Vorlesungsskript

Einführung in die Komplexitätstheorie

Wintersemester 2016/17

Prof. Dr. Johannes Köbler
Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Komplexität und Kryptografie

16. Februar 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

In der Komplexitätstheorie werden algorithmische Probleme daraufhin untersucht, welche Rechenressourcen zu ihrer Lösung benötigt werden. Naturgemäß bestehen daher enge Querbezüge zu

- Algorithmen (obere Schranken)
- Automatentheorie (Rechenmodelle)
- Berechenbarkeit (Was ist überhaupt algorithmisch lösbar?)
- Logik (liefert viele algorithmische Probleme, mit ihrer Hilfe kann auch die Komplexität von Problemen charakterisiert werden)
- Kryptografie (Wieviel Rechenressourcen benötigt ein Gegner, um ein Kryptosystem zu brechen?)

Zur weiteren Motivation betrachten wir eine Reihe von konkreten algorithmischen Problemstellungen.

Erreichbarkeitsproblem in Digraphen (Reach):

Gegeben: Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $V = \{1, \ldots, n\}$ und $E \subseteq V \times V$.
Gefragt: Gibt es in G einen Weg von Knoten 1 zu Knoten n?

Zur Erinnerung: Eine Folge $(v_1, \ldots, v_k)$ von Knoten heißt **Weg** in G, falls für $j = 1, \ldots, k-1$ gilt: $(v_j, v_{j+1}) \in E$.

Da als Antwort nur "ja" oder "nein" möglich ist, handelt es sich um ein **Entscheidungsproblem**. Ein solches lässt sich formal durch eine Sprache beschreiben, die alle positiven (mit "ja" zu beantwortenden) Problemeingaben enthält:

$$\textsc{Reach} = \{G \,|\, \text{in } G \text{ ex. ein Weg von 1 nach } n\}.$$

Hierbei setzen wir eine Kodierung von Graphen durch Wörter über einem geeigneten Alphabet Σ voraus. Wir können G beispielsweise durch eine Binärfolge der Länge n^2 kodieren, die aus den n Zeilen der Adjazenzmatrix von G gebildet wird.

Wir entscheiden Reach durch einen Wegsuche-Algorithmus. Dieser markiert nach und nach alle Knoten, die vom Knoten 1 aus erreichbar sind. Hierzu speichert er jeden markierten Knoten solange in einer Menge S bis er sämtliche Nachbarknoten markiert hat. Genaueres ist folgendem Algorithmus zu entnehmen:

Algorithmus `suche-Weg`(G)

```
1  Input: Gerichteter Graph G = (V,E) mit V = {1,...,n}
2    S := {1}
3    markiere Knoten 1
4    repeat
5      waehle einen Knoten u ∈ S
6      S := S − {u}
7      for all (u,v) ∈ E do
8        if v ist nicht markiert then
9          markiere v
10         S := S ∪ {v}
11   until S = ∅
12   if n ist markiert then accept else reject
```

Es ist üblich, den Ressourcenverbrauch von Algorithmen (wie z.B. Rechenzeit oder Speicherplatz) in Abhängigkeit von der Größe der Problemeingabe zu messen. Falls die Eingabe aus einem Graphen besteht, kann beispielsweise die Anzahl n der Knoten (und/oder die Anzahl m der Kanten) als Bezugsgröße dienen. Der Ressourcenverbrauch hängt auch davon ab, wie wir die Eingabe kodieren. So führt die Repräsentation eines Graphen als Adjazenzliste oftmals zu effizienteren Lösungsverfahren.

Komplexitätsbetrachtungen:

- Reach ist in Zeit $O(n^2)$ entscheidbar.

- Reach ist nichtdeterministisch in Platz $O(\log n)$ entscheidbar (und daher deterministisch in Platz $O(\log^2 n)$; Satz von Savitch).

Als nächstes betrachten wir das Problem, einen maximalen Fluss in einem Netzwerk zu bestimmen.

Maximaler Fluß (MaxFlow):

Gegeben: Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $V = \{1, \ldots, n\}$, $E \subseteq V \times V$ und einer Kapazitätsfunktion $c : E \to \mathbb{N}$.

Gesucht: Ein Fluss $f : E \to \mathbb{N}$ von 1 nach n in G, d.h.

- $\forall e \in E : f(e) \leq c(e)$ und
- $\forall v \in V - \{1, n\} : \sum_{(v,u)\in E} f(v, u) = \sum_{(u,v)\in E} f(u, v)$,

mit maximalem Wert $w(f) = \sum_{(1,v)\in E} f(1, v)$.

Da hier nach einer Lösung (Fluss) mit optimalem Wert gesucht wird, handelt es sich um ein **Optimierungsproblem** (genauer: Maximierungsproblem). Im Gegensatz hierzu wird bei vielen Entscheidungsproblemen nach der Existenz einer Lösung (mit gewissen Eigenschaften) gefragt.

Komplexitätsbetrachtungen:

- MaxFlow ist in Zeit $O(n^5)$ lösbar.
- MaxFlow ist in Platz $O(n^2)$ lösbar.

Das folgende Problem scheint zwar auf den ersten Blick nur wenig mit dem Problem MaxFlow gemein zu haben. In Wirklichkeit entpuppt es sich jedoch als ein Spezialfall von MaxFlow.

Perfektes Matching in bipartiten Graphen (Matching):

Gegeben: Ein bipartiter Graph $G = (U, W, E)$ mit $U \cap W = \emptyset$ und $e \cap U \neq \emptyset \neq e \cap W$ für alle Kanten $e \in E$.

Gefragt: Besitzt G ein perfektes Matching?

Zur Erinnerung: Eine Kantenmenge $M \subseteq E$ heißt **Matching**, falls für alle Kanten $e, e' \in M$ mit $e \neq e'$ gilt: $e \cap e' = \emptyset$. Gilt zudem $\|M\| = n/2$, so heißt M **perfekt** (n ist die Knotenzahl von G).

Komplexitätsbetrachtungen:

- Matching ist in Zeit $O(n^3)$ entscheidbar.
- Matching ist in Platz $O(n^2)$ entscheidbar.

Die bisher betrachteten Probleme können in deterministischer Polynomialzeit gelöst werden und gelten daher als effizient lösbar. Zum Schluss dieses Abschnitts betrachten wir ein Problem, für das vermutlich nur ineffiziente Algorithmen existieren. Wie üblich bezeichnen wir die Gruppe aller Permutationen auf der Menge $\{1, \ldots, n\}$ mit S_n.

Travelling Salesman Problem (TSP):

Gegeben: Eine symmetrische $n \times n$-Distanzmatrix $D = (d_{ij})$ mit $d_{ij} \in \mathbb{N}$.

Gesucht: Eine kürzeste Rundreise, d.h. eine Permutation $\pi \in S_n$ mit minimalem Wert $w(\pi) = \sum_{i=1}^{n} d_{\pi(i),\pi(i+1)}$, wobei wir $\pi(n + 1) = \pi(1)$ setzen.

Komplexitätsbetrachtungen:

- TSP ist in Zeit $O(n!)$ lösbar (Ausprobieren aller Rundreisen).
- TSP ist in Platz $O(n)$ lösbar (mit demselben Algorithmus).
- Durch dynamisches Programmieren* lässt sich TSP in Zeit $O(n^2 2^n)$ lösen, der Platzverbrauch erhöht sich dabei jedoch auf $O(n2^n)$ (siehe Übungen).

*Hierzu berechnen wir für alle Teilmengen $S \subseteq \{2, \ldots, n\}$ und alle $j \in S$ die Länge $l(S, j)$ eines kürzesten Pfades von 1 nach j, der alle Städte in S genau einmal besucht.

2 Rechenmodelle

2.1 Deterministische Turingmaschinen

Definition 1 (**Mehrband-Turingmaschine**)**.**

Eine ***deterministische k-Band-Turingmaschine*** *(**k*-**DTM** *oder einfach* **DTM***) ist ein 5-Tupel $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0)$. Dabei ist*

- Q *eine endliche Menge von* ***Zuständen****,*
- Σ *eine endliche Menge von Symbolen (das* ***Eingabealphabet****) mit $\sqcup, \triangleright \notin \Sigma$ ($\sqcup$ heißt* ***Blank*** *und $\triangleright$ heißt* ***Anfangssymbol****,*
- Γ *das* ***Arbeitsalphabet*** *mit $\Sigma \cup \{\sqcup, \triangleright\} \subseteq \Gamma$,*
- $\delta : Q \times \Gamma^k \to (Q \cup \{q_h, q_{ja}, q_{nein}\}) \times (\Gamma \times \{L, R, N\})^k$ *die* ***Überführungsfunktion*** *(q_h heißt* ***Haltezustand****, q_{ja}* ***akzeptierender*** *und q_{nein}* ***verwerfender Endzustand***
- *und q_0 der* ***Startzustand****.*

Befindet sich M im Zustand $q \in Q$ und stehen die Schreib-Lese-Köpfe auf Feldern mit den Inschriften $a_1, \ldots, a_k$ (a_i auf Band i), so geht M bei Ausführung der Anweisung $\delta : (q, a_1, \ldots, a_k) \mapsto (q', a'_1, D_1, \ldots, a'_k, D_k)$ in den Zustand q' über, ersetzt auf Band i das Symbol a_i durch a'_i und bewegt den Kopf gemäß D_i (im Fall $D_i = L$ um ein Feld nach links, im Fall $D_i = R$ um ein Feld nach rechts und im Fall $D_i = N$ wird der Kopf nicht bewegt).

Außerdem verlangen wir von δ, dass für jede Anweisung $(q, a_1, \ldots, a_k) \mapsto (q', a'_1, D_1, \ldots, a'_k, D_k)$ mit $a_i = \triangleright$ die Bedingung $a'_i = \triangleright$ und $D_i = R$ erfüllt ist (d.h. das Anfangszeichen $\triangleright$ darf nicht durch ein anderes Zeichen überschrieben werden und der Kopf muss nach dem Lesen von $\triangleright$ immer nach rechts bewegt werden).

Definition 2. *Eine* ***Konfiguration*** *ist ein $(2k+1)$-Tupel $K = (q, u_1, v_1, \ldots, u_k, v_k) \in Q \times (\Gamma^* \times \Gamma^+)^k$ und besagt, dass*

- *q der momentane Zustand und*
- *$u_i v_i \sqcup \sqcup \cdots$ die Inschrift des i-ten Bandes ist, und dass*
- *sich der Kopf auf Band i auf dem ersten Zeichen von v_i befindet.*

Definition 3. *Eine Konfiguration $K' = (q', u'_1, v'_1, \ldots, u'_k, v'_k)$ heißt* ***Folgekonfiguration*** *von $K = (q, u_1, a_1 v_1, \ldots, u_k, a_k v_k)$ (kurz: $K \underset{M}{\longrightarrow} K'$), falls eine Anweisung*

$$(q, a_1, \ldots, a_k) \mapsto (q', a'_1, D_1, \ldots, a'_k, D_k)$$

in δ und $b_1, \ldots, b_k \in \Gamma$ existieren, so dass für $i = 1, \ldots, k$ jeweils eine der folgenden drei Bedingungen gilt:

1. *$D_i = N$, $u'_i = u_i$ und $v'_i = a'_i v_i$,*
2. *$D_i = L$, $u_i = u'_i b_i$ und $v'_i = b_i a'_i v_i$,*
3. *$D_i = R$, $u'_i = u_i a'_i$ und $v'_i = \begin{cases} \sqcup, & v_i = \varepsilon, \\ v_i, & \text{sonst}, \end{cases}$*

Wir schreiben $K \underset{M}{\longrightarrow}^t K'$, falls Konfigurationen $K_0, \ldots, K_t$ existieren mit $K_0 = K$ und $K_t = K'$, sowie $K_i \underset{M}{\longrightarrow} K_{i+1}$ für $i = 0, \ldots, t-1$. Die reflexive, transitive Hülle von $\underset{M}{\longrightarrow}$ bezeichnen wir mit $\underset{M}{\longrightarrow}^*$, d.h. $K \underset{M}{\longrightarrow}^* K'$ bedeutet, dass ein $t \geq 0$ existiert mit $K \underset{M}{\longrightarrow}^t K'$.

Definition 4. *Sei $x \in \Sigma^*$ eine Eingabe. Die zugehörige* ***Startkonfiguration*** *ist*

$$K_x = (q_0, \varepsilon, \triangleright x, \underbrace{\varepsilon, \triangleright, \ldots, \varepsilon, \triangleright}_{(k-1)\text{-mal}}).$$

Definition 5. *Eine Konfiguration $K = (q, u_1, v_1, \ldots, u_k, v_k)$ mit $q \in \{q_h, q_{\text{ja}}, q_{\text{nein}}\}$ heißt* ***Endkonfiguration****. Im Fall $q = q_{\text{ja}}$ (bzw. $q = q_{\text{nein}}$) heißt K* ***akzeptierende*** *(bzw.* ***verwerfende****)* ***Endkonfiguration****.*

Definition 6.
Eine DTM M ***hält*** *bei Eingabe $x \in \Sigma^*$ (kurz: $M(x)$ hält), falls es eine Endkonfiguration $K = (q, u_1, v_1, \ldots, u_k, v_k)$ gibt mit*

$$K_x \xrightarrow[M]{}^* K.$$

Weiter definieren wir das ***Resultat*** *$M(x)$ der Rechnung von M bei Eingabe x,*

$$M(x) = \begin{cases} \text{ja}, & M(x) \text{ hält im Zustand } q_{\text{ja}}, \\ \text{nein}, & M(x) \text{ hält im Zustand } q_{\text{nein}}, \\ y, & M(x) \text{ hält im Zustand } q_h, \\ \uparrow \text{ (undefiniert)}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei ergibt sich y aus $u_k v_k$, indem das erste Symbol $\triangleright$ und sämtliche Blanks am Ende entfernt werden, d. h. $u_k v_k = \triangleright y \sqcup^i$ für ein $i \geq 0$. Für $M(x) =$ ja sagen wir auch „$M(x)$ akzeptiert“ und für $M(x) =$ nein „$M(x)$ verwirft“.

Definition 7. *Die von einer* DTM *M* ***akzeptierte Sprache*** *ist*

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid M(x) \text{ akzeptiert}\}.$$

Eine DTM, die eine Sprache L akzeptiert, darf also bei Eingaben $x \notin L$ unendlich lange rechnen. In diesem Fall heißt L **semi-entscheidbar** (oder **rekursiv aufzählbar**). Dagegen muss eine DTM, die eine Sprache L entscheidet, bei jeder Eingabe halten.

Definition 8. *Sei $L \subseteq \Sigma^*$. Eine* DTM *M* ***entscheidet*** *L, falls für alle $x \in \Sigma^*$ gilt:*

$$x \in L \Rightarrow M(x) \text{ akz.}$$
$$x \notin L \Rightarrow M(x) \text{ verw.}$$

In diesem Fall heißt L ***entscheidbar*** *(oder* ***rekursiv****).*

Definition 9. *Sei $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ eine Funktion. Eine* DTM *M* ***berechnet*** *f, falls für alle $x \in \Sigma^*$ gilt:*

$$M(x) = f(x).$$

f heißt dann ***berechenbar*** *(oder* ***rekursiv****).*

Aus dem Grundstudium wissen wir, dass eine nichtleere Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ genau dann semi-entscheidbar ist, wenn eine berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ existiert, deren Bild $\mathit{range}(f) = \{f(x) \mid x \in \Sigma^*\}$ die Sprache L ist.

2.2 Nichtdeterministische Berechnungen

Anders als eine DTM, für die in jeder Konfiguration höchstens eine Anweisung ausführbar ist, hat eine nichtdeterministische Turingmaschine in jedem Rechenschritt die Wahl unter einer endlichen Anzahl von Anweisungen.

Definition 10. *Eine* ***nichtdeterministische k-Band-Turingmaschine*** *(kurz* ***k-NTM*** *oder einfach* **NTM***) ist ein 5-Tupel $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0)$, wobei Q, Σ, Γ, q_0 genau wie bei einer k-DTM definiert sind und*

$$\delta : Q \times \Gamma^k \to \mathcal{P}(Q \cup \{q_h, q_{\text{ja}} q_{\text{nein}}\} \times (\Gamma \times \{R, L, N\})^k)$$

die Eigenschaft hat, dass für $(q', a'_1, D_1, \ldots, a'_k, D_k) \in \delta(q, a_1, \ldots, a_k)$ im Fall $a_i = \triangleright$ immer $a'_i = \triangleright$ und $D_i = R$ gilt.

Die Begriffe **Konfiguration**, **Start-** und **Endkonfiguration** übertragen sich unmittelbar von DTMs auf NTMs. Der Begriff der **Folgekonfiguration** lässt sich übertragen, indem wir $\delta(q, a_1, \ldots, a_k) = (q', a'_1, D_1, \ldots, a'_k, D_k)$ durch $(q', a'_1, D_1, \ldots, a'_k, D_k) \in \delta(q, a_1, \ldots, a_k)$ ersetzen. In beiden Fällen schreiben wir auch $(q, a_1, \ldots, a_k) \mapsto (q', a'_1, D_1, \ldots, a'_k, D_k)$.
Wir werden NTMs nur zum Erkennen von Sprachen (d.h. als Akzeptoren) und nicht zum Berechnen von Funktionen benutzen.

Definition 11. *Sei M eine* NTM.

a) *$M(x)$ **hält** (kurz $M(x)\downarrow$), falls $M(x)$ nur endlich lange Rechnungen ausführt. Andernfalls schreiben wir $M(x)\uparrow$.*

b) *$M(x)$ **akzeptiert**, falls $M(x)$ hält und eine akzeptierende Endkonfiguration K existiert mit $K_x \to^* K$.*

c) *$M(x)$ **verwirft**, falls $M(x)$ hält und $M(x)$ nicht akzeptiert.*

d) *Die von M **akzeptierte Sprache** ist*

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \,|\, M(x) \text{ akzeptiert}\}.$$

e) *M **entscheidet** $L(M)$, falls M alle Eingaben $x \notin L(M)$ verwirft.*

2.3 Zeitkomplexität

Der Zeitverbrauch $time_M(x)$ einer Turingmaschine M bei Eingabe x ist die maximale Anzahl von Rechenschritten, die M ausgehend von der Startkonfiguration K_x ausführen kann (bzw. undefiniert oder ∞, falls unendlich lange Rechnungen existieren).

Definition 12.

a) *Sei M eine TM (d.h. eine DTM oder NTM) und sei $x \in \Sigma^*$ eine Eingabe. Dann ist*

$$time_M(x) = \max\{t \geq 0 \,|\, \exists K : K_x \to^t K\}$$

*die **Rechenzeit** von M bei Eingabe x, wobei $\max \mathbb{N} = \infty$ ist.*

b) *Sei $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine monoton wachsende Funktion. Dann ist M **$t(n)$-zeitbeschränkt**, falls für alle $x \in \Sigma^*$ gilt:*

$$time_M(x) \leq t(|x|).$$

Alle Sprachen, die in (nicht-)deterministischer Zeit $t(n)$ entscheidbar sind, fassen wir in den Komplexitätsklassen

$$\mathsf{DTIME}(t(n)) = \{L(M) \,|\, M \text{ ist eine } t(n)\text{-zeitbeschränkte DTM}\}$$

bzw.

$$\mathsf{NTIME}(t(n)) = \{L(M) \,|\, M \text{ ist eine } t(n)\text{-zeitbeschränkte NTM}\}$$

zusammen. Ferner sei

$$\mathsf{FTIME}(t(n)) = \left\{ f \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ wird von einer } t(n)\text{-zeitbe-} \\ \text{schränkten DTM berechnet} \end{array} \right\}.$$

Für eine Klasse F von Funktionen $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei $\mathsf{DTIME}(F) = \bigcup_{t \in F} \mathsf{DTIME}(f(n))$. $\mathsf{NTIME}(F)$ und $\mathsf{FTIME}(F)$ sind analog definiert. Die Klasse aller polynomiell beschränkten Funktionen bezeichnen wir mit $\mathrm{poly}(n)$. Die wichtigsten Zeitkomplexitätsklassen sind

$$\begin{aligned}
\mathsf{LINTIME} &= \mathsf{DTIME}(\mathcal{O}(n)) = \bigcup_{c \geq 1} \mathsf{DTIME}(cn + c) && \text{„Linearzeit“,} \\
\mathsf{P} &= \mathsf{DTIME}(\mathrm{poly}(n)) = \bigcup_{c \geq 1} \mathsf{DTIME}(n^c + c) && \text{„Polynomialzeit“,} \\
\mathsf{E} &= \mathsf{DTIME}(2^{\mathcal{O}(n)}) = \bigcup_{c \geq 1} \mathsf{DTIME}(2^{cn+c}) && \\
& && \text{„Lineare Exponentialzeit“,} \\
\mathsf{EXP} &= \mathsf{DTIME}(2^{\mathrm{poly}(n)}) = \bigcup_{c \geq 1} \mathsf{DTIME}(2^{n^c+c}) && \text{„Exponentialzeit“.}
\end{aligned}$$

Die Klassen $\mathsf{NP}, \mathsf{NE}, \mathsf{NEXP}$ und $\mathsf{FP}, \mathsf{FE}, \mathsf{FEXP}$ sind analog definiert.

2.4 Platzkomplexität

Zur Definition von Platzkomplexitätsklassen verwenden wir so genannte Offline-Turingmaschinen und Transducer. Diese haben die

Eigenschaft, dass sie das erste Band nur als Eingabeband (also nur zum Lesen) bzw. das k-te Band nur als Ausgabeband (also nur zum Schreiben) benutzen. Der Grund für diese Einschränkungen liegt darin, sinnvolle Definitionen für Komplexitätsklassen mit einem sublinearen Platzverbrauch zu erhalten.

Definition 13. *Eine TM M heißt **Offline-TM**, falls für jede Anweisung $(q, a_1, \ldots, a_k) \mapsto (q', a'_1, D_1, \ldots, a'_k, D_k)$ die Bedingung*

$$a'_1 = a_1 \wedge [a_1 = \sqcup \Rightarrow D_1 = L]$$

*gilt. Gilt weiterhin immer $D_k \neq L$ und ist M eine DTM, so heißt M **Transducer**.*

Dies bedeutet, dass eine Offline-TM nicht auf das Eingabeband schreiben darf (*read-only*). Beim Transducer dient das letzte Band als Ausgabeband, auch dieses kann nicht als Speicher benutzt werden (*write-only*).
Der Zeitverbrauch $time_M(x)$ von Offline-TMs und von Transducern ist genauso definiert wie bei DTMs. Als nächstes definieren wir den Platzverbrauch einer TM als die Anzahl aller während der Rechnung besuchten Bandfelder.

Definition 14.

a) Sei M eine TM und sei $x \in \Sigma^*$ eine Eingabe mit $time_M(x) < \infty$. Dann ist

$$space_M(x) = \max\{s \geq 1 \,|\, \exists K = (q, u_1, v_1, \ldots, u_k, v_k) \text{ mit } K_x \to^* K \text{ und } s = \sum_{i=1}^{k} |u_i v_i|\}$$

*der **Platzverbrauch** von M bei Eingabe x. Für eine Offline-TM ersetzen wir $\sum_{i=1}^{k} |u_i v_i|$ durch $\sum_{i=2}^{k} |u_i v_i|$ und für einen Transducer durch $\sum_{i=2}^{k-1} |u_i v_i|$.*

*b) Sei $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ monoton wachsend. Dann ist M **$s(n)$-platzbeschränkt**, falls für alle $x \in \Sigma^*$ gilt:*

$$space_M(x) \leq s(|x|) \text{ und } time_M(x) < \infty.$$

D.h., $space_M(x)$ ist undefiniert, falls $time_M(x) = \infty$ ist.

Alle Sprachen, die in (nicht-) deterministischem Platz $s(n)$ entscheidbar sind, fassen wir in den Komplexitätsklassen

$$\mathsf{DSPACE}(s(n)) = \left\{ L(M) \,\middle|\, \begin{array}{c} M \text{ ist eine } s(n)\text{-platzbe-} \\ \text{schränkte Offline-DTM} \end{array} \right\}$$

bzw.

$$\mathsf{NSPACE}(s(n)) = \left\{ L(M) \,\middle|\, \begin{array}{c} M \text{ ist eine } s(n)\text{-platzbe-} \\ \text{schränkte Offline-NTM} \end{array} \right\}$$

zusammen. Ferner sei

$$\mathsf{FSPACE}(s(n)) = \left\{ f \,\middle|\, \begin{array}{c} f \text{ wird von einem } s(n)\text{-platzbe-} \\ \text{schränkten Transducer berechnet} \end{array} \right\}.$$

Die wichtigsten Platzkomplexitätsklassen sind

$$\begin{aligned} \mathsf{L} = \mathsf{LOGSPACE} &= \mathsf{DSPACE}(O(\log n)) \\ \mathsf{L}^c &= \mathsf{DSPACE}(O(\log^c n)) \\ \mathsf{LINSPACE} &= \mathsf{DSPACE}(O(n)) \\ \mathsf{PSPACE} &= \mathsf{DSPACE}(\mathrm{poly}(n)) \\ \mathsf{ESPACE} &= \mathsf{DSPACE}(2^{\mathcal{O}(n)}) \\ \mathsf{EXPSPACE} &= \mathsf{DSPACE}(2^{\mathrm{poly}(n)}) \end{aligned}$$

Die Klassen $\mathsf{NL}, \mathsf{NLINSPACE}$ und $\mathsf{NPSPACE}$, sowie $\mathsf{FL}, \mathsf{FLINSPACE}$ und $\mathsf{FPSPACE}$ sind analog definiert, wobei $\mathsf{NPSPACE}$ mit PSPACE zusammenfällt (wie wir bald sehen werden).

3 Grundlegende Beziehungen

In diesem Kapitel leiten wir die wichtigsten Inklusionsbeziehungen zwischen deterministischen und nichtdeterministischen Platz- und Zeitkomplexitätsklassen her. Zuerst befassen wir uns jedoch mit Robustheitseigenschaften dieser Klassen.

3.1 Robustheit von Komplexitätsklassen

Wir zeigen zuerst, dass platzbeschränkte TMs nur ein Arbeitsband benötigen.

Lemma 15 (Bandreduktion)**.**
*Zu jeder $s(n)$-platzbeschränkten Offline-*DTM *M ex. eine $s(n)$-platzbeschränkte Offline-2-*DTM *M' mit $L(M') = L(M)$.*

Beweis. Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0)$ eine Offline-k-DTM mit $k \geq 3$. Betrachte die Offline-*2*-DTM $M' = (Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q_0')$ mit $\Gamma' = \Gamma \cup (\Gamma \cup \hat{\Gamma})^{k-1}$, wobei $\hat{\Gamma}$ für jedes $a \in \Gamma$ die markierte Variante $\hat{a}$ enthält. M' hat dasselbe Eingabeband wie M, speichert aber die Inhalte von $(k-1)$ übereinander liegenden Feldern der Arbeitsbänder von M auf einem Feld ihres Arbeitsbandes. Zur Speicherung der Kopfpositionen von M werden Markierungen benutzt.

