfiguration K_x erreichbaren Konfigurationen der Größe s bestimmen, was in Zeit $(c^{s(n)+\log n})^{O(1)} = 2^{O(s(n)+logn)}$ möglich ist. ■

Korollar 19. $s(n) \geq \log n \Rightarrow \mathsf{NSPACE}(s(n)) \subseteq \mathsf{DTIME}(2^{O(s(n))})$.

Es gilt somit für jede Funktion $s(n) \geq \log n$,

$$\mathsf{DSPACE}(s) \subseteq \mathsf{NSPACE}(s) \subseteq \mathsf{DTIME}(2^{O(s)})$$

und für jede Funktion $t(n) \geq n + 2$,

$$\mathsf{DTIME}(t) \subseteq \mathsf{NTIME}(t) \subseteq \mathsf{DSPACE}(t).$$

Insbesondere erhalten wir somit die Inklusionskette

$$\begin{aligned}\mathsf{L} \subseteq \mathsf{NL} \subseteq \mathsf{P} \subseteq \mathsf{NP} \subseteq \mathsf{PSPACE} \subseteq \mathsf{NPSPACE}\\ \subseteq \mathsf{EXP} \subseteq \mathsf{NEXP} \subseteq \mathsf{EXPSPACE} \subseteq \ldots\end{aligned}$$

Des weiteren impliziert Satz 16 für $t(n) \geq n + 2$ und $s(n) \geq \log n$ die beiden Inklusionen

$$\mathsf{NTIME}(t) \subseteq \mathsf{DTIME}(2^{O(t)}) \text{ und } \mathsf{NSPACE}(s) \subseteq \mathsf{DSPACE}(2^{O(s)}),$$

wovon sich letztere noch erheblich verbessern lässt, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden.

3.3 Der Satz von Savitch

Praktisch relevante Komplexitätsklassen werden durch Zeit- und Platzschranken $t(n)$ und $s(n)$ definiert, die sich mit relativ geringem Aufwand berechnen lassen.

Definition 20. *Eine monotone Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ heißt **echte** (engl. proper) **Komplexitätsfunktion**, falls es einen Transducer M gibt mit*

- $M(x) = 1^{f(|x|)}$,
- $space_M(x) = O(f(|x|))$ *und*
- $time_M(x) = O(f(|x|) + |x|)$.

Beispiele für echte Komplexitätsfunktionen sind k, $\lceil \log n \rceil$, $\lceil \log^k n \rceil$, $\lceil n \cdot \log n \rceil$, $n^k + k$, 2^n, $n! \cdot \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ (siehe Übungen).

Satz 21 (Savitch, 1970)**.**
Für jede echte Komplexitätsfunktion $s(n) \geq \log n$ gilt

$$\mathsf{NSPACE}(s) \subseteq \mathsf{DSPACE}(s^2).$$

Beweis. Sei $L \in \mathsf{NSPACE}(s)$ und sei N eine Offline-*2*-NTM, die L in Platz $s(n)$ entscheidet. Wie im Beweis von Satz 18 gezeigt, kann N bei einer Eingabe x der Länge n höchstens $c^{s(n)}$ verschiedene Konfigurationen einnehmen. Daher muss im Fall $x \in L$ eine akzeptierende Rechnung der Länge $\leq c^{s(n)}$ existieren. Zudem können wir annehmen, dass $N(x)$ köchstens eine akzeptierende Endkonfiguration $\hat{K}_x$ erreichen kann.

Sei $K_1, \ldots, K_{c^{s(n)}}$ eine Aufzählung aller Konfigurationen von $N(x)$ die Platz höchstens $s(n)$ benötigen. Dann ist leicht zu sehen, dass für je zwei solche Konfigurationen K, K' und jede Zahl i folgende Äquivalenz gilt:

$$K \xrightarrow[N]{}^{\leq 2^i} K' \Leftrightarrow \exists K_j : K \xrightarrow[N]{}^{\leq 2^{i-1}} K_j \wedge K_j \xrightarrow[N]{}^{\leq 2^{i-1}} K'.$$

Diese Beobachtung führt sofort auf folgende Prozedur $\mathsf{reach}(K, K', i)$, um die Gültigkeit von $K \xrightarrow[N]{}^{\leq 2^i} K'$ zu testen.

Prozedur $\mathsf{reach}(K, K', i)$

```
1  if i = 0 then return(K = K' or K ->_N K')
2  for each Konfiguration K_j do
3    if reach(K, K_j, i − 1) and reach(K_j, K', i − 1) then
4      return(true)
5  return(false)
```

Nun können wir N durch folgende Offline-3-DTM M simulieren. M benutzt ihr 2. Band als Laufzeitkeller zur Verwaltung der Inkarnationen der rekursiven Aufrufe von reach. Hierzu speichert M auf ihrem 2. Band eine Folge von Tripeln der Form (K, K', i). Das 3. Band wird zum Kopieren von Tripeln auf dem 2. Band und zur Berechnung von K_{j+1} aus K_j benutzt wird.

Initialisierung: $M(x)$ schreibt das Tripel $(K_x, \hat{K}_x, \lceil s(|n|) \log c \rceil)$ auf das 2. Band, wobei für das Eingabeband nur die Kopfposition, nicht jedoch die Beschriftung notiert wird (also z.B. $K_x = (q_0, 1, \varepsilon, \triangleright)$).

Simulation: Sei (K, K', i) das am weitesten rechts auf dem 2. Band stehende Tripel (also das oberste Kellerelement).

Im Fall $i = 0$ testet M direkt, ob $K \xrightarrow[N]{}^{\leq 1} K'$ gilt und gibt die Antwort zurück.

Andernfalls fügt M beginnend mit $j = 1$ das Tripel $(K, K_j, i-1)$ hinzu und berechnet (rekursiv) die Antwort für dieses Tripel.

Ist diese negativ, so wird das Tripel $(K, K_j, i-1)$ durch das nächste Tripel $(K, K_{j+1}, i-1)$ ersetzt (solange $j < c^{s(n)}$ ist, andernfalls erfährt das Tripel (K, K', i) eine negative Antwort).