Initialisierung: In den ersten beiden Rechenschritten erzeugt M' auf ihrem Arbeitsband (Band 2) $k-1$ Spuren, die jeweils mit dem markierten Anfangszeichen $\hat{\triangleright}$ initialisiert werden:

$$K_x = (q_0', \varepsilon, \triangleright x, \varepsilon, \triangleright) \xrightarrow[M']{} (q_1', \triangleright, x, \triangleright, \sqcup) \xrightarrow[M']{} (q_2', \varepsilon, \triangleright x, \triangleright, \begin{pmatrix} \hat{\triangleright} \\ \vdots \\ \hat{\triangleright} \end{pmatrix})$$

Simulation: M' simuliert einen Rechenschritt von M, indem sie den Kopf auf dem Arbeitsband soweit nach rechts bewegt, bis sie alle $(k-1)$ markierten Zeichen $a_2, \ldots, a_k$ gefunden hat. Diese speichert sie neben dem aktuellen Zustand q von M in ihrem Zustand. Während M' den Kopf wieder nach links bewegt, führt M' folgende Aktionen durch: Ist a_1 das von M' (und von M) gelesene Eingabezeichen und ist $\delta(q, a_1, a_2, \ldots, a_k) = (q', a_1, D_1, a_2', D_2, \ldots, a_k', D_k)$, so bewegt M' den Eingabekopf gemäß D_1, ersetzt auf dem Arbeitsband die markierten Zeichen a_i durch a_i' und verschiebt deren Marken gemäß D_i, $i = 2, \ldots, k$.

Akzeptanzverhalten: M' akzeptiert genau dann, wenn M akzeptiert.

Offenbar gilt nun $L(M') = L(M)$ und $space_{M'}(x) \leq space_M(x)$. ■

In den Übungen wird gezeigt, dass die Sprache der Palindrome durch eine 2-DTM zwar in Linearzeit entscheidbar ist, eine 1-DTM hierzu jedoch Zeit $\Omega(n^2)$ benötigt. Tatsächlich lässt sich jede $t(n)$-zeitbeschränkte k-DTM M von einer 1-DTM M' in Zeit $O(t(n)^2)$ simulieren. Bei Verwendung einer 2-DTM ist die Simulation sogar in Zeit $O(t(n) \log t(n))$ durchführbar (siehe Übungen). Als nächstes wenden wir uns wichtigen Robustheitseigenschaften von Platz- und Zeitkomplexitätsklassen zu.

Satz 16 (Lineare Platzkompression und Beschleunigung)**.**
Für alle $c > 0$ gilt

i) $\mathsf{DSPACE}(s(n)) \subseteq \mathsf{DSPACE}(2 + cs(n))$*, (lin. space compression)*

ii) $\mathsf{DTIME}(t(n)) \subseteq \mathsf{DTIME}(2 + n + c \cdot t(n))$*. (linear speedup)*

Beweis. i) Sei $L \in \mathsf{DSPACE}(s(n))$ und sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0)$ eine $s(n)$-platzbeschränkte Offline-k-DTM mit $L(M) = L$. Nach vorigem Lemma können wir $k = 2$ annehmen. O.B.d.A. sei $c < 1$. Wähle $m = \lceil 1/c \rceil$ und betrachte die Offline-*2*-DTM

$$M' = (Q \times \{1, \ldots, m\}, \Sigma, \Sigma \cup \{\sqcup, \triangleright\} \cup \Gamma^m, \delta', (q_0, m))$$

mit

$$\delta'((q,i),a,b) = \begin{cases} ((q',1),a,D_1,\triangleright,R), \\ \qquad \text{falls } b = \triangleright \text{ und } \delta(q,a,\triangleright) = (q',a,D_1,\triangleright,R), \\ ((q',j),a,D_1,(b_1,\ldots,b_{i-1},b_i',b_{i+1},\ldots,b_m),D_2'), \\ \qquad \text{falls } [b = (b_1,\ldots,b_m) \text{ oder } b = \sqcup = b_1 = \\ \qquad \ldots = b_m] \text{ und } \delta(q,a,b_i) = (q',a,D_1,b_i',D_2), \end{cases}$$

wobei

$$j = \begin{cases} i, & D_2 = N \\ i+1, & D_2 = R, i < m \\ 1, & D_2 = R, i = m \\ m, & D_2 = L, i = 1 \\ i-1, & D_2 = L, i > 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad D_2' = \begin{cases} L, & D_2 = L, i = 1 \\ R, & D_2 = R, i = m \\ N, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist. Identifizieren wir die Zustände (q_{ja},i) mit q_{ja} und (q_{nein},i) mit q_{nein}, so ist leicht zu sehen, dass $L(M') = L(M) = L$ gilt. Zudem gilt

$$\begin{aligned} \mathit{space}_{M'} &\leq 1 + \lceil (\mathit{space}_M(x) - 1)/m \rceil \\ &\leq 2 + \mathit{space}_M(x)/m \\ &\leq 2 + c \cdot \mathit{space}_M(x) \qquad \text{(wegen } m = \lceil 1/c \rceil \geq 1/c). \end{aligned}$$

ii) Sei $L \in \mathsf{DTIME}(t(n))$ und sei $M = (Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0)$ eine $t(n)$-zeitbeschränkte k-DTM mit $L(M) = L$, wobei wir $k \geq 2$ annehmen. Wir konstruieren eine k-DTM M' mit $L(M') = L$ und $\mathit{time}_{M'}(x) \leq 2 + |x| + c \cdot \mathit{time}_M(x)$. M' verwendet das Alphabet $\Gamma' = \Gamma \cup \Gamma^m$ mit $m = \lceil 8/c \rceil$ und simuliert M wie folgt.

Initialisierung: M' kopiert die Eingabe $x = x_1 \ldots x_n$ in Blockform auf das zweite Band. Hierzu fasst M' je m Zeichen von x zu einem Block $(x_{im+1},\ldots,x_{(i+1)m})$, $i = 0,\ldots,l = \lceil n/m \rceil - 1$, zusammen, wobei der letzte Block $(x_{lm+1},\ldots,x_n,\sqcup,\ldots,\sqcup)$ mit $(l+1)m - n$ Blanks auf die Länge m gebracht wird. Sobald M' das erste Blank hinter der Eingabe x erreicht, ersetzt sie dieses durch das Zeichen $\triangleright$, d.h. das erste Band von M' ist nun mit $\triangleright x \triangleright$ und das zweite Band mit

$$\triangleright(x_1,\ldots,x_m)\ldots(x_{(l-1)m+1},\ldots,x_{lm})(x_{lm+1},\ldots,x_n,\sqcup,\ldots,\sqcup)$$

beschriftet. Hierzu benötigt M' genau $n+2$ Schritte. In weiteren $l+1 = \lceil n/m \rceil$ Schritten kehrt M' an den Beginn des 2. Bandes zurück. Von nun an benutzt M' das erste Band als Arbeitsband und das zweite als Eingabeband.

Simulation: M' simuliert jeweils eine Folge von m Schritten von M in 6 Schritten:

M' merkt sich in ihrem Zustand den Zustand q von M vor Ausführung dieser Folge und die aktuellen Kopfpositionen $i_j \in \{1,\ldots,m\}$ von M innerhalb der gerade gelesenen Blöcke auf den Bändern $j = 1,\ldots,k$. Die ersten 4 Schritte verwendet M', um die beiden Nachbarblöcke auf jedem Band zu erfassen ($LRRL$). Mit dieser Information kann M' die nächsten m Schritte von M vorausberechnen und die entsprechende Konfiguration in 2 weiteren Schritten herstellen.

Akzeptanzverhalten: M' akzeptiert genau dann, wenn M dies tut.

Es ist klar, dass $L(M') = L$ ist. Zudem gilt für jede Eingabe x der Länge $|x| = n$

$$\begin{aligned} \mathit{time}_{M'}(x) &\leq n + 2 + \lceil n/m \rceil + 6\lceil t(n)/m \rceil \\ &\leq n + 2 + 7\lceil t(n)/m \rceil \\ &\leq n + 2 + 7ct(n)/8 + 7 \\ &\leq n + 2 + ct(n), \text{ falls } c \cdot t(n)/8 \geq 7. \end{aligned}$$

Da das Ergebnis der Rechnung von $M(x)$ im Fall $t(n) < 56/c$ nur von konstant vielen Eingabezeichen abhängt, kann M' diese Eingaben schon während der Initialisierungsphase (durch table-lookup) in Zeit $n+2$ entscheiden. ■

Korollar 17.

i) $\mathsf{DSPACE}(O(s(n))) = \mathsf{DSPACE}(s(n))$, *falls* $s(n) \geq 2$.

ii) $\mathsf{DTIME}(O(t(n))) = \mathsf{DTIME}(t(n))$, *falls* $t(n) \geq (1+\varepsilon)n + 2$ *für ein* $\varepsilon > 0$ *ist.*

iii) $\mathsf{DTIME}(O(n)) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathsf{DTIME}((1+\varepsilon)n + 2)$.

Beweis. i) Sei $L \in \mathsf{DSPACE}(cs(n) + c)$ für eine Konstante $c \geq 0$. Ist $s(n) < 6$ für alle n, so folgt $L \in \mathsf{DSPACE}(\mathcal{O}(1)) = \mathsf{DSPACE}(0)$. Gilt dagegen $s(n) \geq 6$ für alle $n \geq n_0$, so existiert für $c' = 1/2c$ eine Offline-k-DTM M, die L für fast alle Eingaben in Platz $2 + c'cs(n) + c'c \leq 3 + s(n)/2 \leq s(n)$ entscheidet. Wegen $s(n) \geq 2$ können wir M leicht so modifizieren, dass sie auch die endlich vielen Ausnahmen in Platz $s(n)$ entscheidet.

ii) Sei $L \in \mathsf{DTIME}(ct(n) + c)$ für ein $c \geq 0$. Nach vorigem Satz existiert für $c' = \varepsilon/(2 + 2\varepsilon)c$ eine DTM M, die L in Zeit $time_M(x) \leq 2 + n + c'(ct(n) + c)$ entscheidet. Wegen $t(n) \geq (1+\varepsilon)n$ und da für alle $n \geq (4 + 2c'c)/\varepsilon$ die Ungleichung $2 + c'c \leq \varepsilon n/2$ gilt, folgt

$$time_M(x) \leq 2 + n + c'ct(n) + c'c = \underbrace{c'ct(n)}_{=\frac{\varepsilon t(n)}{2+2\varepsilon}} + \underbrace{2 + c'c + n}_{\leq \frac{(\varepsilon+2)n}{2} \leq \frac{(\varepsilon+2)t(n)}{2+2\varepsilon}} \leq t(n)$$

für fast alle n. Zudem können wir M wegen $t(n) \geq n + 2$ leicht so modifizieren, dass sie auch die endlich vielen Ausnahmen in Zeit $t(n)$ entscheidet.

iii) Klar, da $\mathsf{DTIME}(O(n)) = \mathsf{DTIME}(O((1+\varepsilon)n + 2))$ und diese Klasse nach *ii)* für jedes $\varepsilon > 0$ gleich $\mathsf{DTIME}((1+\varepsilon)n + 2)$ ist. ■

3.2 Deterministische Simulationen von nichtdeterministischen Berechnungen

In diesem Abschnitt betrachten wir möglichst platz- und zeiteffiziente deterministische Simulationen von nichtdeterministischen TMs.

Satz 18.

i) $\mathsf{NTIME}(t(n)) \subseteq \mathsf{DSPACE}(O(t(n)))$,

ii) $\mathsf{NSPACE}(s(n)) \subseteq \mathsf{DTIME}(2^{O(s(n)+\log n)})$.

Beweis. i) Sei $L \in \mathsf{NTIME}(t(n))$ und sei $N = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0)$ eine k-NTM, die L in Zeit $t(n)$ entscheidet. Weiter sei

$$d = \max_{(q,\vec{a}) \in Q \times \Gamma^k} \|\delta(q, \vec{a})\|$$

der maximale Verzweigungsgrad von N. Dann ist jede Rechnung

$$K_x = K_0 \underset{N}{\rightarrow} K_1 \underset{N}{\rightarrow} \ldots \underset{N}{\rightarrow} K_t$$

der Länge t von $N(x)$ eindeutig durch eine Folge $(i_1, \ldots, i_t) \in \{1, \ldots, d\}^t$ beschreibbar. Betrachte die Offline-*(k+2)*-DTM M, die auf ihrem 2. Band für $t = 1, 2, \ldots$ der Reihe nach alle Folgen $(i_1, \ldots, i_t) \in \{1, \ldots, d\}^t$ generiert. Für jede solche Folge kopiert M die Eingabe auf Band 3 und simuliert die zugehörige Rechnung von $N(x)$ auf den Bändern 3 bis $k + 2$. M akzeptiert, sobald N bei einer dieser Simulationen in den Zustand q_{ja} gelangt. Wird dagegen ein t erreicht, für das alle d^t Simulationen von N im Zustand q_{nein} oder q_{h} enden, so verwirft M. Nun ist leicht zu sehen, dass $L(M) = L(N)$ und der Platzverbrauch von M durch

$$space_M(x) \;\leq\; time_N(x) + space_N(x) \;\leq\; (k+1)(time_N(x) + 1)$$

beschränkt ist.

ii) Sei $L \in \mathsf{NSPACE}(s(n))$ und sei $N = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0)$ eine Offline-*2*-NTM, die L in Platz $s(n)$ entscheidet. Bei einer Eingabe x der Länge n kann N

- die Köpfe des Eingabe- bzw. Arbeitsbandes auf höchstens $n + 2$ bzw. $s(n)$ verschiedenen Bandfeldern positionieren,
- das Arbeitsband mit höchstens $\|\Gamma\|^{s(n)}$ verschiedenen Beschriftungen versehen und

- höchstens $\|Q\|$ verschiedene Zustände annehmen.

D.h. ausgehend von der Startkonfiguration K_x kann N in Platz $s(n)$ höchstens

$$t(n) = (n+2)s(n)\|\Gamma\|^{s(n)}\|Q\| \leq c^{s(n)+\log n}$$

verschiedene Konfigurationen erreichen, wobei c eine von N abhängige Konstante ist. Um N zu simulieren, testet M für $s = 1, 2, \ldots,$ ob $N(x)$ eine akzeptierende Endkonfiguration $K = (q_{\text{ja}}, u_1, v_1, u_2, v_2)$ der *Größe* $|u_2v_2| = s$ erreichen kann. Ist dies der Fall, akzeptiert M. Erreicht dagegen s einen Wert, so dass $N(x)$ keine Konfiguration der Größe s erreichen kann, verwirft M. Hierzu muss M für $s = 1, 2, \ldots, s(n)$ jeweils alle von der Startkonfiguration K_x erreichbaren Konfigurationen der Größe s bestimmen, was in Zeit $(c^{s(n)+\log n})^{O(1)} = 2^{O(s(n)+logn)}$ möglich ist. ■

Korollar 19. $s(n) \geq \log n \Rightarrow \mathsf{NSPACE}(s(n)) \subseteq \mathsf{DTIME}(2^{O(s(n))})$.

Es gilt somit für jede Funktion $s(n) \geq \log n$,

$$\mathsf{DSPACE}(s) \subseteq \mathsf{NSPACE}(s) \subseteq \mathsf{DTIME}(2^{O(s)})$$

und für jede Funktion $t(n) \geq n + 2$,

$$\mathsf{DTIME}(t) \subseteq \mathsf{NTIME}(t) \subseteq \mathsf{DSPACE}(t).$$

Insbesondere erhalten wir somit die Inklusionskette

$$\begin{aligned}\mathsf{L} \subseteq \mathsf{NL} \subseteq \mathsf{P} \subseteq \mathsf{NP} \subseteq \mathsf{PSPACE} \subseteq \mathsf{NPSPACE}\\ \subseteq \mathsf{EXP} \subseteq \mathsf{NEXP} \subseteq \mathsf{EXPSPACE} \subseteq \ldots\end{aligned}$$

Des weiteren impliziert Satz 16 für $t(n) \geq n + 2$ und $s(n) \geq \log n$ die beiden Inklusionen

$$\mathsf{NTIME}(t) \subseteq \mathsf{DTIME}(2^{O(t)}) \text{ und } \mathsf{NSPACE}(s) \subseteq \mathsf{DSPACE}(2^{O(s)}),$$

wovon sich letztere noch erheblich verbessern lässt, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden.

3.3 Der Satz von Savitch

Praktisch relevante Komplexitätsklassen werden durch Zeit- und Platzschranken $t(n)$ und $s(n)$ definiert, die sich mit relativ geringem Aufwand berechnen lassen.

Definition 20. *Eine monotone Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ heißt **echte** (engl. proper) **Komplexitätsfunktion**, falls es einen Transducer M gibt mit*

- $M(x) = 1^{f(|x|)}$,
- $space_M(x) = O(f(|x|))$ *und*
- $time_M(x) = O(f(|x|) + |x|)$.

Beispiele für echte Komplexitätsfunktionen sind k, $\lceil \log n \rceil$, $\lceil \log^k n \rceil$, $\lceil n \cdot \log n \rceil$, $n^k + k$, 2^n, $n! \cdot \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ (siehe Übungen).

Satz 21 (Savitch, 1970)**.**
Für jede echte Komplexitätsfunktion $s(n) \geq \log n$ gilt

$$\mathsf{NSPACE}(s) \subseteq \mathsf{DSPACE}(s^2).$$

Beweis. Sei $L \in \mathsf{NSPACE}(s)$ und sei N eine Offline-*2*-NTM, die L in Platz $s(n)$ entscheidet. Wie im Beweis von Satz 18 gezeigt, kann N bei einer Eingabe x der Länge n höchstens $c^{s(n)}$ verschiedene Konfigurationen einnehmen. Daher muss im Fall $x \in L$ eine akzeptierende Rechnung der Länge $\leq c^{s(n)}$ existieren. Zudem können wir annehmen, dass $N(x)$ köchstens eine akzeptierende Endkonfiguration $\hat{K}_x$ erreichen kann.

Sei $K_1, \ldots, K_{c^{s(n)}}$ eine Aufzählung aller Konfigurationen von $N(x)$ die Platz höchstens $s(n)$ benötigen. Dann ist leicht zu sehen, dass für je zwei solche Konfigurationen K, K' und jede Zahl i folgende Äquivalenz gilt:

$$K \xrightarrow[N]{}^{\leq 2^i} K' \Leftrightarrow \exists K_j : K \xrightarrow[N]{}^{\leq 2^{i-1}} K_j \wedge K_j \xrightarrow[N]{}^{\leq 2^{i-1}} K'.$$

Diese Beobachtung führt sofort auf folgende Prozedur $\mathsf{reach}(K, K', i)$, um die Gültigkeit von $K \xrightarrow[N]{}^{\leq 2^i} K'$ zu testen.

Prozedur $\mathsf{reach}(K, K', i)$

```
1  if i = 0 then return(K = K' or K ->_N K')
2  for each Konfiguration K_j do
3    if reach(K, K_j, i − 1) and reach(K_j, K', i − 1) then
4      return(true)
5  return(false)
```

Nun können wir N durch folgende Offline-3-DTM M simulieren. M benutzt ihr 2. Band als Laufzeitkeller zur Verwaltung der Inkarnationen der rekursiven Aufrufe von reach. Hierzu speichert M auf ihrem 2. Band eine Folge von Tripeln der Form (K, K', i). Das 3. Band wird zum Kopieren von Tripeln auf dem 2. Band und zur Berechnung von K_{j+1} aus K_j benutzt wird.

Initialisierung: $M(x)$ schreibt das Tripel $(K_x, \hat{K}_x, \lceil s(|n|) \log c \rceil)$ auf das 2. Band, wobei für das Eingabeband nur die Kopfposition, nicht jedoch die Beschriftung notiert wird (also z.B. $K_x = (q_0, 1, \varepsilon, \triangleright)$).

Simulation: Sei (K, K', i) das am weitesten rechts auf dem 2. Band stehende Tripel (also das oberste Kellerelement).

Im Fall $i = 0$ testet M direkt, ob $K \xrightarrow[N]{}^{\leq 1} K'$ gilt und gibt die Antwort zurück.

Andernfalls fügt M beginnend mit $j = 1$ das Tripel $(K, K_j, i-1)$ hinzu und berechnet (rekursiv) die Antwort für dieses Tripel.

Ist diese negativ, so wird das Tripel $(K, K_j, i-1)$ durch das nächste Tripel $(K, K_{j+1}, i-1)$ ersetzt (solange $j < c^{s(n)}$ ist, andernfalls erfährt das Tripel (K, K', i) eine negative Antwort).

Erhält $(K, K_j, i-1)$ eine positive Antwort, so ersetzt M das Tripel $(K, K_j, i-1)$ durch das Tripel $(K_j, K', i-1)$ und berechnet die zugehörige Antwort. Bei einer negativen Antwort fährt M mit dem nächsten Tripel $(K, K_{j+1}, i-1)$ fort. Bei einer positiven Antwort erhält auch (K, K', i) eine positive Antwort.

Akzeptanzverhalten: M akzeptiert, falls die Antwort auf das Starttripel $(K_x, \hat{K}_x, \lceil s(|n|) \log c \rceil)$ positiv ist.

Da sich auf dem 2. Band zu jedem Zeitpunkt höchstens $\lceil s(|n|) \log c \rceil$ Tripel befinden und jedes Tripel $O(s(|x|))$ Platz benötigt, besucht M nur $O(s^2(|x|))$ Felder. ■

Korollar 22.

i) $\mathsf{NL} \subseteq \mathsf{L}^2$,

ii) $\mathsf{NPSPACE} = \bigcup_{k>0} \mathsf{NSPACE}(n^k) \subseteq \bigcup_{k>0} \mathsf{DSPACE}(n^{2k}) = \mathsf{PSPACE}$,

iii) $\mathsf{NPSPACE}$ *ist unter Komplement abgeschlossen,*

iv) $\mathsf{CSL} = \mathsf{NSPACE}(n) \subseteq \mathsf{DSPACE}(n^2) \cap \mathsf{E}$.

Eine weitere Folgerung aus dem Satz von Savitch ist, dass das Komplement $\overline{L}$ einer Sprache $L \in \mathsf{NSPACE}(s)$ in $\mathsf{DSPACE}(s^2)$ und somit auch in $\mathsf{NSPACE}(s^2)$ liegt. Wir werden gleich sehen, dass $\overline{L}$ sogar in $\mathsf{NSPACE}(s)$ liegt, d.h. die nichtdeterministischen Platzklassen $\mathsf{NSPACE}(s)$ sind unter Komplementbildung abgeschlossen.

3.4 Der Satz von Immerman und Szelepcsényi

Wir wir gesehen haben, impliziert der Satz von Savitch den Abschluss von $\mathsf{NPSPACE}$ unter Komplementbildung. Dagegen wurde die Frage ob auch die Klasse $\mathsf{CSL} = \mathsf{NSPACE}(n)$ der kontextsensitiven Sprachen unter Komplementbildung abgeschlossen ist, erst in den 80ern von Neil Immerman und unabhängig davon von Robert Szelepcsényi gelöst.

Definition 23. *Für eine Sprachklasse* C *bezeichne* $\mathsf{co\text{-}C} = \{\overline{L} | L \in \mathsf{C}\}$ *die zu* C ***komplementäre Sprachklasse****. Dabei bezeichnet* $\overline{L} = \Sigma^* - L$ *das* ***Komplement*** *einer Sprache* $L \subseteq \Sigma^*$.

Die zu NP komplementäre Klasse ist co-NP $= \{L | \overline{L} \in \mathsf{NP}\}$. Ein Beispiel für ein co-NP-Problem ist TAUT:

Gegeben: Eine boolsche Formel F über n Variablen $x_1, \ldots, x_n$.

Gefragt: Ist F eine Tautologie, d. h. gilt $f(\vec{a}) = 1$ für alle Belegungen $\vec{a} \in \{0,1\}^n$?

Die Frage ob NP unter Komplementbildung abgeschlossen ist (d.h., ob NP = co-NP gilt), ist ähnlich wie das $\mathsf{P} \stackrel{?}{=} \mathsf{NP}$-Problem ungelöst.

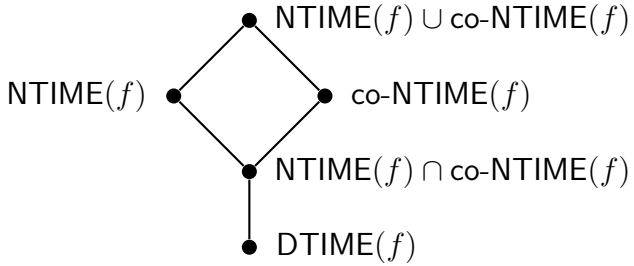
Da sich deterministische Rechnungen leicht komplementieren lassen (durch einfaches Vertauschen der Zustände q_{ja} und q_{nein}), sind deterministische Komplexitätsklassen unter Komplementbildung abgeschlossen.

Proposition 24.

i) co-DSPACE$(s(n))$ = DSPACE$(s(n))$,

ii) co-DTIME$(t(n))$ = DTIME$(t(n))$.

Damit ergibt sich folgende Inklusionsstruktur:



Dagegen lassen sich nichtdeterministische Berechnungen nicht ohne weiteres komplementieren; es sei denn, man fordert gewisse Zusatzeigenschaften.

Definition 25. *Eine* NTM N *heißt* ***strong*** *bei Eingabe x, falls es entweder akzeptierende oder verwerfende Rechnungen bei Eingabe x gibt (aber nicht beides zugleich).*

Proposition 26.

i) NTIME$(t(n)) \cap$ co-NTIME$(t(n)) = \{L(M) \mid M$ *ist eine $t(n)$-zeitbeschränkte NTM, die bei allen Eingaben strong ist*$\}$,

ii) NSPACE$(s(n)) \cap$ co-NSPACE$(s(n)) = \{L(M) \mid M$ *ist eine $s(n)$-platzbeschr. Offline-NTM, die bei allen Eingaben strong ist*$\}$.

Beweis. Siehe Übungen. ■

Satz 27 (Immerman und Szelepcsényi, 1987)**.**
Für jede echte Komplexitätsfunktion $s(n) \geq \log n$ gilt

$$\mathsf{NSPACE}(s) = \text{co-}\mathsf{NSPACE}(s)).$$

Beweis. Sei $L \in$ NSPACE(s) und sei N eine $s(n)$-platzbeschränkte Offline-NTM mit $L(N) = L$. Wir konstruieren eine $O(s(n))$-platzbeschränkte Offline-NTM N' mit $L(N') = L$, die bei allen Eingaben strong ist. Hierzu zeigen wir zuerst, dass die Frage, ob $N(x)$ eine Konfiguration K in höchstens t Schritten erreichen kann, durch eine $O(s(n))$-platzbeschränkte Offline-NTM N_0 entscheidbar ist, die bei Kenntnis der Anzahl

$$r(x, t-1) = \|\{K | K_x \underset{N}{\rightarrow}^{\leq t-1} K\}\|$$

aller in höchstens $t-1$ Schritten erreichbaren Konfigurationen strong ist. Betrachte die Sprache

$$L_0 = \{\langle x, r, t, K\rangle | 1 \leq r, t \leq c^{s(n)} \text{ und } K_x \underset{N}{\rightarrow}^{\leq t} K\},$$

wobei $K_1, \ldots, K_{c^{s(n)}}$ wie im Beweis des Satzes von Savitch eine Aufzählung aller Konfigurationen von $N(x)$ ist, die Platz höchstens $s(n)$ benötigen.