Erhält $(K, K_j, i-1)$ eine positive Antwort, so ersetzt M das Tripel $(K, K_j, i-1)$ durch das Tripel $(K_j, K', i-1)$ und berechnet die zugehörige Antwort. Bei einer negativen Antwort fährt M mit dem nächsten Tripel $(K, K_{j+1}, i-1)$ fort. Bei einer positiven Antwort erhält auch (K, K', i) eine positive Antwort.

Akzeptanzverhalten: M akzeptiert, falls die Antwort auf das Starttripel $(K_x, \hat{K}_x, \lceil s(|n|) \log c \rceil)$ positiv ist.

Da sich auf dem 2. Band zu jedem Zeitpunkt höchstens $\lceil s(|n|) \log c \rceil$ Tripel befinden und jedes Tripel $O(s(|x|))$ Platz benötigt, besucht M nur $O(s^2(|x|))$ Felder. ■

Korollar 22.

i) $\mathsf{NL} \subseteq \mathsf{L}^2$,

ii) $\mathsf{NPSPACE} = \bigcup_{k>0} \mathsf{NSPACE}(n^k) \subseteq \bigcup_{k>0} \mathsf{DSPACE}(n^{2k}) = \mathsf{PSPACE}$,

iii) $\mathsf{NPSPACE}$ *ist unter Komplement abgeschlossen,*

iv) $\mathsf{CSL} = \mathsf{NSPACE}(n) \subseteq \mathsf{DSPACE}(n^2) \cap \mathsf{E}$.

Eine weitere Folgerung aus dem Satz von Savitch ist, dass das Komplement $\overline{L}$ einer Sprache $L \in \mathsf{NSPACE}(s)$ in $\mathsf{DSPACE}(s^2)$ und somit auch in $\mathsf{NSPACE}(s^2)$ liegt. Wir werden gleich sehen, dass $\overline{L}$ sogar in $\mathsf{NSPACE}(s)$ liegt, d.h. die nichtdeterministischen Platzklassen $\mathsf{NSPACE}(s)$ sind unter Komplementbildung abgeschlossen.

3.4 Der Satz von Immerman und Szelepcsényi

Wir wir gesehen haben, impliziert der Satz von Savitch den Abschluss von $\mathsf{NPSPACE}$ unter Komplementbildung. Dagegen wurde die Frage ob auch die Klasse $\mathsf{CSL} = \mathsf{NSPACE}(n)$ der kontextsensitiven Sprachen unter Komplementbildung abgeschlossen ist, erst in den 80ern von Neil Immerman und unabhängig davon von Robert Szelepcsényi gelöst.

Definition 23. *Für eine Sprachklasse* C *bezeichne* $\mathsf{co\text{-}C} = \{\overline{L} | L \in \mathsf{C}\}$ *die zu* C ***komplementäre Sprachklasse****. Dabei bezeichnet* $\overline{L} = \Sigma^* - L$ *das* ***Komplement*** *einer Sprache* $L \subseteq \Sigma^*$.

Die zu NP komplementäre Klasse ist co-NP $= \{L | \overline{L} \in \mathsf{NP}\}$. Ein Beispiel für ein co-NP-Problem ist TAUT:

Gegeben: Eine boolsche Formel F über n Variablen $x_1, \ldots, x_n$.

Gefragt: Ist F eine Tautologie, d. h. gilt $f(\vec{a}) = 1$ für alle Belegungen $\vec{a} \in \{0,1\}^n$?

Die Frage ob NP unter Komplementbildung abgeschlossen ist (d.h., ob NP = co-NP gilt), ist ähnlich wie das $\mathsf{P} \stackrel{?}{=} \mathsf{NP}$-Problem ungelöst.

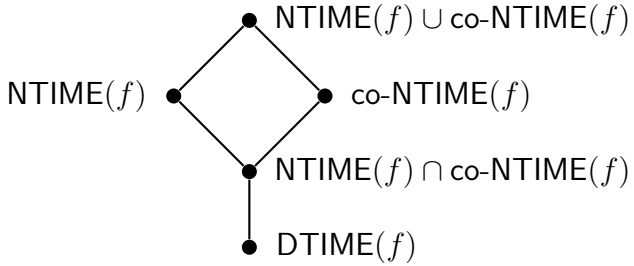
Da sich deterministische Rechnungen leicht komplementieren lassen (durch einfaches Vertauschen der Zustände q_{ja} und q_{nein}), sind deterministische Komplexitätsklassen unter Komplementbildung abgeschlossen.

Proposition 24.

i) co-DSPACE$(s(n))$ = DSPACE$(s(n))$,

ii) co-DTIME$(t(n))$ = DTIME$(t(n))$.

Damit ergibt sich folgende Inklusionsstruktur:



Dagegen lassen sich nichtdeterministische Berechnungen nicht ohne weiteres komplementieren; es sei denn, man fordert gewisse Zusatzeigenschaften.

Definition 25. *Eine* NTM N *heißt* ***strong*** *bei Eingabe x, falls es entweder akzeptierende oder verwerfende Rechnungen bei Eingabe x gibt (aber nicht beides zugleich).*

Proposition 26.

i) NTIME$(t(n)) \cap$ co-NTIME$(t(n)) = \{L(M) \mid M$ *ist eine $t(n)$-zeitbeschränkte NTM, die bei allen Eingaben strong ist*$\}$,

ii) NSPACE$(s(n)) \cap$ co-NSPACE$(s(n)) = \{L(M) \mid M$ *ist eine $s(n)$-platzbeschr. Offline-NTM, die bei allen Eingaben strong ist*$\}$.

Beweis. Siehe Übungen. ■

Satz 27 (Immerman und Szelepcsényi, 1987)**.**
Für jede echte Komplexitätsfunktion $s(n) \geq \log n$ gilt

$$\mathsf{NSPACE}(s) = \text{co-}\mathsf{NSPACE}(s)).$$

Beweis. Sei $L \in$ NSPACE(s) und sei N eine $s(n)$-platzbeschränkte Offline-NTM mit $L(N) = L$. Wir konstruieren eine $O(s(n))$-platzbeschränkte Offline-NTM N' mit $L(N') = L$, die bei allen Eingaben strong ist. Hierzu zeigen wir zuerst, dass die Frage, ob $N(x)$ eine Konfiguration K in höchstens t Schritten erreichen kann, durch eine $O(s(n))$-platzbeschränkte Offline-NTM N_0 entscheidbar ist, die bei Kenntnis der Anzahl

$$r(x, t-1) = \|\{K | K_x \underset{N}{\rightarrow}^{\leq t-1} K\}\|$$

aller in höchstens $t-1$ Schritten erreichbaren Konfigurationen strong ist. Betrachte die Sprache

$$L_0 = \{\langle x, r, t, K\rangle | 1 \leq r, t \leq c^{s(n)} \text{ und } K_x \underset{N}{\rightarrow}^{\leq t} K\},$$

wobei $K_1, \ldots, K_{c^{s(n)}}$ wie im Beweis des Satzes von Savitch eine Aufzählung aller Konfigurationen von $N(x)$ ist, die Platz höchstens $s(n)$ benötigen.

Behauptung 28. *Es existiert eine Offline-*NTM N_0 *mit $L(N_0) = L_0$, die $O(s(|x|))$ Felder besucht und auf allen Eingaben der Form $\langle x, r(x, t-1), t, K\rangle$ strong ist.*

Beweis der Behauptung. $N_0(\langle x, r, t, K\rangle)$ benutzt einen mit dem Wert 0 initialisierten Zähler z und rät der Reihe nach für jede Konfiguration K_i eine Rechnung von $N(x)$ der Länge $\leq t-1$, die in K_i endet. Falls dies gelingt, erhöht N_0 den Zähler z um 1 und testet, ob $K_i \xrightarrow[N]{}^{\leq 1} K$ gilt. Falls ja, so hält N_0 im Zustand q_{ja}. Nachdem N_0 alle Konfigurationen K_i durchlaufen hat, hält N_0 im Zustand q_{nein}, wenn z den Wert r hat, andernfalls im Zustand q_{h}.

Pseudocode für $N_0(\langle x, r, t, K\rangle)$

```
1  if t = 0 then halte im Zustand q_nein
2  z := 0
3  for each Konfiguration K_i do
4    rate eine Rechnung α der Laenge ≤ t − 1 von N(x)
5    if α endet in K_i then
6      z := z + 1
7      if K_i →_N K then
8        halte im Zustand q_ja
9  if z = r then
10   halte im Zustand q_nein
11 else
12   halte im Zustand q_h
```

Da N_0 genau dann eine akzeptierende Rechnung hat, wenn eine Konfiguration K_i mit $K_x \xrightarrow[N]{}^{\leq t-1} K_i$ und $K_i \xrightarrow[N]{}^{\leq 1} K$ existiert, ist klar, dass N_0 die Sprache L_0 entscheidet. Da N_0 zudem $O(s(n))$-platzbeschränkt ist, bleibt nur noch zu zeigen, dass N_0 bei Eingaben der Form $x_0 = \langle x, r(x, t-1), t, K\rangle$, $t \geq 1$, strong ist, also $N_0(x_0)$ genau im Fall $x_0 \notin L_0$ eine verwerfende Endkonfiguration erreichen kann.

Um bei Eingabe x_0 eine verwerfende Endkonfiguration zu erreichen, muss N_0 $r = r(x, t-1)$ Konfigurationen K_i finden, für die zwar $K_x \xrightarrow[N]{}^{\leq t-1} K_i$ aber nicht $K_i \xrightarrow[N]{}^{\leq 1} K$ gilt. Dies bedeutet jedoch, dass K von keiner der $r(x, t-1)$ in $t-1$ Schritten erreichbaren Konfigurationen in einem Schritt erreichbar ist und somit x_0 tatsächlich nicht zu L_0 gehört. Die Umkehrung folgt analog. □

Betrachte nun folgende NTM N', die für $t = 1, 2, \ldots$ die Anzahl $r(x, t)$ der in höchstens t Schritten erreichbaren Konfigurationen in der Variablen r berechnet (diese Technik wird induktives Zählen, engl. *inductive counting*, genannt) und mit Hilfe dieser Anzahlen im Fall $x \notin L$ verifiziert, dass keine der erreichbaren Konfigurationen akzeptierend ist.

Pseudocode für $N'(x)$

```
1  t := 0
2  r := 1
3  repeat
4    t := t + 1
5    r⁻ := r
6    r := 0
7    for each Konfiguration K_i do
8      simuliere N_0(⟨x, r⁻, t, K_i⟩)
9      if N_0 akzeptiert then
10       r := r + 1
11       if K_i ist akzeptierende Endkonfiguration then
12         halte im Zustand q_ja
13     if N_0 haelt im Zustand q_h then
14       halte im Zustand q_h
15 until (r = r⁻)
16 halte im Zustand q_nein
```

Behauptung 29. *Im t-ten Durchlauf der repeat-Schleife wird r^- in Zeile 5 auf den Wert $r(x, t-1)$ gesetzt. Folglich wird N_0 von N' in Zeile 8 nur mit Eingaben der Form $\langle x, r(x, t-1), t, K_i\rangle$ aufgerufen.*

Beweis der Behauptung. Wir führen Induktion über t:

$t = 1$**:** Im ersten Durchlauf der repeat-Schleife erhält r^- den Wert $1 = r(x, 0)$.