Behauptung 28. *Es existiert eine Offline-*NTM N_0 *mit $L(N_0) = L_0$, die $O(s(|x|))$ Felder besucht und auf allen Eingaben der Form $\langle x, r(x, t-1), t, K\rangle$ strong ist.*

Beweis der Behauptung. $N_0(\langle x, r, t, K\rangle)$ benutzt einen mit dem Wert 0 initialisierten Zähler z und rät der Reihe nach für jede Konfiguration K_i eine Rechnung von $N(x)$ der Länge $\leq t-1$, die in K_i endet. Falls dies gelingt, erhöht N_0 den Zähler z um 1 und testet, ob $K_i \xrightarrow[N]{}^{\leq 1} K$ gilt. Falls ja, so hält N_0 im Zustand q_{ja}. Nachdem N_0 alle Konfigurationen K_i durchlaufen hat, hält N_0 im Zustand q_{nein}, wenn z den Wert r hat, andernfalls im Zustand q_{h}.

Pseudocode für $N_0(\langle x, r, t, K\rangle)$

```
1  if t = 0 then halte im Zustand q_nein
2  z := 0
3  for each Konfiguration K_i do
4    rate eine Rechnung α der Laenge ≤ t − 1 von N(x)
5    if α endet in K_i then
6      z := z + 1
7      if K_i →_N K then
8        halte im Zustand q_ja
9  if z = r then
10   halte im Zustand q_nein
11 else
12   halte im Zustand q_h
```

Da N_0 genau dann eine akzeptierende Rechnung hat, wenn eine Konfiguration K_i mit $K_x \xrightarrow[N]{}^{\leq t-1} K_i$ und $K_i \xrightarrow[N]{}^{\leq 1} K$ existiert, ist klar, dass N_0 die Sprache L_0 entscheidet. Da N_0 zudem $O(s(n))$-platzbeschränkt ist, bleibt nur noch zu zeigen, dass N_0 bei Eingaben der Form $x_0 = \langle x, r(x, t-1), t, K\rangle$, $t \geq 1$, strong ist, also $N_0(x_0)$ genau im Fall $x_0 \notin L_0$ eine verwerfende Endkonfiguration erreichen kann.

Um bei Eingabe x_0 eine verwerfende Endkonfiguration zu erreichen, muss N_0 $r = r(x, t-1)$ Konfigurationen K_i finden, für die zwar $K_x \xrightarrow[N]{}^{\leq t-1} K_i$ aber nicht $K_i \xrightarrow[N]{}^{\leq 1} K$ gilt. Dies bedeutet jedoch, dass K von keiner der $r(x, t-1)$ in $t-1$ Schritten erreichbaren Konfigurationen in einem Schritt erreichbar ist und somit x_0 tatsächlich nicht zu L_0 gehört. Die Umkehrung folgt analog. □

Betrachte nun folgende NTM N', die für $t = 1, 2, \ldots$ die Anzahl $r(x, t)$ der in höchstens t Schritten erreichbaren Konfigurationen in der Variablen r berechnet (diese Technik wird induktives Zählen, engl. *inductive counting*, genannt) und mit Hilfe dieser Anzahlen im Fall $x \notin L$ verifiziert, dass keine der erreichbaren Konfigurationen akzeptierend ist.

Pseudocode für $N'(x)$

```
1  t := 0
2  r := 1
3  repeat
4    t := t + 1
5    r⁻ := r
6    r := 0
7    for each Konfiguration K_i do
8      simuliere N_0(⟨x, r⁻, t, K_i⟩)
9      if N_0 akzeptiert then
10       r := r + 1
11       if K_i ist akzeptierende Endkonfiguration then
12         halte im Zustand q_ja
13     if N_0 haelt im Zustand q_h then
14       halte im Zustand q_h
15 until (r = r⁻)
16 halte im Zustand q_nein
```

Behauptung 29. *Im t-ten Durchlauf der repeat-Schleife wird r^- in Zeile 5 auf den Wert $r(x, t-1)$ gesetzt. Folglich wird N_0 von N' in Zeile 8 nur mit Eingaben der Form $\langle x, r(x, t-1), t, K_i\rangle$ aufgerufen.*

Beweis der Behauptung. Wir führen Induktion über t:

$t = 1$**:** Im ersten Durchlauf der repeat-Schleife erhält r^- den Wert $1 = r(x, 0)$.

$t \rightsquigarrow t + 1$**:** Da r^- zu Beginn des $(t + 1)$-ten Durchlaufs auf den Wert von r gesetzt wird, müssen wir zeigen, dass r im t-ten Durchlauf auf $r(x, t)$ hochgezählt wird. Nach Induktionsvoraussetzung wird N_0 im t-ten Durchlauf nur mit Eingaben der Form $\langle x, r(x, t-1), t, K_i\rangle$ aufgerufen. Da N_0 wegen Beh. 1 auf all diesen Eingaben strong ist und keine dieser Simulationen im Zustand q_h endet (andernfalls würde N' sofort stoppen), werden alle in $\leq t$ Schritten erreichbaren Konfigurationen K_i als solche erkannt und somit wird r tatsächlich auf den Wert $r(x, t)$ hochgezählt. ■

Behauptung 30. *Bei Beendigung der repeat-Schleife in Zeile 15 gilt* $r = r^- = \|\{K | K_x \xrightarrow[N]{}{}^* K\}\|$.

Beweis der Behauptung. Wir wissen bereits, dass im t-ten Durchlauf der repeat-Schleife r den Wert $r(x, t)$ und r^- den Wert $r(x, t-1)$ erhält. Wird daher die repeat-Schleife nach t_e Durchläufen verlassen, so gilt $r = r^- = r(x, t_e) = r(x, t_e - 1)$.
Angenommen $r(x, t_e) < \|\{K | K_x \xrightarrow[N]{}{}^* K\}\|$. Dann gibt es eine Konfiguration K, die für ein $t' > t_e$ in t' Schritten, aber nicht in t_e Schritten erreichbar ist. Betrachte eine Rechnung $K_x = K_0 \xrightarrow[N]{} K_1 \xrightarrow[N]{} \ldots \xrightarrow[N]{} K_{t'} = K$ minimaler Länge, die in K endet. Dann gilt $K_x \xrightarrow[N]{}{}^{t_e} K_{t_e}$, aber nicht $K_x \xrightarrow[N]{}{}^{\leq t_e - 1} K_{t_e}$ und daher folgt $r(x, t_e) > r(x, t_e - 1)$. Widerspruch! ■

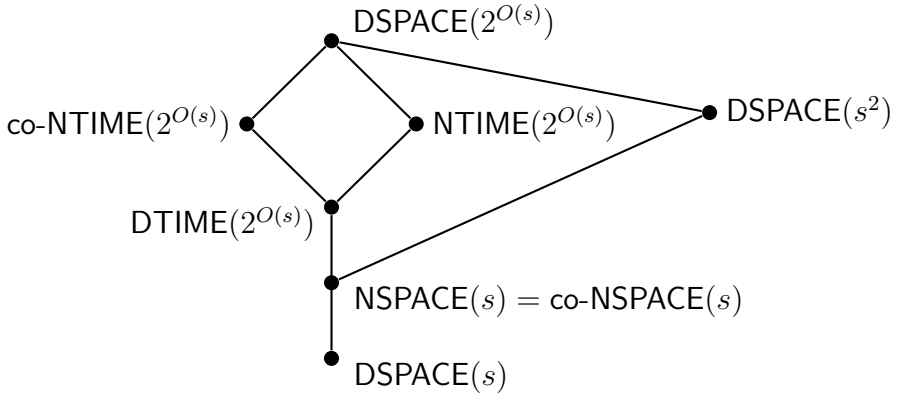
Da N' offenbar die Sprache L in Platz $O(s(n))$ entscheidet, bleibt nur noch zu zeigen, dass N' bei allen Eingaben strong ist. Wegen Behauptung 30 hat $N'(x)$ genau dann eine verwerfende Rechnung, wenn im letzten Durchlauf der repeat-Schleife alle erreichbaren Konfigurationen K als solche erkannt werden und darunter keine akzeptierende

Endkonfiguration ist. Dies impliziert $x \notin L$. Umgekehrt ist leicht zu sehen, dass $N'(x)$ im Fall $x \notin L$ eine verwerfende Rechnung hat. ■

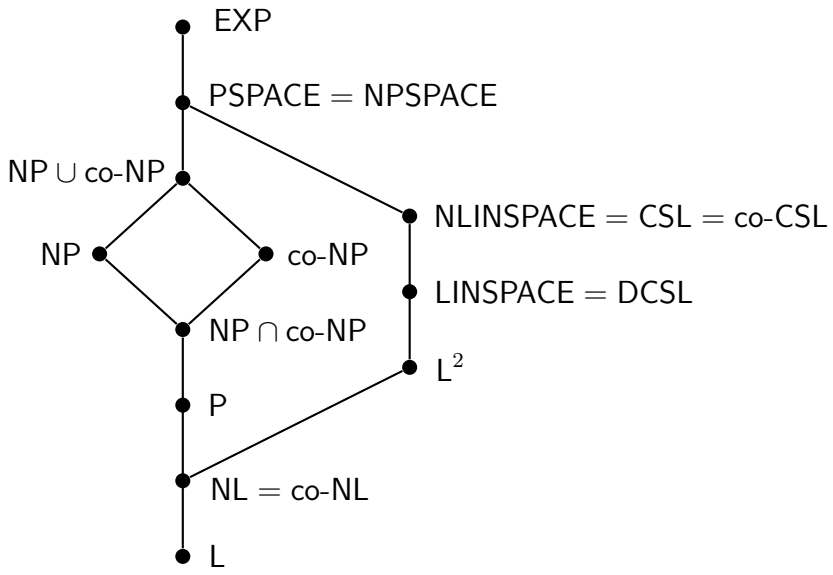
Korollar 31.

1. $\mathsf{NL} = \text{co-}\mathsf{NL}$,
2. $\mathsf{CSL} = \mathsf{NLINSPACE} = \text{co-}\mathsf{CSL}$.

Damit ergibt sich folgende Inklusionsstruktur für (nicht)deterministische Platz- und Zeitklassen:



Angewandt auf die wichtigsten bisher betrachteten Komplexitätsklassen erhalten wir folgende Inklusionsstruktur:



Eine zentrale Fragestellung der Komplexitätstheorie ist, welche dieser Inklusionen echt sind. Dieser Frage gehen wir im nächsten Kapitel nach.

4 Hierarchiesätze

4.1 Unentscheidbarkeit mittels Diagonalisierung

Wir benutzen folgende Kodierung (Gödelisierung) von 1-DTMs $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0)$. O.B.d.A. sei $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_m\}$, $\{0, 1, \#\} \subseteq \Sigma$ und $\Gamma = \{a_1, \ldots, a_l\}$ (also z.B. $a_1 = \sqcup$, $a_2 = \triangleright$, $a_3 = 0$, $a_4 = 1$ etc.). Dann kodieren wir jedes $\alpha \in Q \cup \Gamma \cup \{q_\text{h}, q_\text{ja}, q_\text{nein}, L, R, N\}$ wie folgt durch eine Binärzahl $c(\alpha)$ der Länge $b = \lceil \log_2(\|Q\| + \|\Gamma\| + 6) \rceil = \lceil \log_2(m + l + 7) \rceil$:

α	$c(\alpha)$
q_i, $i = 0, \ldots, m$	$bin_b(i)$
a_j, $j = 1, \ldots, l$	$bin_b(m + j)$
$q_\text{h}, q_\text{ja}, q_\text{nein}, L, R, N$	$bin_b(m + l + 1), \ldots, bin_b(m + l + 6)$

M wird nun durch eine Folge von Binärzahlen, die durch # getrennt sind, kodiert:

$$\begin{gathered}\#c(q_0)\,\#c(a_1)\,\#c(p_{0,1})\,\#c(b_{0,1})\,\#c(D_{0,1})\# \\ \#c(q_0)\,\#c(a_2)\,\#c(p_{0,2})\,\#c(b_{0,2})\,\#c(D_{0,2})\# \\ \vdots \\ \#c(q_m)\#c(a_l)\#c(p_{m,l})\#c(b_{m,l})\#c(D_{m,l})\#\end{gathered}$$

wobei

$$\delta(q_i, a_j) = (p_{i,j}, b_{i,j}, D_{i,j})$$

für $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, l$ ist. Kodieren wir die Zeichen $0, 1, \#$ binär (z.B. $0 \mapsto 00$, $1 \mapsto 11$, $\# \mapsto 10$), so gelangen wir zu einer Binärkodierung von M. Diese Kodierung lässt sich auch auf k-DTM's und k-NTM's erweitern. Die Kodierung einer TM M bezeichnen wir mit $\langle M \rangle$. Umgekehrt können wir jedem Binärstring w eine TM M_w wie folgt zuordnen:

$$M_w = \begin{cases} M, & \langle M \rangle = w \\ M', & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei M' eine beliebig aber fest gewählte TM ist. Für M_w schreiben wir auch M_i, wobei i die Zahl mit der Binärdarstellung $1w$ ist. Ein Paar (M, x) bestehend aus einer TM M und einer Eingabe $x \in \{0, 1\}^*$ kodieren wir durch das Wort $\langle M, x \rangle = \langle M \rangle \# x$.

Satz 32. *Die Diagonalsprache*

$$D = \{\langle M_i \rangle | M_i \textit{ ist eine DTM, die die Eingabe } x_i \textit{ akzeptiert}\}.$$

ist semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar. Hierbei ist $x_1 = \varepsilon$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 00, \ldots$ die Folge aller Binärstrings in lexikografischer Reihenfolge.

Beweis. Es ist klar, dass D semi-entscheidbar ist, da es eine DTM gibt, die bei Eingabe $\langle M_i \rangle$ die Berechnung von M_i bei Eingabe x_i simuliert und genau dann akzeptiert, wenn dies $M_i(x_i)$ tut.

Dass $\bar{D}$ nicht semi-entscheidbar (und damit D nicht entscheidbar) ist, liegt daran, dass die charakteristische Funktion von $\bar{D}$ „komplementär“ zur Diagonalen der Matrix ist, deren Zeilen die charakteristischen Funktionen aller semi-entscheidbaren Sprachen $L(M_i)$ auflisten. Wir zeigen durch einen einfachen Widerspruchsbeweis, dass keine Zeile der Matrix mit dem Komplement ihrer Diagonalen übereinstimmen kann. Wäre $\bar{D}$ semi-entscheidbar, gäbe es also eine DTM M_d, die $\bar{D}$ akzeptiert,

$$L(M_d) = \bar{D} \quad (**),$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	$\cdots$
M_1	**1**	0	0	0	$\cdots$
M_2	0	**1**	0	0	$\cdots$
M_3	1	0	**0**	0	$\cdots$
M_4	0	0	0	**1**	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

M_d	**0**	**0**	**1**	**0**	$\cdots$

so führt dies wegen

$$\begin{aligned} x_d \in D &\overset{(*)}{\Rightarrow} M_d(x_d) \text{ akzeptiert} \overset{(**)}{\Rightarrow} x_d \notin D \;\lightning \\ x_d \notin D &\overset{(*)}{\Rightarrow} M_d(x_d) \text{ akz. nicht} \overset{(**)}{\Rightarrow} x_d \in D \;\lightning \end{aligned}$$

zu einem Widerspruch. ■

Satz 33. *Für jede berechenbare Funktion $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ existiert eine entscheidbare Sprache $D_g \notin \mathsf{DTIME}(g(n))$.*

Beweis. Betrachte die Diagonalsprache

$$\begin{aligned} D_g = \{\langle M_i\rangle \,|\, & M_i \text{ ist eine DTM, die die Eingabe} \\ & x_i \text{ in} \leq g(|x_i|) \text{ Schritten akzeptiert}\} \qquad (*) \end{aligned}$$

Offensichtlich ist D_g entscheidbar. Unter der Annahme, dass $D_g \in \mathsf{DTIME}(g(n))$ ist, existiert eine $g(n)$-zeitbeschränkte DTM M_d, die das Komplement von D_g entscheidet, d.h.

$$L(M_d) = \bar{D}_g \quad (**)$$

Dies führt jedoch auf einen Widerspruch:

$$\begin{aligned} x_d \in D_g &\overset{(*)}{\Rightarrow} M_d(x_d) \text{ akzeptiert} \overset{(**)}{\Rightarrow} x_d \notin D_g \;\lightning \\ x_d \notin D_g &\overset{(*)}{\Rightarrow} M_d(x_d) \text{ verwirft} \overset{(**)}{\Rightarrow} x_d \in D_g \;\lightning \end{aligned}$$

■

Eine interessante Frage ist nun, wieviel Zeit eine DTM benötigt, um die Sprache D_g zu entscheiden. Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, dass D_g i.a. sehr hohe Komplexität haben kann.

4.2 Das Gap-Theorem

Satz 34 (Gap-Theorem)**.**
Es gibt eine berechenbare Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$\mathsf{DTIME}(2^{g(n)}) = \mathsf{DTIME}(g(n)).$$

Beweis. Wir definieren $g(n) \geq n+2$ so, dass für jede $2^{g(n)}$-zeitb. DTM M gilt:

$$time_M(x) \leq g(|x|) \text{ für fast alle Eingaben } x.$$

Betrachte hierzu das Prädikat

$$\begin{aligned} P(n,t): \;& t \geq n+2 \text{ und für } k = 1,\ldots,n \text{ und alle } x \in \Sigma_k^n \text{ gilt:} \\ & time_{M_k}(x) \notin [t+1, 2^t]. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet Σ_k das Eingabealphabet von M_k. Da für jedes n alle

$$t \geq \max\{time_{M_k}(x) | 1 \leq k \leq n, x \in \Sigma_k^n, M_k(x) \text{ hält}\}$$

das Prädikat $P(n,t)$ erfüllen, können wir $g(n)$ wie folgt induktiv definieren:

$$g(n) = \begin{cases} 2, & n = 0, \\ \min\{t \geq g(n-1) + n \,|\, P(n,t)\}, & n > 0. \end{cases}$$

Da P entscheidbar ist, ist g berechenbar.

Um zu zeigen, dass jede Sprache $L \in \mathsf{DTIME}(2^{g(n)})$ bereits in $\mathsf{DTIME}(g(n))$ enthalten ist, sei M_k eine beliebige $2^{g(n)}$-zeitbeschränkte DTM mit $L(M_k) = L$. Dann muss M_k alle Eingaben x der Länge $n \geq k$ in Zeit $time_{M_k}(x) \leq g(n)$ entscheiden, da andernfalls $P(n, g(n))$ wegen $time_{M_k}(x) \in [g(n)+1, 2^{g(n)}]$ verletzt wäre. Folglich ist $L \in \mathsf{DTIME}(g(n))$, da die endlich vielen Eingaben x der Länge $n < k$ durch table-lookup in Zeit $n + 2 \leq g(n)$ entscheidbar sind. ■

Es ist leicht zu sehen, dass der Beweis des Gap-Theorems für jede berechenbare Funktion h eine berechenbare Zeitschranke g liefert, so dass $\mathsf{DTIME}(h(g(n))) = \mathsf{DTIME}(g(n))$ ist. Folglich ist die im Beweis von Satz 33 definierte Sprache D_g nicht in Zeit $h(g(n))$ entscheidbar.

4.3 Zeit- und Platzhierarchiesätze

Um D_g zu entscheiden, müssen wir einerseits die Zeitschranke $g(|x_i|)$ berechnen und andererseits $M_i(x_i)$ simulieren. Wenn wir voraussetzen, dass g eine echte Komplexitätsfunktion ist, lässt sich $g(|x_i|)$ effizient berechnen. Für die zweite Aufgabe benötigen wir eine möglichst effiziente universelle TM.

Satz 35. *Es gibt eine universelle 3-DTM U, die für jede DTM M und jedes $x \in \{0,1\}^*$ bei Eingabe $\langle M, x\rangle$ eine Simulation von M bei Eingabe x in Zeit $O(|\langle M\rangle|(time_M(x))^2)$ und Platz $O(|\langle M\rangle| space_M(x))$ durchführt und dasselbe Ergebnis liefert:*

$$U(\langle M, x\rangle) = M(x)$$

Beweis. Betrachte folgende Offline-*3*-DTM U:

Initialisierung: U überprüft bei einer Eingabe $w\#x$ zuerst, ob w die Kodierung $\langle M\rangle$ einer k-DTM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0)$ ist. Falls ja, erzeugt U die Startkonfiguration K_x von M bei Eingabe x, wobei sie die Inhalte von k übereinander liegenden Feldern der Bänder von M auf ihrem 2. Band in je einem Block von kb, $b = \lceil \log_2(\|Q\| + \|\Gamma\| + 6)\rceil$, Feldern speichert und den aktuellen Zustand von M zusammen mit den gerade von M gelesenen Zeichen auf ihrem 3. Band notiert (letztere werden zusätzlich auf dem 2. Band markiert). Hierfür benötigt M' Zeit $\mathcal{O}(kbn) = \mathcal{O}(n^2)$.

Simulation: U simuliert jeden Rechenschritt von M wie folgt: Zunächst inspiziert U die auf dem 1. Band gespeicherte Kodierung von M, um die durch den Inhalt des 3. Bandes bestimmte Aktion von M zu ermitteln. Diese führt sie sodann auf dem 2. Band aus und aktualisert dabei auf dem 3. Band den Zustand und die gelesenen Zeichen von M. Insgesamt benötigt U für die Simulation eines Rechenschrittes von M Zeit $\mathcal{O}(kbg(n)) = \mathcal{O}(n \cdot g(n)))$.

Akzeptanzverhalten: Sobald die Simulation von M zu einem Ende kommt, hält U im gleichen Zustand wie M.

Nun ist leicht zu sehen, dass $U(\langle M, x\rangle)$ genau dann akzeptiert, wenn dies $M(x)$ tut, und dass $U(\langle M, x\rangle)$ $O(|\langle M\rangle|(time_M(x))^2)$ Rechenschritte macht und auf ihren beiden Arbeitsbändern $O(|\langle M\rangle| space_M(x))$ Bandfelder besucht. ■

Korollar 36. *(Zeithierarchiesatz)*
Für jede echte Komplexitätsfunktion $g(n) \geq n + 2$ gilt

$$\mathsf{DTIME}(n \cdot g(n)^2) - \mathsf{DTIME}(g(n)) \neq \emptyset$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass D_g für jede echte Komplexitätsfunktion $g(n) \geq n + 2$ in Zeit $O(ng^2(n))$ entscheidbar ist. Betrachte folgende *4*-DTM M'. M' überprüft bei einer Eingabe x der Länge n zuerst, ob x die Kodierung $\langle M\rangle$ einer k-DTM M ist. Falls ja, erzeugt M' auf dem 4. Band den String $1^{g(n)}$ in Zeit $\mathcal{O}(g(n))$ und simuliert $M(x)$ wie im Beweis von Theorem 35. Dabei vermindert M' die Anzahl der Einsen auf dem 4. Band nach jedem simulierten Schritt von $M(x)$ um 1. M' bricht die Simulation ab, sobald M stoppt oder der Zähler auf Band 4 den Wert 0 erreicht. M' hält genau dann im Zustand q_{ja}, wenn die Simulation von M im Zustand q_{ja} endet. Nun ist leicht zu sehen, dass M' $\mathcal{O}(n \cdot g(n)^2)$-zeitbeschränkt ist und die Sprache D_g entscheidet. ■

Korollar 37.

$$\mathsf{P} \subsetneq \mathsf{E} \subsetneq \mathsf{EXP}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\mathsf{P} &= \bigcup_{c>0} \mathsf{DTIME}(n^c + c) \subseteq \mathsf{DTIME}(2^n) \\ &\subsetneq \mathsf{DTIME}(n2^{2n}) \subseteq \mathsf{E} = \bigcup_{c>0} \mathsf{DTIME}(2^{cn}) \subseteq \mathsf{DTIME}(2^{n^2}) \\ &\subsetneq \mathsf{DTIME}(n2^{2n^2}) \subseteq \bigcup_{c>0} \mathsf{DTIME}(2^{n^c+c}) = \mathsf{EXP}\end{aligned}$$

■

Wir bemerken, dass sich mit Hilfe einer aufwändigeren Simulationstechnik von $g(n)$-zeitbeschränkten k-DTMs durch eine 2-DTM in Zeit $\mathcal{O}(g(n) \cdot \log g(n))$ folgende schärfere Form des Zeithierarchiesatzes erhalten lässt (ohne Beweis).

Satz 38. *Sei $f(n) \geq n + 2$ eine echte Komplexitätsfunktion und gelte*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{g(n) \cdot \log g(n)}{f(n)} = 0.$$

Dann ist

$$\mathsf{DTIME}(f(n)) \backslash \mathsf{DTIME}(g(n)) \neq \emptyset.$$

Für $g(n) = n^2$ erhalten wir beispielsweise die echten Inklusionen $\mathsf{DTIME}(g(n)) \subsetneq \mathsf{DTIME}(f(n))$ für die Funktionen $f(n) = n^3$, $n^2 \log^2 n$ und $n^2 \log n \log\log n$. In den Übungen zeigen wir, dass die Inklusion

$$\mathsf{DTIME}(n^k) \subsetneq \mathsf{DTIME}(n^k \log^a n)$$

tatsächlich für alle $k \geq 1$ und $a > 0$ echt ist. Für Platzklassen erhalten wir sogar eine noch feinere Hierarchie (ohne Beweis).

Satz 39 (Platzhierarchiesatz)**.** *Sind $g(n), f(n) \geq 2$ und ist f eine echte Komplexitätsfunktion mit*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0,$$

dann ist

$$\mathsf{DSPACE}(f(n)) \backslash \mathsf{DSPACE}(g(n)) \neq \emptyset.$$

Damit lässt sich im Fall $g(n) \leq f(n)$ die Frage, ob die Inklusion von $\mathsf{DSPACE}(g(n))$ in $\mathsf{DSPACE}(f(n))$ echt ist, eindeutig beantworten: Sie ist genau dann echt, wenn $\liminf_{n\to\infty} g(n)/f(n) = 0$ ist, da andernfalls $f(n) = O(g(n))$ ist und somit beide Klassen gleich sind.

Korollar 40.

$$\mathsf{L} \subsetneq \mathsf{L}^2 \subsetneq \mathsf{DCSL} \subseteq \mathsf{CSL} \subsetneq \mathsf{PSPACE} \subsetneq \mathsf{ESPACE} \subsetneq \mathsf{EXPSPACE}.$$

5 Reduktionen

5.1 Logspace-Reduktionen

Oft können wir die Komplexitäten zweier Probleme A und B vergleichen, indem wir die Frage, ob $x \in A$ ist, auf eine Frage der Form $y \in B$ zurückführen. Lässt sich y leicht aus x berechnen, so kann jeder Algorithmus für B in einen Algorithmus für A verwandelt werden, der vergleichbare Komplexität hat.

Definition 41. *Seien A und B Sprachen über einem Alphabet Σ. A ist auf B* ***logspace-reduzierbar*** *(in Zeichen: $A \leq_m^{log} B$ oder einfach $A \leq B$), falls eine Funktion $f \in \mathsf{FL}$ existiert, so dass für alle $x \in \Sigma^*$ gilt,*

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

Lemma 42. $\mathsf{FL} \subseteq \mathsf{FP}$.