$t \rightsquigarrow t + 1$**:** Da r^- zu Beginn des $(t + 1)$-ten Durchlaufs auf den Wert von r gesetzt wird, müssen wir zeigen, dass r im t-ten Durchlauf auf $r(x, t)$ hochgezählt wird. Nach Induktionsvoraussetzung wird N_0 im t-ten Durchlauf nur mit Eingaben der Form $\langle x, r(x, t-1), t, K_i\rangle$ aufgerufen. Da N_0 wegen Beh. 1 auf all diesen Eingaben strong ist und keine dieser Simulationen im Zustand q_h endet (andernfalls würde N' sofort stoppen), werden alle in $\leq t$ Schritten erreichbaren Konfigurationen K_i als solche erkannt und somit wird r tatsächlich auf den Wert $r(x, t)$ hochgezählt. ■

Behauptung 30. *Bei Beendigung der repeat-Schleife in Zeile 15 gilt* $r = r^- = \|\{K | K_x \xrightarrow[N]{}{}^* K\}\|$.

Beweis der Behauptung. Wir wissen bereits, dass im t-ten Durchlauf der repeat-Schleife r den Wert $r(x, t)$ und r^- den Wert $r(x, t-1)$ erhält. Wird daher die repeat-Schleife nach t_e Durchläufen verlassen, so gilt $r = r^- = r(x, t_e) = r(x, t_e - 1)$.
Angenommen $r(x, t_e) < \|\{K | K_x \xrightarrow[N]{}{}^* K\}\|$. Dann gibt es eine Konfiguration K, die für ein $t' > t_e$ in t' Schritten, aber nicht in t_e Schritten erreichbar ist. Betrachte eine Rechnung $K_x = K_0 \xrightarrow[N]{} K_1 \xrightarrow[N]{} \ldots \xrightarrow[N]{} K_{t'} = K$ minimaler Länge, die in K endet. Dann gilt $K_x \xrightarrow[N]{}{}^{t_e} K_{t_e}$, aber nicht $K_x \xrightarrow[N]{}{}^{\leq t_e - 1} K_{t_e}$ und daher folgt $r(x, t_e) > r(x, t_e - 1)$. Widerspruch! ■

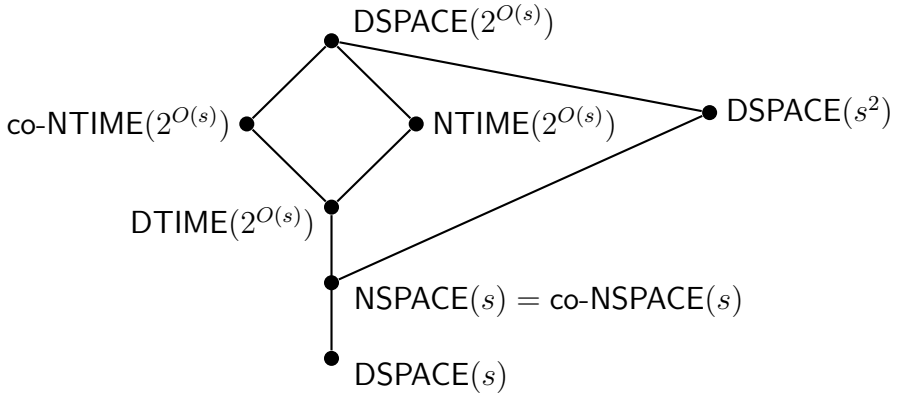
Da N' offenbar die Sprache L in Platz $O(s(n))$ entscheidet, bleibt nur noch zu zeigen, dass N' bei allen Eingaben strong ist. Wegen Behauptung 30 hat $N'(x)$ genau dann eine verwerfende Rechnung, wenn im letzten Durchlauf der repeat-Schleife alle erreichbaren Konfigurationen K als solche erkannt werden und darunter keine akzeptierende

Endkonfiguration ist. Dies impliziert $x \notin L$. Umgekehrt ist leicht zu sehen, dass $N'(x)$ im Fall $x \notin L$ eine verwerfende Rechnung hat. ■

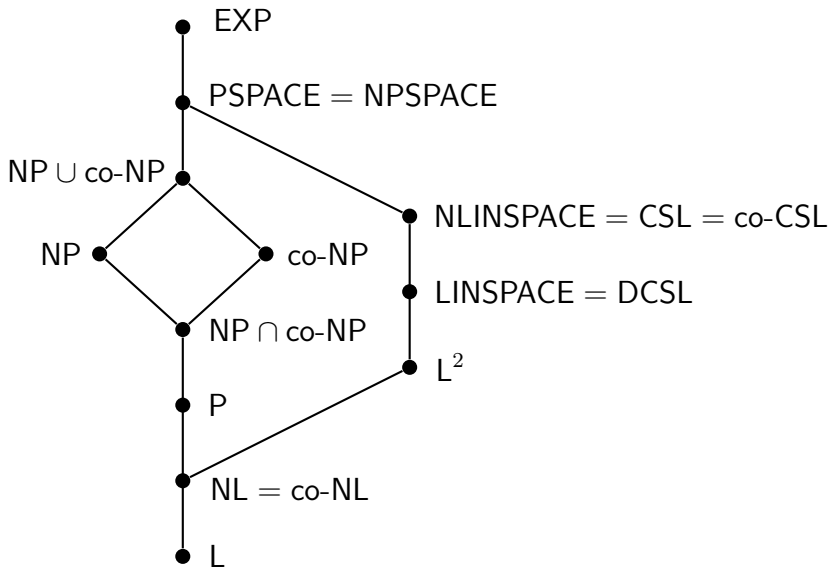
Korollar 31.

1. $\mathsf{NL} = \text{co-}\mathsf{NL}$,
2. $\mathsf{CSL} = \mathsf{NLINSPACE} = \text{co-}\mathsf{CSL}$.

Damit ergibt sich folgende Inklusionsstruktur für (nicht)deterministische Platz- und Zeitklassen:



Angewandt auf die wichtigsten bisher betrachteten Komplexitätsklassen erhalten wir folgende Inklusionsstruktur:



Eine zentrale Fragestellung der Komplexitätstheorie ist, welche dieser Inklusionen echt sind. Dieser Frage gehen wir im nächsten Kapitel nach.