Beweis. Sei $f \in \mathsf{FL}$ und sei M ein logarithmisch platzbeschränkter Transducer (kurz: FL-Transducer), der f berechnet. Da M bei einer Eingabe der Länge n nur $2^{O(\log n)}$ verschiedene Konfigurationen einnehmen kann, ist M dann auch polynomiell zeitbeschränkt. ■

Beispiel 43. *Wir reduzieren das Hamiltonkreisproblem auf das Erfüllbarkeitsproblem* Sat *für aussagenlogische Formeln.*

Hamiltonkreisproblem (*Ham*):

Gegeben: *Ein Graph $G = (V, E)$.*
Gefragt: *Hat G einen Hamiltonkreis?*

Erfüllbarkeitsproblem für boolesche Formeln (*Sat*):

Gegeben: *Eine boolesche Formel F über n Variablen.*
Gefragt: *Ist F erfüllbar?*

Hierzu benötigen wir eine Funktion $f \in \mathsf{FL}$, die einen Graphen $G = (V, E)$ so in eine Formel $f(G) = F_G$ transformiert, dass F_G genau dann erfüllbar ist, wenn G hamiltonsch ist. Wir konstruieren F_G über den Variablen $x_{1,1}, \ldots, x_{n,n}$, wobei $x_{i,j}$ für die Aussage steht, dass Knoten $j \in V = \{1, \ldots, n\}$ in der Rundreise an i-ter Stelle besucht wird. Betrachte nun folgende Klauseln.

i) An der i-ten Stelle wird mindestens ein Knoten besucht:

$$x_{i,1} \vee x_{i,2} \vee \ldots \vee x_{i,n},\ i = 1, \ldots, n.$$

ii) An der i-ten Stelle wird höchstens ein Knoten besucht:

$$\neg x_{i,j} \vee \neg x_{i,k},\ i = 1, \ldots, n,\ 1 \leq j < k \leq n.$$

iii) Jeder Knoten j wird mindestens einmal besucht:

$$x_{1,j} \vee \ldots \vee x_{n,j},\ j = 1, \ldots, n.$$

iv) Für $(i, j) \notin E$ wird Knoten j nicht unmittelbar nach Knoten i besucht:

$$\neg x_{1,i} \vee \neg x_{2,j}, \ldots, \neg x_{n-1,i} \vee \neg x_{n,j}, \neg x_{n,i} \vee \neg x_{1,j},\ (i, j) \notin E.$$

Die Klauseln in a) und b) stellen sicher, dass die Relation $\pi = \{(i, j) \mid x_{i,j} = 1\}$ eine Funktion $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ ist. Bedingung c) besagt, dass π surjektiv (und damit auch bijektiv) ist, und d) sorgt dafür, dass der durch π beschriebene Kreis entlang der Kanten von G verläuft. Bilden wir daher $F_G(x_{1,1}, \ldots, x_{n,n})$ als Konjunktion dieser

$$n + n\binom{n}{2} + n + n\left[\binom{n}{2} - \|E\|\right] = O(n^3)$$

Klauseln, so ist leicht zu sehen, dass die Reduktionsfunktion f in FL berechenbar ist und G genau dann einen Hamiltonkreis besitzt, wenn F_G erfüllbar ist. ◁

Ein zentraler Begriff in der Komplexitätstheorie ist die Vollständigkeit einer Sprache für eine Komplexitätsklasse.

Definition 44.

a) *Sei* C *eine Sprachklasse. Eine Sprache* L *heißt* C-***hart*** *(bzgl.* $\leq$*), falls für alle Sprachen* $A \in \mathsf{C}$ *gilt,* $A \leq L$.

b) *Eine* C*-harte Sprache, die zur Klasse* C *gehört, heißt* C-***vollständig***.

c) C *heißt* ***abgeschlossen*** *unter* $\leq$*, falls gilt:*

$$B \in \mathsf{C}, A \leq B \Rightarrow A \in \mathsf{C}.$$

Lemma 45.

1. *Die* $\leq_m^{log}$*-Reduzierbarkeit ist reflexiv und transitiv.*
2. *Die Klassen* $\mathsf{L}, \mathsf{NL}, \mathsf{NP}, \mathsf{co\text{-}NP}, \mathsf{PSPACE}, \mathsf{EXP}$ *und* $\mathsf{EXPSPACE}$ *sind unter* $\leq$ *abgeschlossen.*
3. *Sei* L *vollständig für eine Klasse* C*, die unter* $\leq$ *abgeschlossen ist. Dann gilt*

$$\mathsf{C} = \{A \mid A \leq L\}.$$

Beweis. Siehe Übungen. ■

Definition 46. *Ein* ***boolescher Schaltkreis*** c *mit* n *Eingängen ist eine Folge* $(g_1, \ldots, g_m)$ *von* ***Gattern***

$$g_l \in \{0, 1, x_1, \ldots, x_n, (\neg, j), (\wedge, j, k), (\vee, j, k)\}$$

mit $1 \leq j, k < l$*. Der am Gatter* g_l *berechnete Wert bei Eingabe* $a = a_1 \cdots a_n$ *ist induktiv wie folgt definiert.*

g_l	0	1	x_i	$(\neg, j)$	$(\wedge, j, k)$	$(\vee, j, k)$
$g_l(a)$	0	1	a_i	$1 - g_j(a)$	$g_j(a)g_k(a)$	$g_j(a) + g_k(a) - g_j(a)g_k(a)$

Der Schaltkreis c *berechnet die boolesche Funktion* $c(a) = g_m(a)$*. Er heißt* ***erfüllbar****, wenn es eine Eingabe* $a \in \{0,1\}^n$ *mit* $c(a) = 1$ *gibt.*

Bemerkung: Die Anzahl der Eingänge eines Gatters g wird als **Fan-in** von g bezeichnet, die Anzahl der Ausgänge (also die Anzahl der Gatter, die g als Eingabe benutzen) als **Fanout**. Boolesche Formeln entsprechen also den booleschen Schaltkreisen mit (maximalem) Fan-out 1 und umgekehrt.

Ähnlich wie bei booleschen Formeln sind auch für Schaltkreise die beiden folgenden Entscheidungsprobleme von Interesse.

Auswertungsproblem für boolesche Schaltkreise (CirVal):

Gegeben: Ein boolescher Schaltkreis c mit n Eingängen und eine Eingabe $a \in \{0,1\}^n$.
Gefragt: Ist der Wert von $c(a)$ gleich 1?

Erfüllbarkeitsproblem für boolesche Schaltkreise (CirSat):

Gegeben: Ein boolescher Schaltkreis c mit n Eingängen.
Gefragt: Ist c erfüllbar?

Im folgenden Beispiel führen wir die Lösung des Erreichbarkeitsproblems in gerichteten Graphen auf die Auswertung von booleschen Schaltkreisen zurück.

Beispiel 47. *Für die Reduktion* Reach $\leq$ CirVal *benötigen wir eine Funktion* $f \in \mathsf{FL}$ *mit der Eigenschaft, dass für alle Graphen* G *gilt:*

$$G \in \text{Reach} \Leftrightarrow f(G) \in \text{CirVal}.$$

Der Schaltkreis $f(G)$ *besteht aus den Gattern*

$$g_{i,j,k'} \text{ und } h_{i,j,k} \text{ mit } 1 \leq i, j, k \leq n \text{ und } 0 \leq k' \leq n,$$

wobei die Gatter $g_{i,j,0}$ *für* $1 \leq i, j \leq n$ *die booleschen Konstanten*

$$g_{i,j,0} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ oder } (i,j) \in E, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

sind und für $k = 1, 2, \ldots, n$ gilt,

$$\begin{aligned} h_{i,j,k} &= g_{i,k,k-1} \wedge g_{k,j,k-1}, \\ g_{i,j,k} &= g_{i,j,k-1} \vee h_{i,j,k}. \end{aligned}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} g_{i,j,k} = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \textit{es existiert in } G \textit{ ein Pfad von } i \textit{ nach } j, \textit{ der} \\ &\quad\ \textit{nur Zwischenknoten } l \leq k \textit{ durchläuft,} \\ h_{i,j,k} = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \textit{es existiert in } G \textit{ ein Pfad von } i \textit{ nach } j, \textit{ der} \\ &\quad\ \textit{den Knoten } k, \textit{ aber keinen Knoten } l > k \\ &\quad\ \textit{durchläuft.} \end{aligned}$$

Wählen wir also $g_{1,n,n}$ als Ausgabegatter, so liefert der aus diesen Gattern aufgebaute Schaltkreis c genau dann den Wert 1, wenn es in G einen Weg von Knoten 1 zu Knoten n gibt. Es ist auch leicht zu sehen, dass die Reduktionsfunktion f in FL *berechenbar ist.* ◁

Der in Beispiel 47 konstruierte Schaltkreis hat Tiefe $2n$. In den Übungen werden wir sehen, dass sich Reach auch auf die Auswertung eines Schaltkreises der Tiefe $O(\log^2 n)$ reduzieren lässt. Als nächstes leiten wir Vollständigkeitsresultate für CirVal und CirSat her.

5.2 P-vollständige Probleme und polynomielle Schaltkreiskomplexität

Satz 48. CirVal *ist* P*-vollständig.*

Beweis. Es ist leicht zu sehen, dass CirVal $\in$ P ist. Um zu zeigen, dass CirVal hart für P ist, müssen wir für jede Sprache $L \in$ P eine Funktion $f \in$ FL finden, die L auf CirVal reduziert, d.h. es muss für alle Eingaben x die Äquivalenz $x \in L \Leftrightarrow f(x) \in$ CirVal gelten.

Zu $L \in$ P existiert eine 1-DTM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0)$, die L in Zeit n^c+c entscheidet. Wir beschreiben die Rechnung von $M(x)$, $|x| = n$, durch eine Tabelle $T = (T_{i,j})$, $(i,j) \in \{1, \ldots, n^c + c\} \times \{1, \ldots, n^c + c + 2\}$, mit

$$T_{i,j} = \begin{cases} (q_i, a_{i,j}), & \text{nach } i \text{ Schritten besucht } M \text{ das } j\text{-te Bandfeld,} \\ a_{i,j}, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei q_i der Zustand von $M(x)$ nach i Rechenschritten ist und $a_{i,j}$ das nach i Schritten an Position j befindliche Zeichen auf dem Arbeitsband ist. $T = (T_{i,j})$ kodiert also in ihren Zeilen die von $M(x)$ der Reihe nach angenommenen Konfigurationen. Dabei

- überspringen wir jedoch alle Konfigurationen, bei denen sich der Kopf auf dem ersten Bandfeld befindet (zur Erinnerung: In diesem Fall wird der Kopf sofort wieder nach rechts bewegt) und
- behalten die in einem Schritt $i < n^c + c$ erreichte Endkonfiguration bis zum Zeitpunkt $i = n^c + c$ bei.

Da M in $n^c + c$ Schritten nicht das $(n^c + c + 2)$-te Bandfeld erreichen kann, ist $T_{i,1} = \triangleright$ und $T_{i,n^c+c+2} = \sqcup$ für $i = 1, \ldots, n^c + c$. Außerdem nehmen wir an, dass M bei jeder Eingabe x auf dem zweiten Bandfeld auf einem Blank hält, d.h. es gilt

$$x \in L \Leftrightarrow T_{n^c+c,2} = (q_{\text{ja}}, \sqcup).$$

Da T nicht mehr als $l = \|\Gamma\| + \|(Q \cup \{q_{\text{h}}, q_{\text{ja}}, q_{\text{nein}}\}) \times \Gamma\|$ verschiedene Tabelleneinträge besitzt, können wir jeden Eintrag $T_{i,j}$ durch eine Bitfolge $t_{i,j,1} \cdots t_{i,j,m}$ der Länge $m = \lceil \log_2 l \rceil$ kodieren.

Da der Eintrag $T_{i,j}$ im Fall $i \in \{2, \ldots, n^c+c\}$ und $j \in \{2, \ldots, n^c+c+1\}$ eine Funktion $T_{i,j} = g(T_{i-1,j-1}, T_{i-1,j}, T_{i-1,j+1})$ der drei Einträge $T_{i-1,j-1}$, $T_{i-1,j}$ und $T_{i-1,j+1}$ ist, existieren für $k = 1, \ldots, m$ Schaltkreise c_k mit

$$\begin{aligned} &t_{i,j,k} = \\ &c_k(t_{i-1,j-1,1} \cdots t_{i-1,j-1,m}, t_{i-1,j,1} \cdots t_{i-1,j,m}, t_{i-1,j+1,1} \cdots t_{i-1,j+1,m}). \end{aligned}$$

Die Reduktionsfunktion f liefert nun bei Eingabe x folgenden Schaltkreis c_x mit 0 Eingängen.

- Für jeden der $n^c+c+2+2(n^c+c-1) = 3(n^c+c)$ Randeinträge $T_{i,j}$ mit $i = 1$ oder $j \in \{1, n^c+c+2\}$ enthält c_x m konstante Gatter $c_{i,j,k} = t_{i,j,k}$, $k = 1, \ldots, m$, die diese Einträge kodieren.
- Für jeden der $(n^c + c - 1)(n^c + c)$ übrigen Einträge $T_{i,j}$ enthält c_x für $k = 1, \ldots, m$ je eine Kopie $c_{i,j,k}$ von c_k, deren $3m$ Eingänge mit den Ausgängen der Schaltkreise $c_{i-1,j-1,1} \cdots c_{i-1,j-1,m}, c_{i-1,j,1} \cdots c_{i-1,j,m}, c_{i-1,j+1,1} \cdots c_{i-1,j+1,m}$ verdrahtet sind.
- Als Ausgabegatter von c_x fungiert das Gatter $c_{n^c+c,2,1}$, wobei wir annehmen, dass das erste Bit der Kodierung von $(q_{\text{ja}}, \sqcup)$ eine Eins und von $(q_{\text{nein}}, \sqcup)$ eine Null ist.

Nun lässt sich induktiv über $i = 1, \ldots, n^c + c$ zeigen, dass die von den Schaltkreisen $c_{i,j,k}$, $j = 1, \ldots, n^c + c$, $k = 1, \ldots, m$ berechneten Werte die Tabelleneinträge $T_{i,j}$, $j = 1, \ldots, n^c + c$, kodieren. Wegen

$$x \in L \Leftrightarrow T_{n^c+c,2} = (q_{\text{ja}}, \sqcup) \Leftrightarrow c_x = 1$$

folgt somit die Korrektheit der Reduktion. Außerdem ist leicht zu sehen, dass f in logarithmischem Platz berechenbar ist, da ein $O(\log n)$-platzbeschränkter Transducer existiert, der bei Eingabe x

- zuerst die $3(n^c+c)$ konstanten Gatter von c_x ausgibt und danach
- die $m(n^c + c - 1)(n^c + c)$ Kopien der Schaltkreise $c_1, \ldots, c_k$ erzeugt und diese Kopien richtig verdrahtet. ■

Eine leichte Modifikation des Beweises von Satz 48 liefert folgendes Resultat.

Korollar 49. *Sei $L \subseteq \{0,1\}^*$ eine beliebige Sprache in P. Dann existiert eine Funktion $f \in \mathsf{FL}$, die bei Eingabe 1^n einen Schaltkreis c_n mit n Eingängen berechnet, so dass für alle $x \in \{0,1\}^n$ gilt:*

$$x \in L \quad \Leftrightarrow \quad c_n(x) = 1.$$

Korollar 49 besagt insbesondere, dass es für jede Sprache $L \subseteq \{0,1\}^*$ in P eine Schaltkreisfamilie $(c_n)_{n\geq 0}$ polynomieller Größe gibt, so dass

c_n für alle Eingaben $x \in \{0,1\}^n$ die charakteristische Funktion von L berechnet.

Die Turingmaschine ist ein **uniformes** Rechenmodell, da alle Instanzen eines Problems von einer einheitlichen Maschine entschieden werden. Im Gegensatz hierzu stellen Schaltkreise ein **nichtuniformes** Berechnungsmodell dar, da für jede Eingabegröße n ein anderer Schaltkreis c_n verwendet wird. Um im Schaltkreis-Modell eine unendliche Sprache entscheiden zu können, wird also eine unendliche Folge c_n, $n \geq 0$, von Schaltkreisen benötigt. Probleme, für die Schaltkreisfamilien polynomieller Größe existieren, werden zur Klasse PSK zusammengefasst.

Definition 50.

*a) Eine Sprache L über dem Binäralphabet $\{0,1\}$ hat **polynomielle Schaltkreiskomplexität** (kurz: $L \in \mathsf{PSK}$), falls es eine Folge von booleschen Schaltkreisen c_n, $n \geq 0$, mit n Eingängen und $n^{O(1)} + O(1)$ Gattern gibt, so dass für alle $x \in \{0,1\}^*$ gilt:*

$$x \in L \Leftrightarrow c_{|x|}(x) = 1.$$

*b) Eine Sprache L über einem Alphabet $\Sigma = \{a_0, \ldots, a_{k-1}\}$ hat **polynomielle Schaltkreiskomplexität** (kurz: $L \in \mathsf{PSK}$), falls die Binärkodierung*

$$bin(L) = \{bin(x_1) \cdots bin(x_n) \,|\, x_1 \cdots x_n \in L\}$$

von L polynomielle Schaltkreiskomplexität hat. Hierbei kodieren wir a_i durch die m-stellige Binärdarstellung $bin(i) \in \{0,1\}^m$ von i, wobei $m = \max\{1, \lceil \log_2 k \rceil\}$ ist.

Korollar 51 (Savage 1972)**.**
Es gilt $\mathsf{P} \subseteq \mathsf{PSK}$.

Ob auch alle NP-Sprachen polynomielle Schaltkreiskomplexität haben, ist ein berühmtes offenes Problem. Gelingt es nämlich, für ein NP-Problem superpolynomielle untere Schranken für die Schaltkreisgröße zu zeigen, so folgt mit dem Resultat von Savage $\mathsf{P} \neq NP$.

Selbst für NEXP ist die Inklusion in PSK offen. Dagegen zeigt ein einfaches Diagonalisierungsargument, dass in EXPSPACE Sprachen mit superpolynomieller Schaltkreiskomplexität existieren. Wir werden später sehen, dass bereits die Annahme $\mathsf{NP} \subseteq \mathsf{PSK}$ schwerwiegende Konsequenzen für uniforme Komplexitätsklassen hat.

Es ist nicht schwer zu sehen, dass die Inklusion $\mathsf{P} \subseteq \mathsf{PSK}$ echt ist. Hierzu betrachten wir Sprachen über einem einelementigen Alphabet.

Definition 52. *Eine Sprache T heißt **tally** (kurz: $T \in \mathsf{TALLY}$), falls jedes Wort $x \in T$ die Form $x = 1^n$ hat.*

Es ist leicht zu sehen, dass alle tally Sprachen polynomielle Schaltkreiskomplexität haben.

Proposition 53. $\mathsf{TALLY} \subseteq \mathsf{PSK}$.

Andererseits wissen wir aus der Berechenbarkeitstheorie, dass es tally Sprachen T gibt, die nicht einmal semi-entscheidbar sind (etwa wenn T das Komplement des Halteproblems unär kodiert). Folglich sind in PSK beliebig schwierige Sprachen (im Sinne der Berechenbarkeit) enthalten.

Korollar 54. $\mathsf{PSK} \not\subseteq \mathsf{RE}$.

5.3 NP-vollständige Probleme

Wir wenden uns nun der NP-Vollständigkeit von CirSat zu. Hierbei wird sich folgende Charakterisierung von NP als nützlich erweisen.

Definition 55. *Sei $B \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache und sei q ein Polynom.*

*a) B heißt **q-balanciert** (oder einfach **balanciert**), falls B nur Strings der Form $x\#y$ mit $y \in \{0,1\}^{q(|x|)}$ enthält.*

b) Die Sprache $\exists B$ ist definiert durch

$$\exists B = \{x \in \Sigma^* \,|\, \exists y \in \{0,1\}^* : x\#y \in B\}.$$

Falls B balanciert ist, schreiben wir für $\exists B$ auch $\exists^p B$.

c) Für eine Sprachklasse C seien

$$\exists \cdot \mathsf{C} = \{\exists B \,|\, B \in \mathsf{C}\} \text{ und}$$
$$\exists^p \cdot \mathsf{C} = \{\exists B \,|\, B \in \mathsf{C} \text{ ist balanciert}\}.$$

Jeder String $y \in \{0,1\}^*$ mit $x\#y \in B$ wird auch als **Zeuge** (engl. *witness, certificate*) für die Zugehörigkeit von x zu $\exists B$ bezeichnet.

Satz 56. $\mathsf{NP} = \exists^p \cdot \mathsf{P}$.

Beweis. Zu jeder NP-Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ existiert eine NTM M, die A in Zeit $q(n)$ für ein Polynom q entscheidet. Dabei können wir annehmen, dass jede Konfiguration höchstens zwei Folgekonfigurationen hat, die entsprechend der zugehörigen Anweisungen angeordnet sind. Folglich lässt sich jede Rechnung von $M(x)$ durch einen Binärstring y der Länge $q(n)$ eindeutig beschreiben. Das Ergebnis der durch y beschriebenen Rechnung von $M(x)$ bezeichnen wir mit $M_y(x)$. Nun ist leicht zu sehen, dass

$$B = \{x\#y \,|\, |y| = q(|x|) \text{ und } M_y(x) = \text{ja}\}$$

eine q-balancierte Sprache in P mit $L = \exists B$ ist.

Gilt umgekehrt $A = \exists B$ für eine balancierte Sprache $B \in \mathsf{P}$, dann kann A in Polynomialzeit durch eine NTM M entschieden werden, die bei Eingabe x einen String $y \in \{0,1\}^*$ geeigneter Länge rät und testet, ob $x\#y \in B$ ist. Diese Vorgehensweise von nichtdeterministischen Algorithmen wird im Englischen auch als *"guess and verify"* bezeichnet. ■

Satz 57. CirSat *ist* NP*-vollständig.*

Beweis. Es ist leicht zu sehen, dass CirSat $\in$ NP ist. Um zu zeigen, dass CirSat hart für NP ist, müssen wir für jede Sprache $L \in$ NP eine Funktion $f \in$ FL finden, die L auf CirSat reduziert, d.h. es muss für alle Eingaben x die Äquivalenz $x \in L \Leftrightarrow f(x) \in$ CirSat gelten.

Im Beweis von Satz 56 haben wir gezeigt, dass für jede NP-Sprache A eine balancierte Sprache $B \subseteq \Sigma^*$ in P mit $A = \exists B$ existiert, d.h. es gibt ein Polynom q mit

$$x \in A \Leftrightarrow \exists y \in \{0,1\}^{q(|x|)} : x\#y \in B.$$

Sei $m = \lceil \log_2 \|\Sigma\| \rceil$. Da die Binärsprache

$$B' = \{bin_m(x_1) \cdots bin_m(x_n) bin_m(\#) y \,|\, x_1 \cdots x_n \# y \in B\}$$

in P entscheidbar ist, existiert nach Korollar 49 eine FL-Funktion f, die einen Schaltkreis $f(1^n) = c_n$ mit $m(n+1) + q(n)$ Eingängen berechnet, so dass für alle $z \in \{0,1\}^{m(n+1)+q(n)}$ gilt:

$$z \in B' \Leftrightarrow c_n(z) = 1.$$

Betrachte nun die Funktion g, die bei Eingabe x den Schaltkreis c_x ausgibt, der sich aus c_n dadurch ergibt, dass die ersten $m(n+1)$ Input-Gatter durch konstante Gatter mit den durch $bin_m(x_1) \cdots bin_m(x_n) bin_m(\#)$ vorgegebenen Werten ersetzt werden. Dann ist auch g in FL berechenbar und es gilt für alle Eingaben x, $|x| = n$,

$$\begin{aligned} x \in A &\Leftrightarrow \exists y \in \{0,1\}^{q(n)} : x\#y \in B \\ &\Leftrightarrow \exists y \in \{0,1\}^{q(n)} : c_n(bin_m(x_1) \cdots bin_m(x_n) bin_m(\#) y) = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists y \in \{0,1\}^{q(n)} : c_x(y) = 1 \\ &\Leftrightarrow c_x \in \text{CirSat}. \end{aligned}$$

■

Als nächstes zeigen wir, dass auch Sat NP-vollständig ist, indem wir CirSat auf Sat reduzieren. Tatsächlich können wir CirSat sogar auf ein Teilproblem von Sat reduzieren.

Definition 58. *Eine boolesche Formel F über den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ ist in **konjunktiver Normalform** (kurz **KNF**), falls F eine Konjunktion*

$$F = \bigwedge_{i=1}^{m} C_i$$

*von Disjunktionen $C_i = \bigvee_{j=1}^{k_i} l_{ij}$ von **Literalen** $l_{ij} \in \{x_1, \ldots, x_n, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ ist. Hierbei verwenden wir $\bar{x}$ als abkürzende Schreibweise für $\neg x$. Gilt $k_i \leq k$ für $i = 1, \ldots, m$, so heißt F in **k-KNF**.*

Eine Disjunktion $C = \bigvee_{j=1}^{k} l_j$ von Literalen wird auch als **Klausel** bezeichnet. Klauseln werden meist als Menge $C = \{l_1, \ldots, l_k\}$ der zugehörigen Literale und KNF-Formeln als Menge $F = \{C_1, \ldots, C_m\}$ ihrer Klauseln dargestellt.

Erfüllbarkeitsproblem für k-KNF Formeln (k-Sat):

Gegeben: Eine boolesche Formel in k-KNF.
Gefragt: Ist F erfüllbar?

Beispiel 59. *Die Formel $F = (x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)$ ist in 3-KNF und lässt sich in Mengennotation durch $F = \{\{x_1, \bar{x}_2\}, \{\bar{x}_1, x_3\}, \{x_2, \bar{x}_3, x_4\}\}$ beschreiben. F ist offensichtlich erfüllbar, da in jeder Klausel ein positives Literal vorkommt.* ◁

Satz 60. 3-Sat *ist* NP*-vollständig.*

Beweis. Es ist leicht zu sehen, dass 3-Sat $\in$ NP ist. Um 3-Sat als hart für NP nachzuweisen, reicht es aufgrund der Transitivität von $\leq$ CirSat auf 3-Sat zu reduzieren.

Idee: Wir transformieren einen Schaltkreis $c = \{g_1, \ldots, g_m\}$ mit n Eingängen in eine 3-KNF-Formel F_c mit $n + m$ Variablen

$x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$, wobei y_i den Wert des Gatters g_i wiedergibt. Konkret enthält F_c für jedes Gatter g_i folgende Klauseln:

Gatter g_i	zugeh. Klauseln	Semantik
0	$\{\bar{y}_i\}$	$y_i = 0$
1	$\{y_i\}$	$y_i = 1$
x_j	$\{\bar{y}_i, x_j\}, \{\bar{x}_j, y_i\}$	$y_i \leftrightarrow x_j$
$(\neg, j)$	$\{\bar{y}_i, \bar{y}_j\}, \{y_j, y_i\}$	$y_i \leftrightarrow \bar{y}_j$
$(\wedge, j, k)$	$\{\bar{y}_i, y_j\}, \{\bar{y}_i, y_k\}, \{\bar{y}_j, \bar{y}_k, y_i\}$	$y_i \leftrightarrow y_j \wedge y_k$
$(\vee, j, k)$	$\{\bar{y}_j, y_i\}, \{\bar{y}_k, y_i\}, \{\bar{y}_i, y_j, y_k\}$	$y_i \leftrightarrow y_j \vee y_k$

Außerdem fügen wir noch die Klausel $\{y_m\}$ zu F_c hinzu. Nun ist leicht zu sehen, dass für alle $x \in \{0,1\}^n$ die Äquivalenz

$$c(x) = 1 \Leftrightarrow \exists y \in \{0,1\}^m : F_c(x, y) = 1$$

gilt. Dies bedeutet jedoch, dass der Schaltkreis c und die 3-KNF-Formel F_c erfüllbarkeitsäquivalent sind, d.h.

$$c \in \textsc{CirSat} \Leftrightarrow F_c \in \text{3-}\textsc{Sat}.$$

Zudem ist leicht zu sehen, dass die Reduktion $c \mapsto F_c$ in FL berechenbar ist. ■

3-Sat ist also nicht in Polynomialzeit entscheidbar, außer wenn $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$ ist. Am Ende dieses Abschnitts werden wir sehen, dass dagegen 2-Sat effizient entscheidbar ist. Zunächst betrachten wir folgende Variante von 3-Sat.

Not-All-Equal-Satisfiability (NaeSat):

Gegeben: Eine Formel F in 3-KNF.
Gefragt: Existiert eine Belegung für F, unter der in jeder Klausel beide Wahrheitswerte angenommen werden?

Satz 61. NaeSat $\in \mathsf{NPC}$.

Beweis. NaeSat $\in \mathsf{NP}$ ist klar. Wir zeigen CirSat $\leq$ NaeSat durch eine leichte Modifikation der Reduktion $C(x_1, \ldots, x_n) \mapsto F_c(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ von CirSat auf 3-Sat:

> Sei $F'_c(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, z)$ die 3-KNF Formel, die aus F_c dadurch entsteht, dass wir zu jeder Klausel mit ≤ 2 Literalen die neue Variable z hinzufügen.

Dann ist die Reduktion $f : c \mapsto F'_c$ in FL berechenbar. Es bleibt also nur noch die Korrektheit von f zu zeigen, d.h.

$$c \in \textsc{CirSat} \Leftrightarrow F'_c \in \textsc{NaeSat}.$$

Ist $c = (g_1, \ldots, g_m) \in$ CirSat, so existiert eine Eingabe $x \in \{0,1\}^n$ mit $c(x) = 1$. Wir betrachten die Belegung $a = xyz \in \{0,1\}^{n+m+1}$ mit $y = y_1 \ldots y_m$, wobei $y_i = g_i(x)$ und $z = 0$. Da $F_c(xy) = 1$ ist, enthält jede Klausel von F_c (und damit auch von F'_c) mindestens ein wahres Literal. Wegen $z = 0$ müssen wir nur noch zeigen, dass nicht alle Literale in den Dreierklauseln von F_c unter a wahr werden. Da a jedoch für jedes oder-Gatter $g_i = (\vee, j, k)$ die drei Klauseln

$$\{\bar{y}_i, y_j, y_k\}, \{\bar{y}_j, y_i\}, \{\bar{y}_k, y_i\}$$

und für jedes und-Gatter $g_i = (\wedge, j, k)$ die drei Klauseln

$$\{y_i, \bar{y}_j, \bar{y}_k\}, \{y_j, \bar{y}_i\}, \{y_k, \bar{y}_j\}$$

erfüllt, kann weder $y_i = 0$ und $y_j = y_k = 1$ noch $y_i = 1$ und $y_j = y_k = 0$ gelten, da im ersten Fall die Klausel $\{\bar{y}_j, y_i\}$ und im zweiten Fall die Klausel $\{y_j, \bar{y}_i\}$ falsch wäre.

Ist umgekehrt $F'_c \in$ NaeSat, so existiert eine Belegung $xyz \in \{0,1\}^{n+m+1}$ unter der in jeder Klausel von F'_c beide Wahrheitswerte vorkommen. Da dies dann auch auf die Belegung $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ zutrifft, können wir $z = 0$ annehmen. Dann erfüllt aber die Belegung xy die Formel F_c. ■

Definition 62. *Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.*

a) *Eine Menge $C \subseteq V$ heißt **Clique** in G, falls für alle $u, v \in C$ mit $u \neq v$ gilt: $\{u, v\} \in E$.*

b) *$I \subseteq V$ heißt **unabhängig** (oder **stabil**), falls für alle $u, v \in I$ gilt: $\{u, v\} \notin E$.*

c) *$K \subseteq V$ heißt **Kantenüberdeckung**, falls für alle $e \in E$ gilt: $e \cap K \neq \emptyset$.*

Für einen gegebenen Graphen G und eine Zahl k betrachten wir die folgenden Fragestellungen:

Clique: Besitzt G eine Clique der Größe k?

Independent Set (IS): Besitzt G eine stabile Menge der Größe k?

Vertex Cover (VC): Besitzt G eine Kantenüberdeckung der Größe k?

Satz 63. IS *ist* NP*-vollständig.*

Beweis. Wir reduzieren 3-SAT auf IS. Sei

$$F = \{C_1, \ldots, C_m\} \text{ mit } C_i = \{l_{i,1}, \ldots, l_{i,k_i}\} \text{ und } k_i \leq 3 \text{ für } i = 1, \ldots, m$$

eine 3-KNF-Formel über den Variablen $x_1, \ldots, x_n$. Betrachte den Graphen $G = (V, E)$ mit

$$\begin{aligned} V &= \{v_{ij} \,|\, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k_i\} \\ E &= \{\{v_{ij}, v_{ij'}\} \,|\, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j < j' \leq k_i\} \\ &\quad \cup \{\{v_{s,t}, v_{u,v}\} \,|\, l_{st} \text{ und } l_{uv} \text{ sind komplementär}\}. \end{aligned}$$

Dabei heißen zwei Literale **komplementär**, wenn das eine die Negation des anderen ist. Nun gilt

$$\begin{aligned} F \in \text{3-SAT} &\Leftrightarrow \text{es gibt eine Belegung, die in jeder Klausel } C_i \text{ mindestens ein Literal wahr macht} \\ &\Leftrightarrow \text{es gibt } m \text{ Literale } l_{1,j_1}, \ldots, l_{m,j_m}, \text{ die paarweise nicht komplementär sind} \\ &\Leftrightarrow \text{es gibt } m \text{ Knoten } v_{1,j_1}, \ldots, v_{m,j_m}, \text{ die nicht durch Kanten verbunden sind} \\ &\Leftrightarrow G \text{ besitzt eine stabile Knotenmenge der Größe } m. \end{aligned}$$

■

Korollar 64. CLIQUE *ist* NP*-vollständig.*

Beweis. Es ist leicht zu sehen, dass jede Clique in einem Graphen $G = (V, E)$ eine stabile Menge in dem zu G komplementären Graphen $\bar{G} = (V, E')$ mit $E' = \binom{V}{2} \setminus E$ ist und umgekehrt. Daher lässt sich IS mittels der Reduktionsfunktion

$$f : (G, k) \mapsto (\bar{G}, k)$$

auf CLIQUE reduzieren. ■

Korollar 65. VC *ist* NP*-vollständig.*

Beweis. Offensichtlich ist eine Menge I genau dann stabil, wenn ihr Komplement $V \setminus I$ eine Kantenüberdeckung ist. Daher lässt sich IS mittels der Reduktionsfunktion

$$f : (G, k) \mapsto (G, n - k)$$

auf VC reduzieren, wobei $n = \|V\|$ die Anzahl der Knoten in G ist. ■

5.4 NL-vollständige Probleme

In diesem Abschnitt präsentieren wir einen effizienten Algorithmus für das 2-SAT-Problem.

Satz 66. 2-SAT $\in$ NL.

Beweis. Sei F eine 2-KNF-Formel über den Variablen $x_1, \ldots, x_n$. Betrachte den Graphen $G = (V, E)$ mit

$$V = \{x_1, \ldots, x_n, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\},$$

der für jede Zweierklausel $\{l_1, l_2\}$ von F die beiden Kanten $(\bar{l}_1, l_2)$ und $(\bar{l}_2, l_1)$ und für jede Einerklausel $\{l\}$ die Kante $(\bar{l}, l)$ enthält. Hierbei sei $\bar{\bar{x}}_i = x_i$. Aufgrund der Konstruktion von G ist klar, dass

$(*)$ eine Belegung α genau dann F erfüllt, wenn für jede Kante $(l, l') \in E$ mit $\alpha(l) = 1$ auch $\alpha(l') = 1$ ist, und

$(**)$ l' von l aus genau dann erreichbar ist, wenn $\bar{l}$ von $\bar{l}'$ aus erreichbar ist.

Behauptung 67. *F ist genau dann erfüllbar, wenn für keinen Knoten x_i in G ein Pfad von x_i über $\bar{x}_i$ zurück nach x_i existiert.*

Eine NL-Maschine kann bei Eingabe einer 2-KNF Formel F eine Variable x_i und einen Pfad von x_i über $\bar{x}_i$ zurück nach x_i raten. Daher folgt aus der Behauptung, dass das Komplement von 2-SAT in NL ist. Wegen NL = co-NL folgt auch 2-SAT $\in$ NL.

Nun zum Beweis der Behauptung. Wenn in G ein Pfad von x_i über $\bar{x}_i$ nach x_i existiert, kann F nicht erfüllbar sein, da wegen $(*)$ jede erfüllende Belegung, die x_i (bzw. $\bar{x}_i$) den Wert 1 zuweist, auch $\bar{x}_i$ (bzw. x_i) diesen Wert zuweisen müsste. Existiert dagegen kein derartiger Pfad, so lässt sich für F wie folgt eine erfüllende Belegung α konstruieren:

1) Wähle einen beliebigen Knoten l aus G, für den $\alpha(l)$ noch undefiniert ist. Falls $\bar{l}$ von l aus erreichbar ist, ersetze l durch $\bar{l}$ (dies garantiert, dass $\bar{l}$ von l aus nun nicht mehr erreichbar ist).
2) Weise jedem von l aus erreichbaren Knoten l' den Wert 1 (und $\bar{l}'$ den Wert 0) zu.
3) Falls α noch nicht auf allen Knoten definiert ist, gehe zu 1).

Wegen $(**)$ treten bei der Ausführung von 2) keine Konflikte auf:

- Hätte l' in einer früheren Runde den Wert 0 erhalten, dann hätte in dieser Runde $\bar{l}'$ und somit auch $\bar{l}$ den Wert 1 erhalten, was der Wahl von l widerspricht.
- Wäre von l aus auch $\bar{l}'$ erreichbar, dann würde ein Pfad von l über $\bar{l}'$ nach $\bar{l}$ existieren, was durch die Wahl von l ebenfalls ausgeschlossen ist.

Zudem erfüllt α die Formel F, da für jede Kante $(l, l') \in E$ mit $\alpha(l) = 1$ auch $\alpha(l') = 1$ ist. ■

In den Übungen werden wir sehen, dass 2-SAT und REACH NL-vollständig sind.

6 Probabilistische Berechnungen

Eine **probabilistische Turingmaschine (PM)** M ist genau so definiert wie eine NTM. Es wird jedoch ein anderes Akzeptanzkriterium benutzt. Wir stellen uns vor, dass M in jedem Rechenschritt zufällig einen Konfigurationsübergang wählt. Dabei wird jeder mögliche Übergang $K \to_M K'$ mit derselben Wahrscheinlichkeit

$$\Pr[K \to_M K'] = \begin{cases} \|\{K'' | K \to_M K''\}\|^{-1}, & K \to_M K' \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

gewählt. Eine Rechnung $\alpha = (K_1, K_2, \ldots, K_m)$ wird also mit der Wahrscheinlichkeit

$$\Pr[\alpha] \;=\; \Pr[K_1 \to_M K_2 \to_M \cdots \to_M K_m] \;=\; \prod_{i=1}^{m-1} \Pr[K_i \to_M K_{i+1}]$$

ausgeführt. Die **Akzeptanzwahrscheinlichkeit** von $M(x)$ ist

$$\Pr[M(x) \text{ akz.}] = \sum_{\alpha} \Pr[\alpha],$$

wobei sich die Summation über alle akzeptierenden Rechnungen α von $M(x)$ erstreckt. Wir vereinbaren für PMs, dass $M(x)$ am Ende jeder haltenden Rechnung entweder akzeptiert (hierfür schreiben wir kurz $M(x) = 1$) oder verwirft ($M(x) = 0$) oder „?“ ausgibt ($M(x) = ?$). Die von einer PM M akzeptierte Sprache ist

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \,|\, \Pr[M(x) = 1] \geq 1/2\}.$$

6.1 Die Klassen PP, BPP, RP und ZPP

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ gehört zur Klasse PP (probabilistic polynomial time), falls eine polynomiell zeitbeschränkte PM (PPTM) M mit $L(M) = L$ existiert.

Satz 68. co-NP $\subseteq$ PP.

Beweis. Sei $L \in$ co-NP und sei N eine polynomiell zeitbeschränkte NTM mit $L(N) = \bar{L}$. Ersetzen wir in N den Zustand q_{ja} durch q_{nein} bzw. q_{nein} und q_{h} durch q_{ja} und fassen wir N als PPTM auf, so gilt für alle $x \in \Sigma^*$,

$$\begin{aligned} x \in L &\;\Rightarrow\; \Pr[N(x) = 1] = 1, \\ x \notin L &\;\Rightarrow\; \Pr[N(x) = 1] < 1. \end{aligned}$$

Betrachte folgende PPTM M, die bei Eingabe x zufällig eine der beiden folgenden Möglichkeiten wählt:

- M verwirft sofort,
- M simuliert N bei Eingabe x.

Dann gilt für alle $x \in \Sigma^*$,

$$\Pr[M(x) = 1] = \Pr[N(x) = 1]/2$$

und somit

$$\begin{aligned} x \in L &\;\Rightarrow\; \Pr[M(x) = 1] = 1/2, \\ x \notin L &\;\Rightarrow\; \Pr[M(x) = 1] < 1/2. \end{aligned}$$

■

Als nächstes zeigen wir, dass PP unter Komplementbildung abgeschlossen ist. Das folgende Lemma zeigt, wie sich eine PPTM, die sich bei manchen Eingaben indifferent verhält (also genau mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ akzeptiert) in eine äquivalente PPTM verwandeln lässt, die dies nicht tut.

Lemma 69. *Für jede Sprache $L \in \mathsf{PP}$ existiert eine* PPTM M *mit $L(M) = L$, die bei keiner Eingabe $x \in \Sigma^*$ mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ akzeptiert, d.h. für alle x gilt*

$$\Pr[M(x) \neq L(x)] < 1/2,$$

wobei $L(x)$ für alle $x \in L$ gleich 1 und für alle $x \notin L$ gleich 0 ist.

Beweis. Sei $L \in \mathsf{PP}$ und sei N eine PPTM mit $L(N) = L$. Weiter sei p eine polynomielle Zeitschranke und $c \geq 2$ der maximale Verzweigungsgrad von N. Da $\Pr[N(x) = 1]$ nur Werte der Form $i/k^{-p(|x|)}$ für $k = \mathrm{kgV}(2, \ldots, c)$ annehmen kann, folgt für $\epsilon(x) = k^{-p(|x|)}$,

$$\begin{aligned} x \in L &\Rightarrow \Pr[N(x) = 1] \geq 1/2, \\ x \notin L &\Rightarrow \Pr[N(x) = 1] \leq 1/2 - \epsilon(x). \end{aligned}$$

Sei N' eine PPTM mit $\Pr[N'(x) = 1] = 1/2 + \epsilon(x)/2$ und betrachte die PPTM M, die bei Eingabe x zufällig wählt, ob sie N oder N' bei Eingabe x simuliert. Dann gilt

$$\Pr[M(x) = 1] = \frac{\Pr[N(x) = 1] + \Pr[N'(x) = 1]}{2}$$

und somit

$$\begin{aligned} x \in L &\Rightarrow \Pr[M(x) = 1] \geq \frac{1/2 + 1/2 + \epsilon(x)/2}{2} > 1/2 \\ x \notin L &\Rightarrow \Pr[M(x) = 1] \leq \frac{1/2 - \epsilon(x) + 1/2 + \epsilon(x)/2}{2} < 1/2. \end{aligned}$$

■

Eine direkte Folgerung von Lemma 69 ist der Komplementabschluss von PP.

Korollar 70. $\mathsf{PP} = \mathsf{co\text{-}PP}$.

Tatsächlich liefert Lemma 69 sogar den Abschluss von PP unter symmetrischer Differenz.

Satz 71. PP *ist unter symmetrischer Differenz abgeschlossen, d.h.*

$$L_1, L_2 \in \mathsf{PP} \Rightarrow L_1 \triangle L_2 = (L_1 \setminus L_2) \cup (L_2 \setminus L_1) \in \mathsf{PP}.$$

Beweis. Nach obigem Lemma existieren PPTMs M_1 und M_2 mit

$$\begin{aligned} x \in L_i &\Rightarrow \Pr[M_i(x) = 1] = 1/2 + \epsilon_i, \\ x \notin L_i &\Rightarrow \Pr[M_i(x) = 1] = 1/2 - \epsilon_i. \end{aligned}$$

wobei $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ sind und von x abhängen dürfen. Dann hat die PPTM M, die bei Eingabe x zunächst $M_1(x)$ und dann $M_2(x)$ simuliert und nur dann akzeptiert, wenn dies genau eine der beiden Maschinen tut, eine Akzeptanzwk von

$$\Pr[M_1(x) = 1] \cdot \Pr[M_2(x) = 0] + \Pr[M_1(x) = 0] \cdot \Pr[M_2(x) = 1].$$

Folglich akzeptiert M alle Eingaben $x \in (L_1 \setminus L_2) \cup (L_2 \setminus L_1)$ mit Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} \Pr[M(x) = 1] &= (1/2 + \epsilon_1)(1/2 + \epsilon_2) + (1/2 - \epsilon_1)(1/2 - \epsilon_2) \\ &= (1/2 + 2\epsilon_1\epsilon_2) > 1/2 \end{aligned}$$

und alle Eingaben $x \in (L_1 \cap L_2) \cup \overline{L_1 \cup L_2}$ mit Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} \Pr[M(x) = 1] &= (1/2 + \epsilon_1)(1/2 - \epsilon_2) + (1/2 - \epsilon_1)(1/2 + \epsilon_2) \\ &= (1/2 - 2\epsilon_1\epsilon_2) < 1/2. \end{aligned}$$

■

Anfang der 90er Jahre konnte auch der Abschluss von PP unter Schnitt und Vereinigung bewiesen werden. In den Übungen werden wir sehen, dass folgendes Problem PP-vollständig ist.

MajoritySat (MajSat):

Gegeben: Eine boolsche Formel $F(x_1, \ldots, x_n)$.
Gefragt: Wird F von mindestens der Hälfte aller 2^n Belegungen erfüllt?

Definition 72. *Sei M eine* PPTM *und sei $L = L(M)$. M heißt*

- BPPTM, *falls für alle x gilt:* $\Pr[M(x) \neq L(x)] \leq 1/3$,
- RPTM, *falls für alle $x \notin L$ gilt:* $\Pr[M(x) = 1] = 0$,
- ZPPTM, *falls für alle x gilt:* $\Pr[M(x) = \bar{L}(x)] = 0$ *und* $\Pr[M(x) = ?] \leq 1/2$.

Die Klasse BPP *(bounded error probabilistic polynomial time) enthält alle Sprachen, die von einer* BPPTM *akzeptiert werden. Entsprechend sind die Klassen* RP *(random polynomial time) und* ZPP *(zero error probabilistic polynomial time) definiert.*

Man beachte, dass wir im Falle einer RPTM oder BPPTM M o.B.d.A. davon ausgehen können, dass M niemals ? ausgibt. Allerdings ist nicht ausgeschlossen, dass M ein falsches Ergebnis $M(x) = \bar{L}(x)$ liefert. Probabilistische Algorithmen mit dieser Eigenschaft werden auch als **Monte Carlo Algorithmen** bezeichnet. Im Unterschied zu einer BPPTM, die bei allen Eingaben x „lügen“ kann, ist dies einer RPTM nur im Fall $x \in L$ erlaubt. Man spricht hier auch von **ein-** bzw. **zweiseitigem Fehler**. Eine ZPPTM M darf dagegen überhaupt keine Fehler machen. Algorithmen von diesem Typ werden als **Las Vegas Algorithmen** bezeichnet.

Satz 73. $\mathsf{ZPP} = \mathsf{RP} \cap \mathsf{co\text{-}RP}$.

Beweis. Die Inklusion von links nach rechts ist klar. Für die umgekehrte Richtung sei L eine Sprache in $\mathsf{RP} \cap \mathsf{co\text{-}RP}$. Dann existieren RPTMs M_1 und M_2 für L und $\overline{L}$, wobei wir annehmen, dass M_1 und M_2 niemals ? ausgeben. Weiter sei $\overline{M}_2$ die PPTM, die aus M_2 durch Vertauschen von q_{ja} und q_{nein} hervorgeht. Dann gilt

$$\begin{aligned} x \in L &\Rightarrow \Pr[M_1(x) = 1] \geq 1/2 \wedge \Pr[\overline{M}_2(x) = 1] = 1, \\ x \notin L &\Rightarrow \Pr[M_1(x) = 0] = 1 \wedge \Pr[\overline{M}_2(x) = 0] \geq 1/2. \end{aligned}$$

M_1 kann also nur Eingaben $x \in L$ akzeptieren, während $\overline{M}_2$ nur Eingaben $x \notin L$ verwerfen kann. Daher kann die Kombination $M_1(x) = 1$ und $\overline{M}_2(x) = 0$ nicht auftreten. Weiter ergeben sich hieraus für die PPTM M, die bei Eingabe x die beiden PPTMs $M_1(x)$ und $\overline{M}_2(x)$ simuliert und sich gemäß der Tabelle

	$M_1(x) = 1$	$M_1(x) = 0$
$\overline{M}_2(x) = 1$	1	?
$\overline{M}_2(x) = 0$	–	0

verhält, folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} M(x) = 1 &\Leftrightarrow M_1(x) = 1, \\ M(x) = 0 &\Leftrightarrow \overline{M}_2(x) = 0. \end{aligned}$$

Nun ist leicht zu sehen, dass folgende Implikationen gelten:

$$\begin{aligned} x \in L &\Rightarrow \Pr[M(x) = 1] = \Pr[M_1(x) = 1] \geq 1/2 \text{ und} \\ &\quad\ \Pr[M(x) = 0] = \Pr[\overline{M}_2(x) = 0] = 0 \\ x \notin L &\Rightarrow \Pr[M(x) = 0] = \Pr[\overline{M}_2(x) = 0] \geq 1/2 \text{ und} \\ &\quad\ \Pr[M(x) = 1] = \Pr[M_1(x) = 1] = 0. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass M eine ZPPTM für L ist, da für alle Eingaben x gilt:

$$\Pr[M(x) = \bar{L}(x)] = 0 \text{ und } \Pr[M(x) = ?] \leq 1/2.$$

■

6.2 Anzahl-Operatoren

Definition 74 (Anzahlklassen)**.** *Sei* C *eine Sprachklasse und sei $B \subseteq \Sigma^*$ eine p-balancierte Sprache in* C*. Durch B werden die Funktion $\#B : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ mit*

$$\#B(x) = \|\{y \in \{0,1\}^* \,|\, x\#y \in B\}\|$$

und folgende Sprachen definiert (n bezeichnet die Länge von x):

$$\begin{aligned}\exists^p B &= \{x \in \Sigma^* \,|\, \#B(x) > 0\},\\ \forall^p B &= \{x \in \Sigma^* \,|\, \#B(x) = 2^{p(n)}\},\\ \exists^{\geq 1/2} B &= \{x \in \Sigma^* \,|\, \#B(x) \geq 2^{p(n)-1}\}\\ \oplus B &= \{x \in \Sigma^* \,|\, \#B(x) \textit{ ist ungerade}\}.\end{aligned}$$

Für $\mathsf{Op} \in \{\#, \exists^p, \forall^p, \exists^{\geq 1/2}, \oplus\}$ *sei*

$$\mathsf{Op} \cdot \mathsf{C} = \{\mathsf{Op}B \,|\, B \in \mathsf{C} \textit{ ist balanciert}\}$$

die durch Anwendung des Operators Op *auf* C *definierte Funktionen- bzw. Sprachklasse. Zudem definieren wir die Operatoren* R *und* BP *durch*

$$\mathsf{R} \cdot \mathsf{C} = \{\exists^{\geq 1/2} B \,|\, B \in \mathsf{C} \textit{ ist einseitig}\}$$

und

$$\mathsf{BP} \cdot \mathsf{C} = \{\exists^{\geq 1/2} B \,|\, B \in \mathsf{C} \textit{ ist zweiseitig}\}.$$

Dabei heißt eine p-balancierte Sprache B ***einseitig****, falls* $\#B(x)$ *für keine Eingabe x einen Wert in* $[1, 2^{p(n)-1} - 1]$ *und* ***zweiseitig****, falls* $\#B(x)$ *für kein x einen Wert in* $(2^{p(n)}/3, 2^{p(n)+1}/3)$ *annimmt.*

Wir wissen bereits, dass $\exists^p \cdot \mathsf{P} = \mathsf{NP}$ und $\forall^p \cdot \mathsf{P} = \mathsf{co\text{-}NP}$ ist. Als nächstes zeigen wir, dass $\mathsf{R} \cdot \mathsf{P} = \mathsf{RP}$, $\exists^{\geq 1/2} \cdot \mathsf{P} = \mathsf{PP}$ und $\mathsf{BP} \cdot \mathsf{P} = \mathsf{BPP}$ ist.