4 Hierarchiesätze

4.1 Unentscheidbarkeit mittels Diagonalisierung

Wir benutzen folgende Kodierung (Gödelisierung) von 1-DTMs $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0)$. O.B.d.A. sei $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_m\}$, $\{0, 1, \#\} \subseteq \Sigma$ und $\Gamma = \{a_1, \ldots, a_l\}$ (also z.B. $a_1 = \sqcup$, $a_2 = \triangleright$, $a_3 = 0$, $a_4 = 1$ etc.). Dann kodieren wir jedes $\alpha \in Q \cup \Gamma \cup \{q_\text{h}, q_\text{ja}, q_\text{nein}, L, R, N\}$ wie folgt durch eine Binärzahl $c(\alpha)$ der Länge $b = \lceil \log_2(\|Q\| + \|\Gamma\| + 6) \rceil = \lceil \log_2(m + l + 7) \rceil$:

α	$c(\alpha)$
q_i, $i = 0, \ldots, m$	$bin_b(i)$
a_j, $j = 1, \ldots, l$	$bin_b(m + j)$
$q_\text{h}, q_\text{ja}, q_\text{nein}, L, R, N$	$bin_b(m + l + 1), \ldots, bin_b(m + l + 6)$

M wird nun durch eine Folge von Binärzahlen, die durch # getrennt sind, kodiert:

$$\begin{gathered}\#c(q_0)\,\#c(a_1)\,\#c(p_{0,1})\,\#c(b_{0,1})\,\#c(D_{0,1})\# \\ \#c(q_0)\,\#c(a_2)\,\#c(p_{0,2})\,\#c(b_{0,2})\,\#c(D_{0,2})\# \\ \vdots \\ \#c(q_m)\#c(a_l)\#c(p_{m,l})\#c(b_{m,l})\#c(D_{m,l})\#\end{gathered}$$

wobei

$$\delta(q_i, a_j) = (p_{i,j}, b_{i,j}, D_{i,j})$$

für $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, l$ ist. Kodieren wir die Zeichen $0, 1, \#$ binär (z.B. $0 \mapsto 00$, $1 \mapsto 11$, $\# \mapsto 10$), so gelangen wir zu einer Binärkodierung von M. Diese Kodierung lässt sich auch auf k-DTM's und k-NTM's erweitern. Die Kodierung einer TM M bezeichnen wir mit $\langle M \rangle$. Umgekehrt können wir jedem Binärstring w eine TM M_w wie folgt zuordnen:

$$M_w = \begin{cases} M, & \langle M \rangle = w \\ M', & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei M' eine beliebig aber fest gewählte TM ist. Für M_w schreiben wir auch M_i, wobei i die Zahl mit der Binärdarstellung $1w$ ist. Ein Paar (M, x) bestehend aus einer TM M und einer Eingabe $x \in \{0, 1\}^*$ kodieren wir durch das Wort $\langle M, x \rangle = \langle M \rangle \# x$.

Satz 32. *Die Diagonalsprache*

$$D = \{\langle M_i \rangle | M_i \textit{ ist eine DTM, die die Eingabe } x_i \textit{ akzeptiert}\}.$$

ist semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar. Hierbei ist $x_1 = \varepsilon$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 00, \ldots$ die Folge aller Binärstrings in lexikografischer Reihenfolge.

Beweis. Es ist klar, dass D semi-entscheidbar ist, da es eine DTM gibt, die bei Eingabe $\langle M_i \rangle$ die Berechnung von M_i bei Eingabe x_i simuliert und genau dann akzeptiert, wenn dies $M_i(x_i)$ tut.

Dass $\bar{D}$ nicht semi-entscheidbar (und damit D nicht entscheidbar) ist, liegt daran, dass die charakteristische Funktion von $\bar{D}$ „komplementär“ zur Diagonalen der Matrix ist, deren Zeilen die charakteristischen Funktionen aller semi-entscheidbaren Sprachen $L(M_i)$ auflisten. Wir zeigen durch einen einfachen Widerspruchsbeweis, dass keine Zeile der Matrix mit dem Komplement ihrer Diagonalen übereinstimmen kann. Wäre $\bar{D}$ semi-entscheidbar, gäbe es also eine DTM M_d, die $\bar{D}$ akzeptiert,

$$L(M_d) = \bar{D} \quad (**),$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	$\cdots$
M_1	**1**	0	0	0	$\cdots$
M_2	0	**1**	0	0	$\cdots$
M_3	1	0	**0**	0	$\cdots$
M_4	0	0	0	**1**	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

M_d	**0**	**0**	**1**	**0**	$\cdots$

so führt dies wegen

$$\begin{aligned} x_d \in D &\overset{(*)}{\Rightarrow} M_d(x_d) \text{ akzeptiert} \overset{(**)}{\Rightarrow} x_d \notin D \;\lightning \\ x_d \notin D &\overset{(*)}{\Rightarrow} M_d(x_d) \text{ akz. nicht} \overset{(**)}{\Rightarrow} x_d \in D \;\lightning \end{aligned}$$

zu einem Widerspruch. ■

Satz 33. *Für jede berechenbare Funktion $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ existiert eine entscheidbare Sprache $D_g \notin \mathsf{DTIME}(g(n))$.*

Beweis. Betrachte die Diagonalsprache

$$\begin{aligned} D_g = \{\langle M_i\rangle \,|\, & M_i \text{ ist eine DTM, die die Eingabe} \\ & x_i \text{ in} \leq g(|x_i|) \text{ Schritten akzeptiert}\} \qquad (*) \end{aligned}$$

Offensichtlich ist D_g entscheidbar. Unter der Annahme, dass $D_g \in \mathsf{DTIME}(g(n))$ ist, existiert eine $g(n)$-zeitbeschränkte DTM M_d, die das Komplement von D_g entscheidet, d.h.

$$L(M_d) = \bar{D}_g \quad (**)$$

Dies führt jedoch auf einen Widerspruch:

$$\begin{aligned} x_d \in D_g &\overset{(*)}{\Rightarrow} M_d(x_d) \text{ akzeptiert} \overset{(**)}{\Rightarrow} x_d \notin D_g \;\lightning \\ x_d \notin D_g &\overset{(*)}{\Rightarrow} M_d(x_d) \text{ verwirft} \overset{(**)}{\Rightarrow} x_d \in D_g \;\lightning \end{aligned}$$

■

Eine interessante Frage ist nun, wieviel Zeit eine DTM benötigt, um die Sprache D_g zu entscheiden. Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, dass D_g i.a. sehr hohe Komplexität haben kann.

4.2 Das Gap-Theorem

Satz 34 (Gap-Theorem)**.**
Es gibt eine berechenbare Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$\mathsf{DTIME}(2^{g(n)}) = \mathsf{DTIME}(g(n)).$$

Beweis. Wir definieren $g(n) \geq n+2$ so, dass für jede $2^{g(n)}$-zeitb. DTM M gilt:

$$time_M(x) \leq g(|x|) \text{ für fast alle Eingaben } x.$$

Betrachte hierzu das Prädikat

$$\begin{aligned} P(n,t): \;& t \geq n+2 \text{ und für } k = 1,\ldots,n \text{ und alle } x \in \Sigma_k^n \text{ gilt:} \\ & time_{M_k}(x) \notin [t+1, 2^t]. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet Σ_k das Eingabealphabet von M_k. Da für jedes n alle

$$t \geq \max\{time_{M_k}(x) | 1 \leq k \leq n, x \in \Sigma_k^n, M_k(x) \text{ hält}\}$$

das Prädikat $P(n,t)$ erfüllen, können wir $g(n)$ wie folgt induktiv definieren:

$$g(n) = \begin{cases} 2, & n = 0, \\ \min\{t \geq g(n-1) + n \,|\, P(n,t)\}, & n > 0. \end{cases}$$

Da P entscheidbar ist, ist g berechenbar.

Um zu zeigen, dass jede Sprache $L \in \mathsf{DTIME}(2^{g(n)})$ bereits in $\mathsf{DTIME}(g(n))$ enthalten ist, sei M_k eine beliebige $2^{g(n)}$-zeitbeschränkte DTM mit $L(M_k) = L$. Dann muss M_k alle Eingaben x der Länge $n \geq k$ in Zeit $time_{M_k}(x) \leq g(n)$ entscheiden, da andernfalls $P(n, g(n))$ wegen $time_{M_k}(x) \in [g(n)+1, 2^{g(n)}]$ verletzt wäre. Folglich ist $L \in \mathsf{DTIME}(g(n))$, da die endlich vielen Eingaben x der Länge $n < k$ durch table-lookup in Zeit $n + 2 \leq g(n)$ entscheidbar sind. ■

Es ist leicht zu sehen, dass der Beweis des Gap-Theorems für jede berechenbare Funktion h eine berechenbare Zeitschranke g liefert, so dass $\mathsf{DTIME}(h(g(n))) = \mathsf{DTIME}(g(n))$ ist. Folglich ist die im Beweis von Satz 33 definierte Sprache D_g nicht in Zeit $h(g(n))$ entscheidbar.

4.3 Zeit- und Platzhierarchiesätze

Um D_g zu entscheiden, müssen wir einerseits die Zeitschranke $g(|x_i|)$ berechnen und andererseits $M_i(x_i)$ simulieren. Wenn wir voraussetzen, dass g eine echte Komplexitätsfunktion ist, lässt sich $g(|x_i|)$ effizient berechnen. Für die zweite Aufgabe benötigen wir eine möglichst effiziente universelle TM.

Satz 35. *Es gibt eine universelle 3-DTM U, die für jede DTM M und jedes $x \in \{0,1\}^*$ bei Eingabe $\langle M, x\rangle$ eine Simulation von M bei Eingabe x in Zeit $O(|\langle M\rangle|(time_M(x))^2)$ und Platz $O(|\langle M\rangle| space_M(x))$ durchführt und dasselbe Ergebnis liefert:*

$$U(\langle M, x\rangle) = M(x)$$

Beweis. Betrachte folgende Offline-*3*-DTM U:

Initialisierung: U überprüft bei einer Eingabe $w\#x$ zuerst, ob w die Kodierung $\langle M\rangle$ einer k-DTM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0)$ ist. Falls ja, erzeugt U die Startkonfiguration K_x von M bei Eingabe x, wobei sie die Inhalte von k übereinander liegenden Feldern der Bänder von M auf ihrem 2. Band in je einem Block von kb, $b = \lceil \log_2(\|Q\| + \|\Gamma\| + 6)\rceil$, Feldern speichert und den aktuellen Zustand von M zusammen mit den gerade von M gelesenen Zeichen auf ihrem 3. Band notiert (letztere werden zusätzlich auf dem 2. Band markiert). Hierfür benötigt M' Zeit $\mathcal{O}(kbn) = \mathcal{O}(n^2)$.

Simulation: U simuliert jeden Rechenschritt von M wie folgt: Zunächst inspiziert U die auf dem 1. Band gespeicherte Kodierung von M, um die durch den Inhalt des 3. Bandes bestimmte Aktion von M zu ermitteln. Diese führt sie sodann auf dem 2. Band aus und aktualisert dabei auf dem 3. Band den Zustand und die gelesenen Zeichen von M. Insgesamt benötigt U für die Simulation eines Rechenschrittes von M Zeit $\mathcal{O}(kbg(n)) = \mathcal{O}(n \cdot g(n)))$.

Akzeptanzverhalten: Sobald die Simulation von M zu einem Ende kommt, hält U im gleichen Zustand wie M.