Lemma 75. *Sei M eine* PPTM. *Dann existieren ein Polynom q und q-balancierte Sprachen* $B, B' \in \mathsf{P}$*, so dass für alle Eingaben x,* $|x| = n$*, gilt:*

$$\#B(x)/2^{q(n)} = \alpha_n \Pr[M(x) = 1] \textit{ und} \tag{6.1}$$

$$\#B'(x)/2^{q(n)} - 1/2 = \alpha_n(\Pr[M(x) = 1] - 1/2), \tag{6.2}$$

wobei $\alpha_n \in (1/2, 1]$ *ist.*

Beweis. Sei p eine polynomielle Zeitschranke für M und sei $k = \mathrm{kgV}(2, 3, \ldots, c)$, wobei $c \geq 1$ der maximale Verzweigungsgrad von M ist. Sei x eine Eingabe der Länge n. Wir ordnen jeder Folge $r = r_1 \cdots r_{p(n)}$ aus der Menge $R_n = \{0, \ldots, k-1\}^{p(n)}$ eindeutig eine Rechnung von $M(x)$ zu, indem wir im i-ten Rechenschritt aus den c_i zur Auswahl stehenden Folgekonfigurationen $K_0, \ldots, K_{c_i - 1}$ die $(r_i \bmod c_i)$-te wählen. Bezeichnen wir das Ergebnis der so beschriebenen Rechnung mit $M_r(x)$, so gilt

$$\Pr[M(x) = 1] = \Pr_{r \in_R R_n}[M_r(x) = 1].$$

Sei nun $q(n) = \lceil \log_2(k^{p(n)}) \rceil$ und $\alpha_n = k^{p(n)}/2^{q(n)}$. Dann können wir die ersten $k^{p(n)}$ Strings $y \in \{0,1\}^{q(n)}$ zur Kodierung der Folgen $r \in R_n$ verwenden und für $M_r(x)$ auch $M_y(x)$ schreiben. Sei D_n die Menge der ersten $k^{p(n)}$ Strings in $\{0,1\}^{q(n)}$ und sei $D'_n = \{0,1\}^{q(n)} \setminus D_n$. Betrachte nun die Sprachen

$$\begin{aligned}B &= \{x\#y \,|\, y \in D_n \text{ und } M_y(x) = 1\} \text{ und}\\ B' &= B \cup \{x\#y \,|\, y \in D'_n \text{ und } y \text{ endet mit } 0\}.\end{aligned}$$

Dann gilt für ein zufällig aus $\{0,1\}^{q(n)}$ gewähltes y:

$$\#B(x) = k^{p(n)} \Pr[M(x) = 1] = \alpha_n 2^{q(n)} \Pr[M(x) = 1].$$

Da D_n mehr als die Hälfte aller Strings der Länge $q(n)$ enthält, ist $2^{q(n)-1} < k^{p(n)} \leq 2^{q(n)}$ und somit $1/2 < \alpha_n \leq 1$, woraus (6.1) folgt. Da zudem $2^{q(n)} - k^{p(n)}$ gerade ist, enthält die Sprache B' für genau die Hälfte der Strings $y \in D'_n$ das Wort $x\#y$. Daher ist

$$\begin{aligned}\#B'(x) &= \#B(x) + 1/2(2^{q(n)} - k^{p(n)})\\ &= \alpha_n 2^{q(n)} \Pr[M(x) = 1] + 1/2(2^{q(n)} - k^{p(n)})\\ &= \alpha_n 2^{q(n)}(\Pr[M(x) = 1] - 1/2) + 2^{q(n)-1},\end{aligned}$$

woraus auch (6.2) folgt. ∎

Satz 76. $\exists^{\geq 1/2} \cdot \mathsf{P} = \mathsf{PP}$, $\mathsf{BP} \cdot \mathsf{P} = \mathsf{BPP}$ *und* $\mathsf{R} \cdot \mathsf{P} = \mathsf{RP}$.

Beweis. Die Inklusionen $\exists^{\geq 1/2} \cdot \mathsf{P} \subseteq \mathsf{PP}$, $\mathsf{BP} \cdot \mathsf{P} \subseteq \mathsf{BPP}$ und $\mathsf{R} \cdot \mathsf{P} \subseteq \mathsf{RP}$ sind klar.

Zum Nachweis von $\mathsf{PP} \subseteq \exists^{\geq 1/2} \cdot \mathsf{P}$ sei $L \in \mathsf{PP}$ und M eine PPTM für L. Nach Lemma 75 existieren ein Polynom q und eine q-balancierte Sprache $B' \in \mathsf{P}$, so dass für alle Eingaben x, $|x| = n$, gilt:

$$x \in L \Rightarrow \Pr[M(x) = 1] - 1/2 \geq 0 \Rightarrow \#B'(x) \geq 2^{q(n)-1},$$
$$x \notin L \Rightarrow \Pr[M(x) = 1] - 1/2 < 0 \Rightarrow \#B'(x) < 2^{q(n)-1},$$

also $L = \exists^{\geq 1/2} B' \in \exists^{\geq 1/2} \cdot \mathsf{P}$.

Zum Nachweis von $\mathsf{BPP} \subseteq \mathsf{BP} \cdot \mathsf{P}$ sei $L \in \mathsf{BPP}$ und M eine BPPTM für L. Nach Lemma 75 existieren ein Polynom q und eine q-balancierte Sprache $B' \in \mathsf{P}$, so dass für alle Eingaben x, $|x| = n$, gilt:

$$x \in L \Rightarrow \Pr[M(x) = 1] - 1/2 \geq 1/6 \Rightarrow \Pr_{y \in_R \{0,1\}^{q(n)}}[x\#y \in B'] \geq 7/12,$$
$$x \notin L \Rightarrow \Pr[M(x) = 1] - 1/2 \leq 1/6 \Rightarrow \Pr_{y \in_R \{0,1\}^{q(n)}}[x\#y \in B'] \leq 5/12,$$

also $L = \exists^{\geq 1/2} B' \in \mathsf{BP}' \cdot \mathsf{P} = \mathsf{BP} \cdot \mathsf{P}$ (siehe Übungen).

Zum Nachweis von $\mathsf{RP} \subseteq \mathsf{R} \cdot \mathsf{P}$ sei $L \in \mathsf{RP}$ und M eine RPTM für L. Nach Lemma 75 existieren ein Polynom q und eine q-balancierte Sprache $B \in \mathsf{P}$, so dass für alle Eingaben x, $|x| = n$, gilt:

$$x \in L \;\Rightarrow\; \Pr[M(x) = 1] \geq 1/2 \;\Rightarrow\; \#B(x) \geq 2^{q(n)}/4,$$
$$x \notin L \;\Rightarrow\; \Pr[M(x) = 1] = 0 \;\Rightarrow\; \#B(x) = 0.$$

Betrachte nun die $3q$-balancierte Sprache

$$B'' = \{x\#uvw \,|\, u, v, w \in \{0,1\}^{q(n)}, \exists y \in \{u, v, w\} : x\#y \in B\}.$$

Da für alle Eingaben x, $|x| = n$, die Implikationen

$$x \in L \;\Rightarrow\; \Pr_{z \in_R \{0,1\}^{3q(n)}}[x\#z \in B''] \geq 1 - (3/4)^3 > 1/2,$$
$$x \notin L \;\Rightarrow\; \Pr_{z \in_R \{0,1\}^{3q(n)}}[x\#z \in B''] = 0$$

gelten, ist B'' einseitig und es folgt $L = \exists^{\geq 1/2} B'' \in \mathsf{R} \cdot \mathsf{P}$. ∎

6.3 Reduktion der Fehlerwahrscheinlichkeit

In diesem Abschnitt zeigen wir, wie sich für RP-, ZPP- und BPP-Maschinen M die Wahrscheinlichkeit $\Pr[M(x) \neq A(x)]$ für ein inkorrektes oder indifferentes Ergebnis für ein beliebiges Polynom q auf einen exponentiell kleinen Wert $2^{-q(|x|)}$ reduzieren lässt.

Definition 77. *A ist auf B **disjunktiv reduzierbar** (in Zeichen: $A \leq_d B$), falls eine Funktion $f \in \mathsf{FL}$ existiert, die für jedes Wort x eine Liste $\langle y_1, \ldots, y_m \rangle$ von Wörtern y_i berechnet mit*

$$x \in A \Leftrightarrow \exists i \in \{1, \ldots, m\} : y_i \in B.$$

*Der Begriff der **konjunktiven Reduzierbarkeit** ist analog definiert. Gilt dagegen*

$$x \in A \Leftrightarrow \|\{i \in \{1, \ldots, m\} \,|\, y_i \in B\} \geq m/2,$$

*so heißt A **majority-reduzierbar** auf B, wofür wir auch kurz $A \leq_{maj} B$ schreiben.*

Es ist leicht zu sehen, dass die Klassen P, NP und co-NP unter beiden Typen von Reduktionen abgeschlossen sind.

Satz 78. *Falls C unter disjunktiven Reduktionen abgeschlossen ist, existieren für jede Sprache $A \in \mathsf{R} \cdot \mathsf{C}$ und jedes Polynom q eine Sprache $B \in \mathsf{C}$ und ein Polynom r, so dass für alle x, $|x| = n$, gilt:*

$$x \in A \Rightarrow \Pr_{z \in_R \{0,1\}^{r(n)}}[B(x\#z) = 1] \geq 1 - 2^{-q(|x|)},$$
$$x \notin A \Rightarrow \Pr_{z \in_R \{0,1\}^{r(n)}}[B(x\#z) = 0] = 1.$$

Beweis. Sei $A \in \mathsf{R} \cdot \mathsf{C}$ und sei $B \in \mathsf{C}$ eine p-balancierte Sprache mit

$$x \in A \Rightarrow \Pr_{y \in_R \{0,1\}^{p(n)}}[B(x\#y) = 1] \geq 1/2,$$
$$x \notin A \Rightarrow \Pr_{y \in_R \{0,1\}^{p(n)}}[B(x\#y) = 0] = 1.$$

Dann ist die Sprache

$$B = \{x\#y_1 \cdots y_{q(n)} \,|\, y_1, \ldots, y_{q(n)} \in \{0,1\}^{p(n)}, \exists i : x\#y_i \in B\}$$

disjunktiv auf B reduzierbar und somit in C. Außerdem ist leicht zu sehen, dass B für $r(n) = p(n)q(n)$ die im Satz genannten Eigenschaften besitzt. ■

Korollar 79. *Für jedes Polynom q und jede Sprache $L \in \mathsf{RP}$ existiert eine* RPTM *M mit*

$$\begin{aligned} x \in L &\Rightarrow \Pr[M(x) = 1] \geq 1 - 2^{-q(|x|)}, \\ x \notin L &\Rightarrow \Pr[M(x) = 0] = 1. \end{aligned}$$

Ganz analog lässt sich die Zuverlässigkeit einer ZPPTM verbessern.

Korollar 80. *Für jedes Polynom q und jede Sprache $L \in \mathsf{ZPP}$ existiert eine* ZPPTM *M mit $L(M) = L$ und $\Pr[M(x) = ?] \leq 2^{-q(|x|)}$ für jede Eingabe x.*

Für die Reduktion der Fehlerwahrscheinlichkeit von BPPTMs benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 81. *Sei E ein Ereignis, das mit Wahrscheinlichkeit $1/2 - \epsilon$, $\epsilon > 0$, auftritt. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich E bei $m = 2t + 1$ unabhängigen Wiederholungen mehr als t-mal ereignet, höchstens $1/2(1 - 4\epsilon^2)^t$.*

Beweis. Für $i = 1, \ldots, m$ sei X_i die Indikatorvariable

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{Ereignis } E \text{ tritt beim } i\text{-ten Versuch ein,} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und X sei die Zufallsvariable $X = \sum_{i=1}^{m} X_i$. Dann ist X binomial verteilt mit Parametern m und $p = 1/2 - \epsilon$. Folglich gilt für $i > m/2$,

$$\begin{aligned} \Pr[X = i] &= \binom{m}{i} (1/2 - \epsilon)^i (1/2 + \epsilon)^{m-i} \\ &= \binom{m}{i} (1/2 - \epsilon)^{m/2} (1/2 + \epsilon)^{m/2} \left(\frac{1/2 - \epsilon}{1/2 + \epsilon}\right)^{i - m/2} \\ &\leq \binom{m}{i} \underbrace{(1/2 - \epsilon)^{m/2} (1/2 + \epsilon)^{m/2}}_{\left(1/4 - \epsilon^2\right)^{m/2}}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\sum_{i=t+1}^{m} \binom{m}{i} \leq 2^{m-1} = \frac{4^{m/2}}{2}$$

erhalten wir somit

$$\begin{aligned} \sum_{i=t+1}^{m} \Pr[X = i] &\leq \left(1/4 - \epsilon^2\right)^{m/2} \sum_{i=t+1}^{m} \binom{m}{i} \\ &\leq \frac{(1 - 4\epsilon^2)^{m/2}}{2} \leq \frac{(1 - 4\epsilon^2)^t}{2}. \end{aligned}$$

■

Satz 82. *Falls C unter majority-Reduktionen abgeschlossen ist, existieren für jede Sprache $A \in \mathsf{BP} \cdot \mathsf{C}$ und jedes Polynom q eine Sprache $B \in \mathsf{C}$ und ein Polynom r, so dass für alle x, $|x| = n$, gilt:*

$$\Pr_{z \in_R \{0,1\}^{r(n)}}[A(x) = B(x\#z)] \geq 1 - 2^{-q(n)}.$$

Beweis. Sei $A \in \mathsf{BP} \cdot \mathsf{C}$ und sei $B' \in \mathsf{C}$ eine p-balancierte Sprache mit

$$\Pr_{y \in_R \{0,1\}^{p(n)}}[A(x) \neq B'(x\#y)] \leq 1/3 = 1/2 - 1/6.$$

Dann ist die Sprache

$$B = \left\{ x\#y_1 \cdots y_{2t(n)+1} \;\middle|\; \begin{array}{l} y_1, \ldots, y_{2t(n)+1} \in \{0,1\}^{p(n)}, \\ \|\{i : x\#y_i \in B\}\| > t(n) \end{array} \right\},$$

wobei $t(n) = \lceil (q(n)-1)\log_2(9/8) \rceil$ ist, auf B' majority-reduzierbar und somit in C. Weiter folgt nach Lemma 81 für $r(n) = p(n)(2t(n)+1)$ und für ein zufällig gewähltes $z = y_1 \cdots y_{2t(n)+1} \in_R \{0,1\}^{r(n)}$

$$\begin{aligned} \Pr[A(x) \neq B(x\#z)] &= \Pr[\|\{i : A(x) \neq A(x\#y_i)\}\| > t(n)] \\ &\leq 1/2 \underbrace{(1 - 4/36)}_{8/9}{}^{t(n)} \leq 2^{-q(|x|)}. \end{aligned}$$

■

Korollar 83. *Für jede Sprache $L \in \mathsf{BPP}$ und jedes Polynom q ex. eine BPPTM M mit*

$$\Pr[M(x) = L(x)] \geq 1 - 2^{q(|x|)}.$$

Satz 84. $\mathsf{BPP} \subseteq \mathsf{PSK}$.

Beweis. Sei $A \in \mathsf{BPP}$. Dann ist auch die Sprache $A' = bin(A)$ in $\mathsf{BPP} = \mathsf{BP} \cdot \mathsf{P}$. Nach Satz 82 existieren für das Polynom $q(n) = n+1$ ein Polynom r und eine r-balancierte Sprache $B \in \mathsf{C}$, so dass für alle n und alle $x \in \{0,1\}^n$ gilt:

$$\Pr_{z \in_R \{0,1\}^{r(n)}}[B(x\#z) \neq A'(x)] \leq 2^{-q(n)}.$$

Daher folgt für ein zufällig gewähltes $z \in_R \{0,1\}^{r(n)}$,

$$\Pr[\exists x \in \{0,1\}^n : B(x\#z) \neq A'(x)] \leq \sum_{x \in \{0,1\}^n} \Pr[B(x\#z) \neq A'(x)] < 1.$$

Also muss für jede Eingabelänge n ein String z_n mit $A'(x) = B(x\#z_n)$ für alle $x \in \{0,1\}^n$ existieren. Da $B \in \mathsf{P}$ ist, können die Funktionen $f_{z_n} : x \mapsto B(x\#z_n)$ nach Korollar 49 durch Schaltkreise polynomieller Größe berechnet werden. ■

6.4 Abschlusseigenschaften von Anzahl-Klassen

In diesem Abschnitt gehen wir der Frage nach, unter welchen Reduktionen und Operatoren Anzahl-Klassen abgeschlossen sind.

Lemma 85. *Sei C eine Sprachklasse, die unter $\leq_m^{log}$ abgeschlossen ist. Dann gilt*

(i) $\mathsf{co}\text{-}\exists^p \cdot \mathcal{C} = \forall^p \cdot \mathsf{co}\text{-}\mathcal{C}$,

(ii) $\mathsf{co}\text{-}\mathsf{BP} \cdot \mathcal{C} = \mathsf{BP} \cdot \mathsf{co}\text{-}\mathcal{C}$,

(iii) $\mathsf{co}\text{-}\oplus \cdot \mathcal{C} = \oplus \cdot \mathsf{co}\text{-}\mathcal{C} = \oplus \cdot \mathcal{C}$.

Beweis. Wir zeigen nur die Inklusionen von links nach rechts. Die umgekehrten Inklusionen folgen analog.

(i) Sei $A \in \mathsf{co}\text{-}\exists^p \cdot \mathcal{C}$. Dann existieren ein Polynom p und eine p-balancierte Sprache $B \in \mathsf{C}$ mit $\bar{A} = \exists B$. Definiere die Sprache

$$\hat{B} = \{x\#y \,|\, x\#y \notin B \text{ und } |y| = p(|x|)\}.$$

Dann ist $\hat{B}$ eine ebenfalls p-balancierte Sprache in $\mathsf{co}\text{-}\mathsf{C}$ mit $\#\hat{B}(x) = 2^{p(n)} - \#B(x)$. Daher folgt

$$x \in A \Leftrightarrow \#B(x) = 0 \Leftrightarrow \#\hat{B}(x) = 2^{p(n)},$$

also $A = \forall^p \hat{B} \in \forall^p \cdot \mathsf{co}\text{-}\mathcal{C}$.

(ii) Sei $A \in \mathsf{co}\text{-}\mathsf{BP} \cdot \mathcal{C}$ und sei $B \in \mathsf{C}$ eine p-balancierte zweiseitige Sprache mit $\bar{A} = \exists^{\geq 1/2} B$. Dann ist die in (i) definierte p-balancierte Sprache $\hat{B} \in \mathsf{co}\text{-}\mathsf{C}$ ebenfalls zweiseitig und es gilt $A = \exists^{\geq 1/2} \hat{B} \in \mathsf{BP} \cdot \mathsf{co}\text{-}\mathcal{C}$.

(iii) Sei $A \in \oplus \cdot \mathcal{C}$ und sei $B \subseteq \Sigma^*$ eine p-balancierte Sprache in C mit $A = \oplus B$. Dann hat die in (i) definierte p-balancierte Sprache $\hat{B} \in \mathsf{co}\text{-}\mathsf{C}$ die gleiche Parität wie $\#B(x)$ und daher gilt $A = \oplus \hat{B} \in \oplus \cdot \mathsf{co}\text{-}\mathcal{C}$. Zudem ist

$$B' = \{x\#0y \,|\, x\#y \in B\} \cup \{x\#1^{p(|x|)+1} \,|\, x \in \Sigma^*\}$$

eine $(p+1)$-balancierte Sprache in C mit $\bar{A} = \oplus B'$, d.h. $A \in \mathsf{co}\text{-}\oplus \cdot \mathcal{C}$. ■

Lemma 86. *Sei $B \in \mathsf{C}$ eine p-balancierte Sprache und sei C unter $\leq_m^{log}$ abgeschlossen. Dann existieren für jede Funktion $f \in \mathsf{FL}$ ein Polynom q und q-balancierte Sprachen $B', B'' \in \mathsf{C}$ mit*

$$\#B'(x) = \#B(f(x)) \text{ und } \#B''(x)/2^{q(|x|)} = \#B(f(x))/2^{p(|f(x)|)}.$$

Beweis. Sei q ein Polynom mit $p(|f(x)|) \leq q(|x|)$ für alle x. Betrachte die Sprachen

$$B' = \{x\#y'y'' \,|\, |y'y''| = q(n), f(x)\#y' \in B \text{ und } y'' \in \{0\}^*\} \text{ und}$$
$$B'' = \{x\#y'y'' \,|\, |y'y''| = q(n), f(x)\#y' \in B \text{ und } y'' \in \{0,1\}^*\}.$$

Dann gilt $B', B'' \leq_m^{log} B$. Da jedes Präfix y' mit $f(x)\#y' \in B$ genau eine Verlängerung y'' mit $x\#y'y'' \in B'$ und genau $2^{q(|x|)-p(|f(x)|)}$ Verlängerungen y'' mit $x\#y'y'' \in B''$ hat, folgt

$$\#B'(x) = \#B(f(x)) \text{ und } \#B''(x) = \#B(f(x))2^{q(|x|)-p(|f(x)|)}. \quad \blacksquare$$

Mit obigem Lemma ist es nun leicht, folgende Abschlusseigenschaften zu zeigen.

Satz 87. *Sei C eine unter $\leq_m^{log}$ abgeschlossene Sprachklasse.*

(i) Für $\mathsf{Op} \in \{\exists^p, \forall^p, \mathsf{R}, \mathsf{BP}, \exists^{\geq 1/2}, \oplus\}$ ist auch $\mathsf{Op} \cdot \mathsf{C}$ unter $\leq_m^{log}$ abgeschlossen.

(ii) $\exists^p \cdot \exists^p \cdot \mathsf{C} = \exists^p \cdot \mathsf{C}$, $\forall^p \cdot \forall^p \cdot \mathsf{C} = \forall^p \cdot \mathsf{C}$ und $\oplus \cdot \oplus \cdot \mathsf{C} = \oplus \cdot \mathsf{C}$.

Beweis.

(i) Sei $A \in \mathsf{Op} \cdot \mathsf{C}$ mittels einem Polynom p und einer p-balancierten Sprache $B \in \mathsf{C}$. Weiter gelte $A' \leq_m^{log} A$ mittels einer FL-Funktion f. Nach obigem Lemma existieren ein Polynom q und eine q-balancierte Sprache $B' \in \mathsf{C}$ mit

$$\#B'(x)/2^{q(|x|)} = \#B(f(x))/2^{p(|f(x)|)}.$$

Nun folgt z.B. für $\mathsf{Op} = \exists^p$,

$$x \in A' \Leftrightarrow f(x) \in A \Leftrightarrow \#B(f(x)) > 0 \Leftrightarrow \#B'(x) > 0,$$

weshalb $A' = \exists B' \in \exists^p \cdot \mathsf{C}$ ist. Die übrigen Fälle folgen analog.

(ii) Siehe Übungen. $\blacksquare$

7 Die Polynomialzeithierachie

Die Polynomialzeithierachie extrapoliert den Übergang von P zu $\exists^p \cdot \mathsf{P} = \mathsf{NP}$ und besteht aus den Stufen Σ_k^p und Π_k^p, $k \geq 0$, welche induktiv wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} \Sigma_0^p &= \mathsf{P}, & \Pi_0^p &= \mathsf{P}, \\ \Sigma_{k+1}^p &= \exists^p \cdot \Pi_k^p, & \Pi_{k+1}^p &= \forall^p \cdot \Sigma_k^p, \quad k \geq 0. \end{aligned}$$

Die Vereinigung aller Stufen der Polynomialzeithierachie bezeichnen wir mit PH,

$$\mathsf{PH} = \bigcup_{k \geq 0} \Sigma_k^p = \bigcup_{k \geq 0} \Pi_k^p.$$

Es ist leicht zu sehen, dass $\Sigma_k^p = \mathsf{co}\text{-}\Pi_k^p$ ist. Es ist nicht bekannt, ob die Polynomialzeithierachie echt ist, also $\Sigma_k^p \neq \Sigma_{k+1}^p$ für alle $k \geq 0$ gilt. Die Annahme $\Sigma_k^p = \Sigma_{k+1}^p$ ist mit einem Kollaps von PH auf die k-te Stufe äquivalent. Es gilt allerdings als unwahrscheinlich, dass die Polynomialzeithierachie kollabiert, erst recht nicht auf eine kleine Stufe.

Satz 88. *Für alle $k \geq 1$ gilt: $\Sigma_k^p = \Sigma_{k+1}^p \Leftrightarrow \Sigma_k^p = \Pi_k^p \Leftrightarrow \mathsf{PH} = \Sigma_k^p$.*

Beweis. Wir zeigen die drei Implikationen $\Sigma_k^p = \Sigma_{k+1}^p \Rightarrow \Sigma_k^p = \Pi_k^p \Rightarrow \mathsf{PH} = \Sigma_k^p \Rightarrow \Sigma_k^p = \Sigma_{k+1}^p$. Wegen $\Pi_k^p \subseteq \Sigma_{k+1}^p$ impliziert die Gleichheit $\Sigma_k^p = \Sigma_{k+1}^p$ sofort $\Pi_k^p \subseteq \Sigma_k^p$, was mit $\Sigma_k^p = \Pi_k^p$ gleichbedeutend ist. Für die zweite Implikation sei $\Sigma_k^p = \Pi_k^p$ angenommen. Wir zeigen durch Induktion über l, dass dann $\Sigma_{k+l}^p = \Sigma_k^p$ für alle $l \geq 0$ gilt. Der Induktionsanfang $l = 0$ ist klar. Für den Induktionsschritt setzen wir die Gleichheit $\Sigma_{k+l}^p = \Sigma_k^p$ (bzw. $\Pi_{k+l}^p = \Pi_k^p$) voraus und folgern

$$\Sigma_{k+l+1}^p = \exists^p \cdot \Pi_{k+l}^p = \exists^p \cdot \Pi_k^p = \exists^p \cdot \Sigma_k^p = \Sigma_k^p.$$

Die Implikation $\mathsf{PH} = \Sigma_k^p \Rightarrow \Sigma_k^p = \Sigma_{k+1}^p$ ist klar. ■

Als Folgerung hieraus ergibt sich, dass eine NP-vollständige Sprache nicht in P (bzw. $\mathsf{co}\text{-}\mathsf{NP}$) enthalten ist, außer wenn PH auf P (bzw. NP) kollabiert. In den Übungen werden wir sehen, dass unter der Voraussetzung $\mathsf{PH} \neq \Sigma_2^p$ keine NP-vollständige Sprache in PSK enthalten ist. Allgemeiner liefert die Polynomialzeithierarchie eine Folge von stärker werdenden Hypothesen der Form $\mathsf{PH} \neq \Sigma_k^p$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$, die für $k = 0$ mit $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$ und für $k = 1$ mit $\mathsf{NP} \neq \mathsf{co}\text{-}\mathsf{NP}$ äquivalent sind.

Als nächstes zeigen wir, dass BPP in der zweiten Stufe der Polynomialzeithierarchie enthalten ist.