Nun ist leicht zu sehen, dass $U(\langle M, x\rangle)$ genau dann akzeptiert, wenn dies $M(x)$ tut, und dass $U(\langle M, x\rangle)$ $O(|\langle M\rangle|(time_M(x))^2)$ Rechenschritte macht und auf ihren beiden Arbeitsbändern $O(|\langle M\rangle| space_M(x))$ Bandfelder besucht. ■

Korollar 36. *(Zeithierarchiesatz)*
Für jede echte Komplexitätsfunktion $g(n) \geq n + 2$ gilt

$$\mathsf{DTIME}(n \cdot g(n)^2) - \mathsf{DTIME}(g(n)) \neq \emptyset$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass D_g für jede echte Komplexitätsfunktion $g(n) \geq n + 2$ in Zeit $O(ng^2(n))$ entscheidbar ist. Betrachte folgende *4*-DTM M'. M' überprüft bei einer Eingabe x der Länge n zuerst, ob x die Kodierung $\langle M\rangle$ einer k-DTM M ist. Falls ja, erzeugt M' auf dem 4. Band den String $1^{g(n)}$ in Zeit $\mathcal{O}(g(n))$ und simuliert $M(x)$ wie im Beweis von Theorem 35. Dabei vermindert M' die Anzahl der Einsen auf dem 4. Band nach jedem simulierten Schritt von $M(x)$ um 1. M' bricht die Simulation ab, sobald M stoppt oder der Zähler auf Band 4 den Wert 0 erreicht. M' hält genau dann im Zustand q_{ja}, wenn die Simulation von M im Zustand q_{ja} endet. Nun ist leicht zu sehen, dass M' $\mathcal{O}(n \cdot g(n)^2)$-zeitbeschränkt ist und die Sprache D_g entscheidet. ■

Korollar 37.

$$\mathsf{P} \subsetneq \mathsf{E} \subsetneq \mathsf{EXP}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\mathsf{P} &= \bigcup_{c>0} \mathsf{DTIME}(n^c + c) \subseteq \mathsf{DTIME}(2^n) \\ &\subsetneq \mathsf{DTIME}(n2^{2n}) \subseteq \mathsf{E} = \bigcup_{c>0} \mathsf{DTIME}(2^{cn}) \subseteq \mathsf{DTIME}(2^{n^2}) \\ &\subsetneq \mathsf{DTIME}(n2^{2n^2}) \subseteq \bigcup_{c>0} \mathsf{DTIME}(2^{n^c+c}) = \mathsf{EXP}\end{aligned}$$

■

Wir bemerken, dass sich mit Hilfe einer aufwändigeren Simulationstechnik von $g(n)$-zeitbeschränkten k-DTMs durch eine 2-DTM in Zeit $\mathcal{O}(g(n) \cdot \log g(n))$ folgende schärfere Form des Zeithierarchiesatzes erhalten lässt (ohne Beweis).

Satz 38. *Sei $f(n) \geq n + 2$ eine echte Komplexitätsfunktion und gelte*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{g(n) \cdot \log g(n)}{f(n)} = 0.$$

Dann ist

$$\mathsf{DTIME}(f(n)) \backslash \mathsf{DTIME}(g(n)) \neq \emptyset.$$

Für $g(n) = n^2$ erhalten wir beispielsweise die echten Inklusionen $\mathsf{DTIME}(g(n)) \subsetneq \mathsf{DTIME}(f(n))$ für die Funktionen $f(n) = n^3$, $n^2 \log^2 n$ und $n^2 \log n \log\log n$. In den Übungen zeigen wir, dass die Inklusion

$$\mathsf{DTIME}(n^k) \subsetneq \mathsf{DTIME}(n^k \log^a n)$$

tatsächlich für alle $k \geq 1$ und $a > 0$ echt ist. Für Platzklassen erhalten wir sogar eine noch feinere Hierarchie (ohne Beweis).

Satz 39 (Platzhierarchiesatz)**.** *Sind $g(n), f(n) \geq 2$ und ist f eine echte Komplexitätsfunktion mit*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0,$$

dann ist

$$\mathsf{DSPACE}(f(n)) \backslash \mathsf{DSPACE}(g(n)) \neq \emptyset.$$

Damit lässt sich im Fall $g(n) \leq f(n)$ die Frage, ob die Inklusion von $\mathsf{DSPACE}(g(n))$ in $\mathsf{DSPACE}(f(n))$ echt ist, eindeutig beantworten: Sie ist genau dann echt, wenn $\liminf_{n\to\infty} g(n)/f(n) = 0$ ist, da andernfalls $f(n) = O(g(n))$ ist und somit beide Klassen gleich sind.

Korollar 40.

$$\mathsf{L} \subsetneq \mathsf{L}^2 \subsetneq \mathsf{DCSL} \subseteq \mathsf{CSL} \subsetneq \mathsf{PSPACE} \subsetneq \mathsf{ESPACE} \subsetneq \mathsf{EXPSPACE}.$$

5 Reduktionen

5.1 Logspace-Reduktionen

Oft können wir die Komplexitäten zweier Probleme A und B vergleichen, indem wir die Frage, ob $x \in A$ ist, auf eine Frage der Form $y \in B$ zurückführen. Lässt sich y leicht aus x berechnen, so kann jeder Algorithmus für B in einen Algorithmus für A verwandelt werden, der vergleichbare Komplexität hat.

Definition 41. *Seien A und B Sprachen über einem Alphabet Σ. A ist auf B* ***logspace-reduzierbar*** *(in Zeichen: $A \leq_m^{log} B$ oder einfach $A \leq B$), falls eine Funktion $f \in \mathsf{FL}$ existiert, so dass für alle $x \in \Sigma^*$ gilt,*

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

Lemma 42. $\mathsf{FL} \subseteq \mathsf{FP}$.

Beweis. Sei $f \in \mathsf{FL}$ und sei M ein logarithmisch platzbeschränkter Transducer (kurz: FL-Transducer), der f berechnet. Da M bei einer Eingabe der Länge n nur $2^{O(\log n)}$ verschiedene Konfigurationen einnehmen kann, ist M dann auch polynomiell zeitbeschränkt. ■

Beispiel 43. *Wir reduzieren das Hamiltonkreisproblem auf das Erfüllbarkeitsproblem* Sat *für aussagenlogische Formeln.*

Hamiltonkreisproblem (*Ham*):

Gegeben: *Ein Graph $G = (V, E)$.*
Gefragt: *Hat G einen Hamiltonkreis?*

Erfüllbarkeitsproblem für boolesche Formeln (*Sat*):

Gegeben: *Eine boolesche Formel F über n Variablen.*
Gefragt: *Ist F erfüllbar?*

Hierzu benötigen wir eine Funktion $f \in \mathsf{FL}$, die einen Graphen $G = (V, E)$ so in eine Formel $f(G) = F_G$ transformiert, dass F_G genau dann erfüllbar ist, wenn G hamiltonsch ist. Wir konstruieren F_G über den Variablen $x_{1,1}, \ldots, x_{n,n}$, wobei $x_{i,j}$ für die Aussage steht, dass Knoten $j \in V = \{1, \ldots, n\}$ in der Rundreise an i-ter Stelle besucht wird. Betrachte nun folgende Klauseln.

i) An der i-ten Stelle wird mindestens ein Knoten besucht:

$$x_{i,1} \vee x_{i,2} \vee \ldots \vee x_{i,n},\ i = 1, \ldots, n.$$

ii) An der i-ten Stelle wird höchstens ein Knoten besucht:

$$\neg x_{i,j} \vee \neg x_{i,k},\ i = 1, \ldots, n,\ 1 \leq j < k \leq n.$$

iii) Jeder Knoten j wird mindestens einmal besucht:

$$x_{1,j} \vee \ldots \vee x_{n,j},\ j = 1, \ldots, n.$$

iv) Für $(i, j) \notin E$ wird Knoten j nicht unmittelbar nach Knoten i besucht:

$$\neg x_{1,i} \vee \neg x_{2,j}, \ldots, \neg x_{n-1,i} \vee \neg x_{n,j}, \neg x_{n,i} \vee \neg x_{1,j},\ (i, j) \notin E.$$

Die Klauseln in a) und b) stellen sicher, dass die Relation $\pi = \{(i, j) \mid x_{i,j} = 1\}$ eine Funktion $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ ist. Bedingung c) besagt, dass π surjektiv (und damit auch bijektiv) ist, und d) sorgt dafür, dass der durch π beschriebene Kreis entlang der Kanten von G verläuft. Bilden wir daher $F_G(x_{1,1}, \ldots, x_{n,n})$ als Konjunktion dieser

$$n + n\binom{n}{2} + n + n\left[\binom{n}{2} - \|E\|\right] = O(n^3)$$

Klauseln, so ist leicht zu sehen, dass die Reduktionsfunktion f in FL berechenbar ist und G genau dann einen Hamiltonkreis besitzt, wenn F_G erfüllbar ist. ◁

Ein zentraler Begriff in der Komplexitätstheorie ist die Vollständigkeit einer Sprache für eine Komplexitätsklasse.

Definition 44.

a) *Sei* C *eine Sprachklasse. Eine Sprache* L *heißt* C-***hart*** *(bzgl.* $\leq$*), falls für alle Sprachen* $A \in \mathsf{C}$ *gilt,* $A \leq L$.

b) *Eine* C*-harte Sprache, die zur Klasse* C *gehört, heißt* C-***vollständig***.

c) C *heißt* ***abgeschlossen*** *unter* $\leq$*, falls gilt:*

$$B \in \mathsf{C}, A \leq B \Rightarrow A \in \mathsf{C}.$$

Lemma 45.

1. *Die* $\leq_m^{log}$*-Reduzierbarkeit ist reflexiv und transitiv.*
2. *Die Klassen* $\mathsf{L}, \mathsf{NL}, \mathsf{NP}, \mathsf{co\text{-}NP}, \mathsf{PSPACE}, \mathsf{EXP}$ *und* $\mathsf{EXPSPACE}$ *sind unter* $\leq$ *abgeschlossen.*
3. *Sei* L *vollständig für eine Klasse* C*, die unter* $\leq$ *abgeschlossen ist. Dann gilt*
$$\mathsf{C} = \{A \mid A \leq L\}.$$

Beweis. Siehe Übungen. ■

Definition 46. *Ein* ***boolescher Schaltkreis*** c *mit* n *Eingängen ist eine Folge* $(g_1, \ldots, g_m)$ *von* ***Gattern***

$$g_l \in \{0, 1, x_1, \ldots, x_n, (\neg, j), (\wedge, j, k), (\vee, j, k)\}$$

mit $1 \leq j, k < l$*. Der am Gatter* g_l *berechnete Wert bei Eingabe* $a = a_1 \cdots a_n$ *ist induktiv wie folgt definiert.*

g_l	0	1	x_i	$(\neg, j)$	$(\wedge, j, k)$	$(\vee, j, k)$
$g_l(a)$	0	1	a_i	$1 - g_j(a)$	$g_j(a)g_k(a)$	$g_j(a) + g_k(a) - g_j(a)g_k(a)$

Der Schaltkreis c *berechnet die boolesche Funktion* $c(a) = g_m(a)$*. Er heißt* ***erfüllbar****, wenn es eine Eingabe* $a \in \{0,1\}^n$ *mit* $c(a) = 1$ *gibt.*

Bemerkung: Die Anzahl der Eingänge eines Gatters g wird als **Fan-in** von g bezeichnet, die Anzahl der Ausgänge (also die Anzahl der Gatter, die g als Eingabe benutzen) als **Fanout**. Boolesche Formeln entsprechen also den booleschen Schaltkreisen mit (maximalem) Fan-out 1 und umgekehrt.

Ähnlich wie bei booleschen Formeln sind auch für Schaltkreise die beiden folgenden Entscheidungsprobleme von Interesse.

Auswertungsproblem für boolesche Schaltkreise (CirVal):

Gegeben: Ein boolescher Schaltkreis c mit n Eingängen und eine Eingabe $a \in \{0,1\}^n$.
Gefragt: Ist der Wert von $c(a)$ gleich 1?

Erfüllbarkeitsproblem für boolesche Schaltkreise (CirSat):

Gegeben: Ein boolescher Schaltkreis c mit n Eingängen.
Gefragt: Ist c erfüllbar?