Satz 89 (Lautemann 1983, Sipser 1983)**.** *Für jede Klasse C, die unter majority-Reduktionen abgeschlossen ist, gilt*

$$\mathsf{BP} \cdot \mathsf{C} \subseteq \mathsf{R} \cdot \forall^p \cdot \mathsf{C}.$$

Beweis. Sei $A \in \mathsf{BP} \cdot \mathsf{C}$. Dann existieren ein Polynom $p(n) \geq 1$ und eine p-balancierte Sprache $B \in \mathsf{C}$, so dass für alle x der Länge n gilt:

$$\Pr_{y \in_R \{0,1\}^{p(n)}}[A(x) \neq B(x\#y)] \leq 2^{-n}.$$

Setzen wir $B_x = \{y \in \{0,1\}^{p(n)} \,|\, x\#y \in B\}$, so enthält B_x für $x \in A$ mindestens $(1 - 2^{-n})2^{p(n)}$ Wörter und für $x \notin A$ höchstens $2^{p(n)-n}$ Wörter. Sei $\oplus$ die bitweise XOR-Operation auf $\{0,1\}^n$, d.h.

$$x_1 \cdots x_n \oplus y_1 \cdots y_n = (x_1 \oplus y_1) \cdots (x_n \oplus z_n).$$

Für $u_1, \ldots, u_k \in \{0,1\}^{p(n)}$ sei

$$B_x(u_1 \cdots u_k) = \{z \,|\, \exists i \in \{1, \ldots, k\} : z \oplus u_i \in B_x\}.$$

Wir zeigen für alle x mit $|x| = n \geq 2$ und $2^n > p(n)$ die Implikationen

$$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow \exists^{\geq 1/2} u \in \{0,1\}^{p(n)^2} : B_x(u) = \{0,1\}^{p(n)} \\ x \notin A &\Rightarrow \forall u \in \{0,1\}^{p(n)^2} : B_x(u) \neq \{0,1\}^{p(n)} \end{aligned}$$

Dies beweist $A \in \mathsf{R} \cdot \forall^p \cdot \mathsf{C}$, da die p^2-balancierte Sprache

$$B' = \{x\#u \,|\, u \in \{0,1\}^{p(n)^2}, B_x(u) = \{0,1\}^{p(n)}\}$$

wegen

$$x\#u \in B' \Leftrightarrow B_x(u) = \{0,1\}^{p(n)} \Leftrightarrow \forall z \in \{0,1\}^{p(n)} : z \in B_x(u)$$

in $\forall^p \cdot \mathsf{C}$ entscheidbar ist. Sei also $x \in A$ mit $|x| = n \geq 2$ und sei v ein beliebiger String der Länge $p(n)$. Da B_x mehr als $(1-2^{-n})2^{p(n)}$ Wörter enthält, ist v für zufällig gewählte Strings $u_1, \ldots, u_{p(n)} \in_R \{0,1\}^{p(n)}$ mit Wahrscheinlichkeit

$$\Pr[v \notin B_x(u_1 \cdots u_{p(n)})] = \Pr[\forall i : v \oplus u_i \notin B_x] \leq 2^{-np(n)}$$

nicht in $B_x(u_1 \cdots u_{p(n)})$ enthalten. Daher gilt für einen zufällig gewählten String $u \in_R \{0,1\}^{p(n)^2}$,

$$\begin{aligned}\Pr[B_x(u) \neq \{0,1\}^{p(n)}] &= \Pr[\exists v \in \{0,1\}^{p(n)} : v \notin B_x(u)] \\ &\leq 2^{p(n)-np(n)} \leq 1/2.\end{aligned}$$

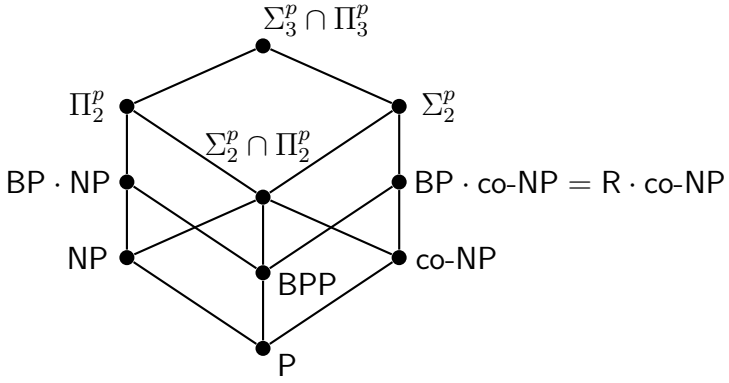
Für den Nachweis der 2. Implikation nehmen wir an, dass für ein x der Länge n mit $2^n > p(n)$ Wörter $u_1, \ldots, u_{p(n)}$ existieren mit $B_x(u_1 \cdots u_{p(n)}) = \{0,1\}^{p(n)}$. Da die Mengen $B_x(u_i)$ die gleiche Größe wie B_x haben, muss dann

$$\|B_x\| \geq 2^{p(n)}/p(n) > 2^{p(n)-n}$$

sein und somit x zu A gehören. ■

Insbesondere liefert Satz 89 folgende Inklusionen, indem wir $\mathsf{C} = \mathsf{P}$ bzw. $\mathsf{C} = \mathsf{co\text{-}NP}$ setzen (beachte, dass $\mathsf{R} \cdot \forall^p \cdot \mathsf{co\text{-}NP} = \mathsf{R} \cdot \mathsf{co\text{-}NP} \subseteq \mathsf{BP} \cdot \mathsf{co\text{-}NP}$ gilt).

Korollar 90. $\mathsf{BPP} \subseteq \Sigma_2^p \cap \Pi_2^p$ *und* $\mathsf{BP} \cdot \mathsf{co\text{-}NP} \subseteq \mathsf{R} \cdot \mathsf{co\text{-}NP} \subseteq \Sigma_2^p$.



Zum Schluss dieses Kapitels fassen wir die bekannten Kollapskonsequenzen unter unterschiedlichen Annahmen der Zugehörigkeit von NP-vollständigen Mengen A in bestimmten Komplexitätsklassen zusammen.

Annahme	Konsequenz
$A \in \mathsf{P}$	$\mathsf{PH} = \mathsf{P}$ (Satz 88)
$A \in \mathsf{co\text{-}NP}$	$\mathsf{PH} = \mathsf{NP}$ (Satz 88)
$A \in \mathsf{BPP}$	$\mathsf{PH} = \Sigma_2^p = \mathsf{BPP}$ (siehe Übungen)
$A \in \mathsf{PSK}$	$\mathsf{PH} = \Sigma_2^p = \mathsf{ZPP}^{\mathsf{NP}}$ (siehe Übungen)

8 Turing-Operatoren

In diesem Kapitel betrachten wir Berechnungen, die Zugriff auf eine Orakelsprache A haben, d.h., die Information, ob bestimmte Wörter in A enthalten sind oder nicht, kann durch eine Orakelanfrage, deren Beantwortung nur einen Rechenschritt kostet, abgerufen werden. Auf diese Weise erhalten wir zu jeder Komplexitätsklasse C eine relativierte Version C^A, in der alle Probleme enthalten sind, die relativ zum Orakel A innerhalb der durch C vorgegebenen Ressourcen lösbar sind.

Definition 91. *Eine **deterministische Orakelmaschine (ODTM)** M ist eine DTM, die mit einem speziellen write-only **Orakelfrageband** ausgerüstet ist. Außerdem besitzt M drei spezielle Zustände $q_?, q_+, q_-$. Als Orakel kann eine beliebige Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ verwendet werden. Geht M in den **Fragezustand** $q_?$, so hängt der Folgezustand q' davon ab, ob das aktuell auf dem Orakelband stehende Wort y zu A gehört (in diesem Fall ist $q' = q_+$) oder nicht ($q' = q_-$). In beiden Fällen wird das Orakelband gelöscht und der Kopf an den Anfang zurückgesetzt. All dies geschieht innerhalb eines einzigen Rechenschrittes. Die unter einem Orakel A arbeitende ODTM wird mit M^A bezeichnet und die von M^A **akzeptierte Sprache** ist $L(M^A)$.*

*Anstelle eines Sprachorakels A benutzen wir zuweilen auch ein funktionales Orakel f. In diesem Fall ist M mit einem speziellen **Orakelantwortband** ausgestattet, auf dem jede Orakelfrage y innerhalb eines Rechenschrittes mit $f(y)$ beantwortet wird.*

*Wir sagen, M ist **nichtadaptiv**, falls die Fragen von M nicht von den Antworten auf zuvor gestellte Fragen abhängen.*

Wir verlangen von einer Orakel-Turingmaschine, dass sie vorgegebene Ressourcenschranken unabhängig vom benutzten Orakel einhält.

Definition 92. *Die **Rechenzeit** einer ODTM M bei Eingabe $x \in \Sigma^*$ ist*

$$time_M(x) = \sup_{A \subseteq \Sigma^*} time_{M^A}(x).$$

*M ist $t(n)$-**zeitbeschränkt**, falls für alle Eingaben x gilt:*

$$time_M(x) \leq t(|x|).$$

Wir fassen alle Sprachen, die von einer ODTM M mit Orakel A in Zeit $t(n)$ entscheidbar sind, in der relativierten Komplexitätsklasse

$$\mathsf{DTIME}^A(t(n)) = \{L(M^A) \,|\, M \text{ ist eine } t(n)\text{-zeitbeschränkte ODTM}\}$$

zusammen. $\mathsf{DTIME}^A(t(n))$ wird auch als die **Relativierung** der Klasse $\mathsf{DTIME}(t(n))$ zum Orakel A bezeichnet.

Beispielsweise enthält die Klasse

$$\mathsf{P}^A = \{L(M^A) \,|\, M \text{ ist eine POM}\}$$

alle Sprachen $L(M^A)$, die von einer polynomiell zeitbeschränkten ODTM (kurz POM) M mit Orakel A akzeptiert werden. Für eine Sprachklasse C sei

$$\mathsf{P}^{\mathsf{C}} = \bigcup_{A \in \mathsf{C}} \mathsf{P}^A.$$

Für P^{C} (bzw. P^A) schreiben wir auch $\mathsf{P}(\mathsf{C})$ (bzw. $\mathsf{P}(A)$). Ebenso wie DTMs lassen sich auch NTMs und PMs oder Transducer mit einem Orakelmechanismus ausstatten, wodurch wir ONTMs und OPMs oder Orakeltransducer erhalten. Ist die Rechenzeit dieser Maschinen polynomiell beschränkt, so bezeichnen wir sie als NPOMs bzw. PPOMs. Entsprechend erhalten wir dann die relativierten Komplexitätsklassen NP^A, PP^A, FP^A, BPP^A, RP^A, ZPP^A usw. Lassen wir nur nichtadaptive Orakelmaschinen zu, so notieren wir dies durch den Index $\|$ und schreiben $\mathsf{P}_\|^A$, $\mathsf{FP}_\|^A$ usw. Falls wir dagegen die Anzahl der Fragen durch eine Funktion $g(n)$ begrenzen, wobei n die Eingabelänge bezeichnet, so schreiben wir $\mathsf{P}^{A[g(n)]}$ usw.

Satz 93.

(i) $\mathsf{P}^{\mathsf{P}} = \mathsf{P}$ *und* $\mathsf{NP}^{\mathsf{P}} = \mathsf{NP}$,

(ii) $\mathsf{P}^{\mathsf{NP}\cap\text{co-NP}} = \mathsf{NP} \cap \text{co-NP}$ *und* $\mathsf{NP}^{\mathsf{NP}\cap\text{co-NP}} = \mathsf{NP}$,

(iii) $\mathsf{NP}^{\mathsf{NP}} = \Sigma_2^p$ *und* $\mathsf{NP}^{\Sigma_k^p} = \Sigma_{k+1}^p$ *für* $k \geq 0$.

Beweis. (i) Die Inklusion $\mathsf{P} \subseteq \mathsf{P}^{\mathsf{P}}$ ist klar. Für die umgekehrte Richtung sei L eine Sprache in P^{P}. Dann existiert eine POM M und ein Orakel $A \in \mathsf{P}$ mit $L(M^A) = L$. Sei M' eine PDTM mit $L(M') = A$. Betrachte die DTM $M''(x)$, die $M(x)$ simuliert und jedesmal, wenn M eine Orakelfrage y stellt, $M'(y)$ simuliert, um die Zugehörigkeit von y zu A zu entscheiden. Dann gilt

$$L(M'') = L(M^A) = L$$

und da die Beantwortung einer Orakelfrage höchstens Zeit

$$\max_{y,|y|\leq time_M(x)} time_{M'}(y) = |x|^{O(1)}$$

erfordert, ist M'' polynomiell zeitbeschränkt. Die Gleichheit von NP^{P} und NP lässt sich vollkommen analog zeigen.

(ii) Wir zeigen zuerst die Inklusion $\mathsf{NP}^{\mathsf{NP}\cap\text{co-NP}} \subseteq \mathsf{NP}$. Sei $L = L(M^A)$ für eine NPOM M und sei A ein Orakel in $\mathsf{NP} \cap \text{co-NP}$. Dann existieren NPTMs M' und M'' mit $L(M') = A$ und $L(M'') = \overline{A}$. Betrachte folgende NPTM M^*:

> $M^*(x)$ simuliert $M(x)$ und jedesmal wenn M eine Orakelfrage y stellt, entscheidet sich M^* nichtdeterministisch dafür, entweder $M'(y)$ oder $M''(y)$ zu simulieren. Falls $M'(y)$ (bzw. $M''(y)$) akzeptiert, führt M^* die Simulation von M im Zustand q_+ (bzw. q_-) fort. Anderfalls bricht M^* die Simulation von M ab und verwirft x.

Nun gilt $L(M^*) = L(M^A) = L$ und daher ist $L \in \mathsf{NP}$. Dies zeigt $\mathsf{NP}^{\mathsf{NP}\cap\text{co-NP}} \subseteq \mathsf{NP}$. Da $\mathsf{P}^{\mathsf{NP}\cap\text{co-NP}}$ unter Komplementbildung abgeschlossen ist, folgt auch sofort $\mathsf{P}^{\mathsf{NP}\cap\text{co-NP}} \subseteq \mathsf{NP} \cap \text{co-NP}$. Die umgekehrten Inklusionen sind trivial.

(iii) Wir zeigen zuerst die Inklusion von Σ_2^p in $\mathsf{NP}^{\mathsf{NP}}$. Zu jeder Sprache $L \in \Sigma_2^p = \exists^p \cdot \text{co-NP}$ existieren eine Sprache $A \in \text{co-NP}$ und ein Polynom p mit

$$x \in L \Leftrightarrow \exists y \in \{0,1\}^{p(|x|)} : x\#y \in A.$$

Dann ist $\bar{A} \in \mathsf{NP}$ und L wird von der NPOM M relativ zum Orakel $\bar{A}$ akzeptiert, die bei Eingabe x ein Wort $y \in \{0,1\}^{p(|x|)}$ rät und bei negativer Antwort auf die Orakelfrage $x\#y$ akzeptiert. Mit demselben Argument folgt auch Σ_k^p in $\mathsf{NP}^{\Sigma_{k-1}^p}$. Der einzige Unterschied ist, dass nun $A \in \Pi_{k-1}^p$ bzw. $\bar{A} \in \Sigma_{k-1}^p$ und folglich $L = L(M^{\bar{A}}) \in \mathsf{NP}^{\Sigma_{k-1}^p}$ ist.

Für die umgekehrte Richtung sei $L = L(M^A)$ für ein NP-Orakel A und eine NPOM M, deren Rechenzeit durch ein Polynom p und deren Verzweigungsgrad durch 2 beschränkt ist. Dann existieren ein Polynom q und eine Sprache $B \in \mathsf{P}$ mit

$$y \in A \Leftrightarrow \exists z \in \{0,1\}^{q(|y|)} : y\#z \in B.$$

Nun können wir jede Rechnung α von $M(x)$ durch ein Wort $r = r_1 \cdots r_{p(|x|)} \in \{0,1\}^{p(|x|)}$ kodieren, wobei r_i im Fall, dass α im i-ten Rechenschritt nichtdeterministisch verzweigt, die Richtung, und im Fall, dass α im i-ten Rechenschritt eine Orakelfrage stellt, die Antwort angibt. Nun gilt

$$\begin{aligned} x \in L \;\Leftrightarrow\; & \exists r \in \{0,1\}^{p(|x|)} \exists z_1, \ldots, z_{p(|x|)} \in \{0,1\}^{q(p(|x|))} : \\ & x\#rz_1, \ldots, z_{p(|x|)} \in C, \end{aligned}$$

wobei C alle Strings $x\#rz_1, \ldots, z_{p(|x|)}$ enthält mit

- r kodiert eine akzeptierende Rechnung von $M(x)$, während der m Orakelfragen $y_1, \ldots, y_m$ gestellt und mit $a_1, \ldots, a_m$ beantwortet werden, und
- für $i = 1, \ldots, m$ gilt $(a_i = 1 \wedge y_i\#(z_i)_{\leq q(|y_i|)} \in B) \vee (a_i = 0 \wedge y_i \notin A)$,

wobei $(z)_{\leq k}$ das Präfix der Länge k von z bezeichnet. Da C in co-NP liegt, zeigt diese Charakterisierung, dass L in $\exists^p \cdot \text{co-NP}$ enthalten ist.

Mit diesem Argument lässt sich auch die Inklusion $\mathsf{NP}^{\Sigma_k^p} \subseteq \Sigma_{k+1}^p$ zeigen. Der einzige Unterschied ist, dass nun A in Σ_k^p (bzw. A in Π_k^p) und B in Π_{k-1}^p liegen. Daher ist leicht zu sehen, dass C nun in Π_k^p liegt und somit $L = L(M^A) = \exists C$ in $\exists^p \cdot \Pi_k^p = \Sigma_{k+1}^p$ enthalten ist. ■

Der vorige Satz liefert folgende Charakterisierung für die Stufen der Polynomialzeithierachie:

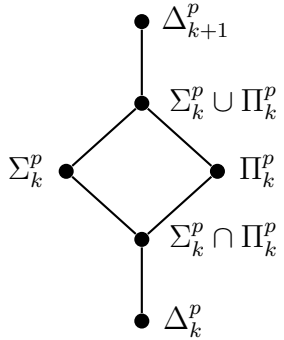
$$\Sigma_k^p = \mathsf{NP}^{\Sigma_{k-1}^p} = \mathsf{NP}^{\mathsf{NP}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\mathsf{NP}}}}}},$$

$$\Pi_k^p = \text{co-NP}^{\Sigma_{k-1}^p} = \text{co-NP}^{\mathsf{NP}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\mathsf{NP}}}}}},$$

wobei die Türme die Höhe k haben. Zudem erhalten wir weitere Stufen Δ_k^p:

$$\Delta_k^p = \mathsf{P}^{\Sigma_{k-1}^p} = \mathsf{P}^{\mathsf{NP}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\mathsf{NP}}}}}},$$

Offensichtlich gilt $\Delta_k^p \subseteq \Sigma_k^p \cap \Pi_k^p \subseteq \Sigma_k^p \cup \Pi_k^p \subseteq \Delta_{k+1}^p$:



9 Das relativierte P/NP-Problem

Satz 94 (Baker, Gill und Solovay, 1975)**.** *Es gibt Orakel A und B mit*

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{NP}(A) \text{ und } \mathsf{P}(B) \neq \mathsf{NP}(B).$$

Beweis. Wählen wir für A eine PSPACE-vollständige Sprache (etwa QBF), so gilt

$$\mathsf{NP}(A) \subseteq \mathsf{NPSPACE} = \mathsf{PSPACE} \subseteq \mathsf{P}(A).$$

Für die Konstruktion eines Orakels $B \subseteq \{0,1\}^*$ mit $\mathsf{P}(B) \neq \mathsf{NP}(B)$ betrachten wir die Testsprache

$$L(B) = \{0^n \,|\, B \cap \{0,1\}^n \neq \emptyset\}.$$

Da $L(B)$ für jedes Orakel B zu $\mathsf{NP}(B)$ gehört, genügt es, B mittels Diagonalisierung so zu konstruieren, dass $L(B)$ nicht in $\mathsf{P}(B)$ enthalten ist.

Sei $M_1, M_2, \ldots$ eine Aufzählung von POMs mit $\mathsf{P}^C = \{L(M_i^C) \,|\, i \geq 1\}$, wobei wir annehmen, dass die Laufzeit von M_i durch das Polynom $n^i + i$ beschränkt ist,

$$time_{M_i}(x) \leq |x|^i + i.$$

Wir konstruieren B stufenweise als Vereinigung von Sprachen B_i, wobei B_i aus B_{i-1} durch Hinzufügen maximal eines Wortes y der Länge n_i entsteht und die Zahlenfolge n_i, $i \geq 0$, induktiv wie folgt definiert ist: $n_0 = 0$ und

$$n_i = \min\{n \in \mathbb{N} \,|\, n \geq (n_{i-1})^{i-1} + i, n^i + i < 2^n\},\ i \geq 1.$$

Die Bedingung $n_i \geq (n_{i-1})^{i-1} + i$ stellt sicher, dass $M_{i-1}(0^{n_{i-1}})$ für kein $j \geq i$ ihr Orakel über ein Wort y der Länge n_j befragen kann, und die Bedingung $(n_i)^i + i < 2^{n_i}$ garantiert, dass M_i bei Eingabe 0^{n_i} nicht alle Wörter der Länge n_i als Orakelfrage stellen kann.

Stufenkonstruktion von $B = \bigcup_{i\geq 1} B_i$:

Stufe 0**:** $B_0 = \emptyset$.

Stufe $i \geq 1$**:** Falls $M_i^{B_{i-1}}(0^{n_i})$ akzeptiert, setze $B_i = B_{i-1}$. Andernfalls setze $B_i = B_{i-1} \cup \{y\}$, wobei y das lexikografisch kleinste Wort der Länge n_i ist, das von $M_i^{B_{i-1}}(0^{n_i})$ nicht als Orakelfrage gestellt wird.

B_i wird in Stufe i so definiert, dass 0^{n_i} in $L(M_i^{B_{i-1}}) \triangle L(B_i)$ enthalten ist. Zudem führt $M_i^{B_i}(0^{n_i})$ die gleiche Rechnung wie $M_i^{B_{i-1}}(0^{n_i})$ aus, da $M_i^{B_{i-1}}(0^{n_i})$ keine Orakelfrage in $B_i \backslash B_{i-1}$ stellt. Da zudem $B \backslash B_i$ nur Wörter der Länge $\geq n_{i+1} > (n_i)^i + i$ enthält, folgt $0^{n_i} \in L(M_i^B) \triangle L(B)$ und somit $L(B) \notin \mathsf{P}(B)$. ■

Es gibt sogar relativierte Welten, in denen alle Stufen der Polynomialzeithierarchie verschieden sind.

Satz 95. *Es existiert ein Orakel C, so dass $\Sigma_k^P(C) \neq \Sigma_{k+1}^P(C)$ für alle $k \geq 0$ (und somit $\mathsf{PH}(C) \neq \mathsf{PSPACE}(C)$) gilt.*

Da die Antwort auf die Frage, ob $\mathsf{P}^A \neq \mathsf{NP}^A$ (oder allgemeiner, ob PH^A echt) ist, von der Wahl des Orakels A abhängt, lassen sich diese Fragen nicht mit relativierbaren Beweismethoden beantworten. Andererseits wurden alle bisher bekannten Separierungen zwischen Komplexitätsklassen mit relativierbaren Beweistechniken erzielt. Beispiele hierfür sind die Zeit- und Platzhierarchiesätze

$$\mathsf{DTIME}^A(g(n)) \subsetneq \mathsf{DTIME}^A(f(n)),$$

falls $g(n) \cdot \log g(n) = o(f(n))$, und

$$\mathsf{DSPACE}^A(g(n)) \subsetneq \mathsf{DSPACE}^A(f(n)),$$

falls $g(n) = o(f(n))$. Auch die Inklusionen

$$\mathsf{DTIME}^A(f) \subseteq \mathsf{NTIME}^A(f) \subseteq \mathsf{DSPACE}^A(f) \subseteq \mathsf{NSPACE}^A(f),$$

gelten relativ zu einem beliebigem Orakel. Dagegen sind die Inklusion

$$\mathsf{NSPACE}(f) \subseteq \mathsf{DTIME}(2^{O(f)})$$

und der Satz von Savitch

$$\mathsf{NSPACE}(s(n)) \subseteq \mathsf{DSPACE}(s^2(n)),$$

sowie der Satz von Immerman/Szelepczényi

$$\mathsf{NSPACE}(s(n)) = \mathsf{co\text{-}NSPACE}(s(n))$$

nicht relativierbar (siehe Übungen).

Im Jahr 1981 zeigten Bennet und Gill, dass bei zufälliger Wahl des Orakels A (d.h. A enthält jedes Wort $x \in \{0,1\}^*$ mit Wahrscheinlichkeit $1/2$) die Separierungen

$$\mathsf{P}^A \neq \mathsf{NP}^A \neq \mathsf{co\text{-}NP}^A$$

sogar mit Wahrscheinlichkeit 1 gelten, d.h. die Klassen P, NP und co-NP sind unter fast allen Orakeln verschieden. Die Frage, ob PH auch relativ zu einem Zufallsorakel echt ist, ist dagegen noch offen. Andererseits gilt

$$\Pr[\mathsf{P}^A = \mathsf{BPP}^A] = 1.$$

Die in den 80ern aufgestellte **Zufallsorakelhypothese** besagt, dass eine relativierte Aussage wie $\mathsf{P}^A \neq \mathsf{NP}^A$ genau dann relativ zu einem Zufallsorakel mit Wahrscheinlichkeit 1 gilt, wenn sie unrelativiert gilt. Diese Hypothese wurde mehrfach widerlegt. Bekanntestes Beispiel ist die Gleichheit $\mathsf{IP} = \mathsf{PSPACE}$, obwohl $\mathsf{IP}^A \neq \mathsf{PSPACE}^A$ mit Wahrscheinlichkeit 1 gilt.

10 PP und die Polynomialzeithierarchie

In diesem Kapitel zeigen wir, dass PH in der Klasse $\mathsf{BP}\cdot\oplus\mathsf{P}$ enthalten ist. Da diese Klasse im Turing-Abschluss $\mathsf{P}(\mathsf{PP})$ von PP enthalten ist, folgt $\mathsf{PH} \subseteq \mathsf{P}(\mathsf{PP})$.

Definition 96. *Für eine NTM M bezeichne $\#M(x)$ die Anzahl der akzeptierenden Rechnungen von $M(x)$.*

a) $\#\mathsf{P} = \{\#M \,|\, M \text{ ist eine NPTM }\}$.

b) $L \subseteq \Sigma^*$ *gehört zu* $\oplus\mathsf{P}$*, falls eine NPTM M existiert mit*

$$L = \{x \in \Sigma^* \,|\, \#M(x) \text{ ist ungerade }\}.$$

c) $L \subseteq \Sigma^*$ *gehört zu* UP*, falls die charakteristische Funktion $L(x)$ von L in* $\#\mathsf{P}$ *ist, d.h. es gibt eine NPTM M mit*

$$\begin{aligned} x \in L &\Rightarrow \#M(x) = 1, \\ x \notin L &\Rightarrow \#M(x) = 0. \end{aligned}$$

Unter Verwendung von NPOMs erhalten wir die relativierten Klassen $\#\mathsf{P}^A$, $\oplus\mathsf{P}^A$ und UP^A. Es ist nicht schwer zu sehen, dass folgendes Entscheidungsproblem $\oplus$SAT $\oplus$P-vollständig ist (siehe Übungen).

Gegeben: Eine boolsche Formel $F(x_1, \ldots, x_n)$.
Gefragt: Ist die Anzahl der erfüllenden Belegungen von F ungerade?

Folgende Proposition wird ebenfalls in den Übungen bewiesen.

Proposition 97.

i) $\#\mathsf{P} = \# \cdot \mathsf{P}$,

ii) $\oplus \cdot \oplus\mathsf{P} = \oplus \cdot \mathsf{P} = \oplus\mathsf{P}$.

10.1 Lineare Hashfunktionen

Definition 98. *$Lin(n,k)$ bezeichne die Menge aller linearen Funktionen von $\mathbb{F}_2^n$ nach $\mathbb{F}_2^k$.*

Bemerkung 99. *Jede Funktion $h \in Lin(n,k)$ lässt sich eineindeutig durch eine Matrix $A_h = (a_{ij}) \in \{0,1\}^{k\times n}$ beschreiben, d.h. es gilt*

$$h(x_1 \cdots x_n) = y_1 \cdots y_k \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}.$$

Bezeichnen wir also die Abbildung $x_1 \cdots x_n \mapsto a_{i1}x_1 \oplus \cdots \oplus a_{in}x_n$ mit h_i, so gilt $y_i = h_i(x_1 \cdots x_n)$ für $i = 1, \ldots, k$.

Lemma 100. *Für $x \in \{0,1\}^n$ und für eine zufällig unter Gleichverteilung gewählte Funktion $h \in_R Lin(n,k)$ sei S_x die ZV*

$$S_x = \begin{cases} 1, & h(x) = 0^k, \\ 0, & sonst \end{cases}$$

und für $B \subseteq \{0,1\}^n$ sei S die ZV $S = \sum_{x\in B} S_x$. Dann gilt im Fall $\emptyset \neq B \subseteq \{0,1\}^n - \{0^n\}$ und $k = \lfloor \log_2(3\|B\|) \rfloor$ die Abschätzung $\Pr[S = 1] \geq 2/9$.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $h(x)$ im Fall $x \neq 0^n$ auf dem Wertebereich $\{0,1\}^k$ gleichverteilt ist, falls h zufällig aus $Lin(n,k)$ gewählt wird. In diesem Fall existiert nämlich ein Index j mit $x_j = 1$. Da sich der Wert von $h_i(x)$ ändert, falls wir das Bit a_{ij} in A_h flippen, haben die beiden Mengen $H_0 = \{h \,|\, h_i(x) = 0\}$ und $H_1 = \{h \,|\, h_i(x) = 1\}$ die gleiche Mächtigkeit, was

$$\Pr[h_i(x) = 0] = \Pr[h_i(x) = 1] = 1/2$$

impliziert. Da die einzelnen Zeilen von A_h unabhängig gewählt werden, sind auch die Bitwerte $h_1(x), \ldots, h_k(x)$ unabhängig, und es folgt für jedes $y = y_1 \cdots y_k \in \{0,1\}^k$,

$$\Pr[h(x) = y] = \prod_{i=1}^{k} \underbrace{\Pr[h_i(x) = y_i]}_{1/2} = 2^{-k}.$$

Als nächstes zeigen wir, dass für $x \neq x'$ die beiden Werte $h(x)$ und $h(x')$ stochastisch unabhängig sind. Sei j eine Position mit $x'_j = 0$ und $x_j = 1$ (falls nötig, vertauschen wir x und x'). Dann ändert sich durch Flippen von a_{ij} zwar der Wert von $h_i(x)$, aber $h_i(x')$ bleibt unverändert. Folglich sind die beiden Mengen $H'_0 = \{h \,|\, h_i(x') = y_i \wedge h_i(x) = 0\}$ und $H'_1 = \{h \,|\, h_i(x') = y_i \wedge h_i(x) = 1\}$ gleich groß, woraus

$$\Pr[h_i(x) = 0 \,|\, h_i(x') = y_i] = 1/2.$$

folgt. Daher ist

$$\begin{aligned}\Pr[h_i(x) = y_i \wedge h_i(x') = y'_i] &= \Pr[h_i(x') = y'_i] \underbrace{\Pr[h_i(x) = y_i | h_i(x') = y'_i]}_{1/2} \\ &= \Pr[h_i(x') = y'_i]/2,\end{aligned}$$

was für beliebige Werte $y, y' \in \{0,1\}^k$ die Gleichheit

$$\begin{aligned}\Pr[h(x) = y \wedge h(x') = y'] &= \prod_{i=1}^{k} \Pr[h_i(x) = y_i \wedge h_i(x') = y'_i] \\ &= 2^{-k} \prod_{i=1}^{k} \Pr[h_i(x') = y'_i] \\ &= \Pr[h(x) = y] \cdot \Pr[h(x') = y'].\end{aligned}$$

impliziert. Folglich sind auch die ZVen S_x, $x \in \{0,1\}^n$, paarweise unabhängig und wegen $0^n \notin B$ gilt $\Pr[S_x = 1] = 2^{-k}$ für alle $x \in B$.

Setzen wir $b = \|B\|$, so folgt

$$\Pr[S \geq 2] \leq \sum_{\{x,x'\} \in \binom{B}{2}} \underbrace{\Pr[h(x) = h(x') = 0^k]}_{2^{-2k}} = \binom{b}{2} \cdot 2^{-2k}$$

und

$$\begin{aligned}\Pr[S \geq 1] &\geq \sum_{x \in B} \underbrace{\Pr[h(x) = 0^k]}_{2^{-k}} - \sum_{\{x,x'\} \in \binom{B}{2}} \Pr[h(x) = h(x') = 0^k] \\ &= 2^{-k} b - \binom{b}{2} 2^{-2k}.\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}\Pr[S = 1] = \Pr[S \geq 1] - \Pr[S \geq 2] &\geq 2^{-k} b - 2\binom{b}{2} 2^{-2k} \\ &= 2^{-k} b (1 - 2^{-k}(b-1)) > 2^{-k} b (1 - 2^{-k} b).\end{aligned}$$

Da $k = \lfloor \log_2(3b) \rfloor$ im Intervall $(\log_2(3b) - 1, \log_2(3b)]$ liegt, muss $2^{-k} b$ im Intervall $[1/3, \frac{2}{3})$ liegen. Da aber die Funktion $f(x) = x(1-x)$ auf diesem Intervall nach unten durch $2/9$ beschränkt ist, folgt $\Pr[S = 1] \geq 2/9$. ■

10.2 Satz von Valiant und Vazirani

Bei manchen Anwendungen ist der Bereich der tatsächlich vorkommenden Probleminstanzen eingeschränkt. Daher spielt es keine Rolle, wenn der Algorithmus außerhalb dieses Bereichs inkorrekt arbeitet.

Definition 101. *Ein **Promise-Problem** ist ein Paar (A, B) von Sprachen, wobei A das **Promise-Prädikat** genannt wird. Eine Sprache L heißt **Lösung** für (A, B), falls für alle Eingaben $x \in A$ gilt:*

$$x \in L \Leftrightarrow x \in B.$$

L ist also genau dann eine Lösung für (A, B), wenn $A \cap B \subseteq L \subseteq (A \cap B) \cup \bar{A}$ gilt.

Beispiel 102. *Sei* 1SAT *die Menge aller booleschen Formeln, die höchstens eine erfüllende Belegung haben. Um das Promise-Problem* $(1\text{SAT}, \text{SAT})$ *zu lösen, genügt es, für alle Formeln* $F \in 1\text{SAT}$ *herauszufinden, ob sie erfüllbar sind oder nicht. Somit ist jede Sprache* L *mit* $\text{USAT} \subseteq L \subseteq \text{SAT}$ *eine Lösung für* $(1\text{SAT}, \text{SAT})$*, wobei die Sprache* $\text{USAT} = 1\text{SAT} \cap \text{SAT}$ *alle Formeln enthält, die genau eine erfüllende Belegung haben. Neben* USAT *und* SAT *ist beispielsweise auch* $\oplus$SAT *eine Lösung für* $(1\text{SAT}, \text{SAT})$. ◁

Als nächstes wollen wir zeigen, dass SAT (und damit jedes NP Problem) auf eine beliebige Lösung von $(1\text{SAT}, \text{SAT})$ randomisiert reduzierbar ist.

Definition 103. *Eine Sprache* A *heißt* ***randomisiert reduzierbar*** *auf eine Sprache* B*, falls es eine Funktion* $f \in \mathsf{FL}$ *und Polynome* p, q *gibt, so dass für alle Eingaben* x *gilt:*

$$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow \Pr_{y \in_R \{0,1\}^{p(n)}}[f(x\#y) \in B] \geq 1/q(n), \\ x \notin A &\Rightarrow \Pr_{y \in_R \{0,1\}^{p(n)}}[f(x\#y) \in B] = 0. \end{aligned}$$

Satz 104 (Valiant, Vazirani 1986)**.** SAT *ist auf jede Lösung von* $(1\text{SAT}, \text{SAT})$ *randomisiert reduzierbar.*

Beweis. Sei F eine boolesche Formel über n Variablen $x_1, \ldots, x_n$, wobei wir o.B.d.A. annehmen, dass $F(0^n) = 0$ ist. Für eine Zahl $k \geq 0$ und eine lineare Hashfunktion $h \in \mathit{Lin}(n, n+1)$ mit Matrizendarstellung $A_h = (a_{ij}) \in \{0,1\}^{n \times (n+1)}$ sei $F_{k,h}$ die boolesche Formel

$$F_{k,h} = F \wedge \bigwedge_{i=1}^{\min(k,n+1)} \neg \bigoplus_{a_{ij}=1} x_j,$$

die unter einer Belegung a genau dann wahr wird, wenn $F(a) = 1$ ist und die ersten k Bits von $h(a)$ den Wert 0 haben. Betrachte die Reduktionsfunktion

$$f : F\#y \mapsto F_{k,h},$$

wobei $y \in \{0,1\}^{m+n(n+1)}$ für $m = \lceil \log_2(n+2) \rceil$ die Länge $m+n(n+1)$ hat und die ersten m Bits von y eine Zahl $k \in \{0, \ldots, 2^m - 1\}$ und die restlichen $n(n+1)$ Bits von y eine Matrix $A_h \in \{0,1\}^{n \times (n+1)}$ repräsentieren.

Sei nun L eine Lösung von $(1\text{SAT}, \text{SAT})$ und sei b die Anzahl der erfüllenden Belegungen von F. Im Fall $F \in \text{SAT}$ ist dann $b \in \{1, \cdots, 2^n - 1\}$ und somit $b' := \lfloor \log_2(3b) \rfloor$ in $\{1, \cdots, n+1\}$. Wegen $\text{USAT} \subseteq L$ gilt daher für einen zufällig gewählten String $y = \mathit{bin}_m(k) A_h \in_R \{0,1\}^{m+n(n+1)}$,

$$\begin{aligned} \Pr[f(F\#y) \in L] &\geq \Pr[F_{k,h} \in \text{USAT}] \\ &\geq \underbrace{\Pr[k = b']}_{\geq 2^{-m} > 1/2(n+2)} \underbrace{\Pr[F_{k,h} \in \text{USAT} \,|\, k = b']}_{\geq 2/9 \text{ (nach Lemma 100)}} \\ &\geq 1/9(n+2). \end{aligned}$$

Dagegen gilt im Fall $F \notin \text{SAT}$ wegen $L \subseteq \text{SAT}$,

$$\Pr[f(F\#y) \in L] \leq \Pr[F_{k,h} \in \text{SAT}] = 0. \qquad \blacksquare$$

Korollar 105.

(i) SAT *ist auf* USAT *und* $\oplus$SAT *randomisiert reduzierbar.*

(ii) Falls das Promise-Problem $(1\text{SAT}, \text{SAT})$ *eine Lösung in* BPP *hat, folgt* $\mathsf{NP} \subseteq \mathsf{BPP}$ *(was wiederum* $\mathsf{PH} = \mathsf{BPP}$ *und* $\mathsf{NP} = \mathsf{RP}$ *impliziert, siehe Übungen).*

(iii) Zu jeder balancierten Sprache B *gibt es eine balancierte Sprache* $B' \leq_m^{\mathit{log}} B$*, so dass* $\exists B$ *auf* $\oplus B'$ *randomisiert reduzierbar ist.*

Beweis. (i) Klar, da USAT und $\oplus$SAT Lösungen des Promise-Problems $(1\text{SAT}, \text{SAT})$ sind.

(ii) Sei $A \in \mathsf{BPP}$ eine Lösung von $(1\text{SAT}, \text{SAT})$ und $f \in \mathsf{FL}$ eine randomisierte Reduktion von SAT auf A. Da BPP unter disjunktiven Reduktionen abgeschlossen ist, können wir annehmen, dass

$$\Pr_{z \in_R \{0,1\}^{p(n)}}[f(x\#z) \in A] \geq 5/6$$

für ein Polynom p und alle $x \in \text{SAT}$ gilt. Weiter sei M eine BPPTM mit

$$\Pr[M(y) \neq A(y)] \leq 1/6.$$

Dann gilt $\Pr[M'(x) \neq \text{SAT}(x)] \leq 2/3$, wobei $M'(x)$ zufällig ein $z \in_R \{0,1\}^{p(n)}$ wählt und $M(f(x\#z))$ simuliert.

(iii) Sei B eine q-balancierte Sprache und sei B' die Sprache

$$\{x\#z\#y \,|\, z = bin_m(k)A_h \in \{0,1\}^{m+q(n)(q(n)+1)}, 0 \leq k \leq q(n),$$
$$0^{k+1} \text{ ist Präfix von } h(y) \text{ und } x\#y \in B\},$$

wobei $m = \lceil \log_2(q(n)+1) \rceil$ und $h \in Lin(q(n), q(n)+1)$ ist. Dann gilt $B' \leq_m^{log} B$ und $\exists B$ ist mittels $f : x\#z \mapsto x\#z$ auf jede Lösung des Promise-Problems $(\{x \,|\, \#B'(x) \leq 1\}, \{x \,|\, \#B'(x) \geq 1\})$ randomisiert reduzierbar. ■

11 Interaktive Beweissysteme

In diesem Abschnitt gehen wir folgender Frage nach: Was ist effizient beweisbar? Oder besser: Was ist effizient verifizierbar? Der Aufwand für das Finden eines Beweises wird hierbei bewusst außer Acht gelassen, d.h. wir interessieren uns nur für den Aufwand für das Überprüfen eines Beweises.

Was die Art der Aussagen betrifft, die wir betrachten wollen, so können wir uns o.B.d.A. auf Aussagen der Form „$x \in A$“ beschränken. Denn unabhängig davon, welchen Wahrheitsbegriff wir zu Grunde legen, die Menge aller wahren Aussagen kann immer durch eine Sprache der Form

$$A = \{x \,|\, x \text{ kodiert eine wahre Aussage}\}$$

beschrieben werden.

Beweistheoretische Sicht auf NP

Im klassischen Modell der effizienten Verifizierbarkeit hat ein mächtiger *Prover* P die Aufgabe, zu einer gegebenen Eingabe x einen Beweis y zu finden, dessen Korrektheit ein *Verifier* V in deterministischer Polynomialzeit überprüfen kann. Wie wir bereits wissen, sind genau die Sprachen in der Klasse NP auf diese Weise effizient verifizierbar.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, dieses Modell zu verallgemeinern, ohne die Effizienz des Verifiers aufzugeben.

Frage. *Ermöglicht eine Interaktion zwischen P und V die Verifikation weiterer Sprachen?*

Nein, denn P kann bei Eingabe x gleich zu Beginn alle Fragen von V berechnen und die zugehörigen Antworten an V senden.

Frage. *Sind mehr Sprachen entscheidbar, wenn V sowohl Fragen stellen als auch Zufallszahlen benutzen darf?*

Dann sind genau die Sprachen in PSPACE entscheidbar.

Frage. *Sind mehr Sprachen entscheidbar, wenn V mehrere Prover unabhängig voneinander befragen darf?*

Dann sind genau die Sprachen in NEXP entscheidbar.

Definition 106.

- *Ein Multi-Prover Interactive Proof System (MIPS) besteht aus einer PPTM V (Verifier) und Provern $P_1, \ldots, P_k$, die über unbeschränkte Rechenressourcen verfügen und jeweils ein gemeinsames Kommunikationsband mit V haben. Dabei ist durch ein Protokoll festgelegt, welche Berechnungen von welcher Partei auszuführen sind, und jeder Wechsel zwischen den Parteien kennzeichnet den Beginn einer neuen Runde. Die letzte Runde muss von V ausgeführt werden, wird aber nur gezählt, falls V darin Zufallsbits benutzt.*
- *Ein MIPS $(V, P_1, \ldots, P_k)$, entscheidet eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$, falls für alle $x \in \Sigma^*$ gilt:*

$$x \in A \Rightarrow \Pr[(V, P_1, \ldots, P_k)(x) = 1] \geq 2/3 \qquad \textit{(Vollständigkeit)}$$
$$x \notin A \Rightarrow \forall P_1', \ldots, P_k' : \Pr[(V, P_1', \ldots, P_k')(x) = 1] \leq 1/3 \qquad \textit{(Korrektheit)}$$

- *Ein MIPS mit nur einem Prover heißt IPS.* MIP (IP) *ist die Klasse aller Sprachen, die von einem MIPS (IPS) entschieden werden. Wird die Rundenzahl durch $r(|x|)$ beschränkt, so bezeichnen wir die resultierenden Teilklassen mit* $\mathsf{MIP}[r(n)]$ *und* $\mathsf{IP}[r(n)]$.
- *Ein IPS, bei dem V alle benutzten Zufallszahlen dem Prover preisgibt, heißt Arthur-Merlin Protokoll, wobei der Verifier als Arthur und der Prover als Merlin bezeichnet werden.* $\mathsf{AM}[r(n)]$ ($\mathsf{MA}[r(n)]$) *ist die Klasse aller Sprachen, die von einem Arthur-Merlin Protokoll in höchstens $r(|x|)$ Runden entschieden werden können, wobei Arthur (Merlin) mit der ersten Runde beginnt. Für* $\mathsf{AM}[2]$ *bzw.* $\mathsf{MA}[3]$ *etc. wird auch einfach* AM *bzw.* MAM *etc. geschrieben.*

Die folgenden Eigenschaften folgen direkt aus den Definitionen.

Proposition 107.

- $\mathsf{IP}[0] = \mathsf{AM}[0] = \mathsf{P}$,
- $\mathsf{AM}[1] = \mathsf{BPP}$, $\mathsf{MA}[1] = \mathsf{NP}$,
- $\exists^p \cdot \mathsf{BPP} \subseteq \mathsf{MA}$,
- $\mathsf{AM} = \mathsf{BP} \cdot \mathsf{NP}$,
- $\mathsf{AM}[r] \cup \mathsf{MA}[r] \subseteq \mathsf{IP}[r]$.

Dagegen erfordern folgende Eigenschaften teilweise umfangreiche Beweise.

Satz 108.

- $\mathsf{MA} \subseteq \mathsf{AM}$,
- $\mathsf{IP}[r] \subseteq \mathsf{AM}[r+2]$,
- $\mathsf{IP}[\mathcal{O}(1)] = \mathsf{IP}[2] = \mathsf{AM}$,
- $\mathsf{IP} = \mathsf{PSPACE}$ *und* $\mathsf{MIP} = \mathsf{NEXP}$.

12 Das Graphisomorphieproblem

12.1 Iso- und Automorphismen

In diesem Kapitel wollen wir die Komplexität des Graphisomorphieproblems untersuchen. Hierbei bedeutet es keine Einschränkung, wenn wir voraussetzen, dass beide Graphen dieselbe Knotenmenge besitzen. In diesem Kapitel werden nur Graphen mit einer Knotenmenge der Form $V = [n] := \{1, \ldots, n\}$ betrachtet (n bezeichnet also immer die Knotenzahl). Die Menge aller Permutationen φ auf der Menge $[n]$ wird mit S_n bezeichnet. Für $\varphi(u)$ schreiben wir auch u^φ.

Definition 109. *Für einen Graphen $G = (V, E)$ und eine Permutation $\varphi \in S_n$ sei G^φ der Graph (V, E^φ) mit $E^\varphi = \{\{u^\varphi, v^\varphi\} \,|\, \{u, v\} \in E\}$. φ heißt **Isomorphismus** zwischen zwei Graphen G_1 und G_2, falls gilt*

$$\forall u, v \in V : \{u, v\} \in E_1 \Leftrightarrow \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E_2.$$

*In diesem Fall heißen G_1 und G_2 **isomorph** (in Zeichen $G_1 \cong G_2$). Die Menge $\{\varphi \in S_n \,|\, G_1^\varphi = G_2\}$ aller Isomorphismen zwischen G_1 und G_2 bezeichnen wir mit $Iso(G_1, G_2)$.*

Graphisomorphieproblem (GI):

Gegeben: Zwei Graphen G_1 und G_2.
Gefragt: Sind G_1 und G_2 isomorph?

Es ist leicht zu sehen, dass GI in NP liegt. GI konnte bisher jedoch im Unterschied zu fast allen anderen Problemen in NP weder als NP-vollständig, noch als effizient lösbar (d.h. GI $\in$ P) klassifiziert werden. Auch die Zugehörigkeit von GI zu NP $\cap$ co-NP ist offen. Vor kurzem gelang Babai der Nachweis, dass GI in quasipolynomieller Zeit $2^{(\log n)^{O(1)}}$ entscheidbar ist.

Eng verwandt mit GI ist das Problem, für einen gegebenen Graphen die Existenz eines nichttrivialen Automorphismus' zu entscheiden.

Definition 110. *Eine Permutation $\varphi \in S_n$ heißt **Automorphismus** eines Graphen G (kurz: $\varphi \in Aut(G)$), falls $G^\varphi = G$ ist.*

Da $Aut(G)$ unter Komposition abgeschlossen ist, bildet $Aut(G)$ eine Untergruppe von S_n. Jeder Graph besitzt die Identität id als Automorphismus, welcher als trivial bezeichnet wird.

Graphautomorphieproblem (GA):

Gegeben: Ein Graph G.
Gefragt: Besitzt G einen nichttrivialen Automorphismus?

Lemma 111. *Für jeden Graphen G gilt*

(i) $\|\{H \,|\, H \cong G\}\| = \frac{n!}{\|Aut(G)\|}$,

(ii) $\|\{(H, \pi) \,|\, H \cong G, \pi \in Aut(H)\}\| = n!$.

Beweis.

(i) Wir nennen zwei Permutationen φ und π äquivalent, falls sie G auf denselben Graphen $H = G^\varphi = G^\pi$ abbilden. Wegen

$$G^\varphi = G^\pi \Leftrightarrow \underbrace{(G^\varphi)^{\varphi^{-1}}}_{G} = (G^\pi)^{\varphi^{-1}} \Leftrightarrow \pi\varphi^{-1} \in Aut(G)$$

sind φ und π genau dann äquivalent, wenn sie in der gleichen Nebenklasse von $Aut(G)$ liegen. Die Anzahl der Nebenklassen entspricht somit der Anzahl der zu G isomorphen Graphen. Zudem wissen wir aus der Gruppentheorie, dass die Nebenklassen einer Untergruppe U die gleiche Größe wie U haben und eine Partition der Gesamtgruppe bilden. Also gibt es genau $\frac{n!}{\|Aut(G)\|}$ Nebenklassen.

(ii) Aus (i) folgt sofort

$$\|\{(H,\pi)\,|\,H \cong G, \pi \in Aut(H)\}\| = \sum_{H\cong G} \underbrace{\|Aut(H)\|}_{=\|Aut(G)\|} = n!.$$

■

12.2 GI liegt in co-IP[2]

Betrachte folgendes 2-Runden IPS (V,P) für $\overline{\text{GI}}$.

2-Runden IPS für $\overline{\text{GI}}$

1 **input** Graphen $G_i = (V, E_i)$, $i \in \{1,2\}$, mit $V = \{1,\ldots,n\}$
2 **V:** **guess randomly** $i \in_R \{1,2\}$
3 **guess randomly** $\pi \in_R S_n$
4 $H := G_i^\pi$
5 **$V \to P$:** H
6 **P:** **if** $H \cong G_1$ **then** $j := 1$ **else** $j := 2$
7 **$P \to V$:** j
8 **V:** **if** $i = j$ **then** accept **else** reject

Behauptung 112.

i) $G_1 \ncong G_2 \Rightarrow \Pr[(V,P)(G_1,G_2) = 1] = 1$

ii) $G_1 \cong G_2 \Rightarrow \forall P' : \Pr[(V,P')(G_1,G_2) = 1] \leq \frac{1}{2}$

Beweis. *i)* klar.

ii) Gelte $G_1 \cong G_2$. Sei X die Zufallsvariable, die die Wahl der Zufallszahl i beschreibt, und sei Y die Zufallsvariable, die die Wahl des Zufallsgraphen H beschreibt. Dann ist X auf $\{1,2\}$ gleichverteilt und der Wertebereich von Y ist $W(Y) = \{H\,|\,H \cong G_1\} = \{H\,|\,H \cong G_2\}$. Zudem gilt für jeden Graphen $H \in W(Y)$

$$\Pr[Y = H] = \sum_{i=1,2} \underbrace{\Pr[X=i]}_{1/2} \underbrace{\Pr[Y = H|X = i]}_{=:p_i} = \frac{p_1 + p_2}{2}.$$

Wegen

$$p_i = \frac{\|Iso(G_i, H)\|}{n!} = \frac{\|Aut(G_i)\|}{n!}$$

und $\|Aut(G_1)\| = \|Aut(G_2)\|$ folgt $p_1 = p_2$ und somit auch $\Pr[Y = H|X = i] = \Pr[Y = H]$ für $i = 1,2$. Daher sind X und Y stochastisch unabhängig. Sei nun Z die ZV, die die Antwort j eines beliebigen Provers P' in Zeile 7 des Protokolls beschreibt. Da Z nur von Y (und den beiden Eingabegraphen) abhängt, ist mit Y auch Z von X stochastisch unabhängig. Folglich akzeptiert V mit Wk

$$\begin{aligned}\Pr[X = Z] &= \underbrace{\Pr[X = Z = 1]}_{\Pr[Z=1]/2} + \underbrace{\Pr[X = Z = 2]}_{\Pr[Z=2]/2} \\ &= \Pr[Z \in \{1,2\}]/2 \;\leq\; 1/2.\end{aligned}$$

■

Die Fehlerwahrscheinlichkeit von V im Fall $G_1 \cong G_2$ lässt sich von $1/2$ auf $1/4$ reduzieren, indem das Protokoll zweimal parallel ausgeführt wird (wodurch sich die Anzahl der Runden nicht erhöht).

Die Korrektheit des Protokolls hängt wesentlich von der Geheimhaltung der Zufallszahlen des Verifiers gegenüber dem Prover ab. Wir werden später noch ein 2-Runden IPS für GI mit öffentlichen Zufallszahlen angeben. Interessant ist auch, dass die Laufzeit des Provers polynomiell beschränkt werden kann, falls er Zugriff auf ein GI-Orakel hat. Auch für $\overline{\text{GA}}$ gibt es ein 2-Runden IPS, bei dem der Prover relativ zu einem GA-Orakel polynomielle Laufzeit hat.

2-Runden IPS für $\overline{\text{GA}}$

1 **input** ein Graph $G = (V, E)$ mit $V = \{1,\ldots,n\}$
2 **V:** **guess randomly** $\pi \in_R S_n$
3 $H := G^\pi$
4 **$V \to P$:** H
5 **P:** compute $\varphi \in \mathit{Iso}(G, H)$
6 **$P \to V$:** φ
7 **V:** **if** $\pi = \varphi$ **then** accept **else** reject

Behauptung 113.

i) $G \notin \mathrm{GA} \Rightarrow \Pr[(V,P)(G)=1]=1$

ii) $G \in \mathrm{GA} \Rightarrow \forall P' : \Pr[(V,P')(G)=1] \leq \frac{1}{2}$

Der Beweis ist ähnlich wie bei der vorigen Behauptung. Die Fehlerwahrscheinlichkeit von V lässt sich wieder von $1/2$ auf $1/4$ reduzieren, indem das Protokoll zweimal parallel ausgeführt wird. Auch hier hängt die Korrektheit des Protokolls wesentlich von der Geheimhaltung der Zufallszahlen des Verifiers gegenüber dem Prover ab.

12.3 GI liegt in co-AM

Als nächstes wollen wir zeigen, dass GI fast in co-NP liegt (genauer: $\mathrm{GI} \in \mathsf{BP} \cdot \text{co-NP}$ bzw. $\overline{\mathrm{GI}} \in \mathsf{BP} \cdot \mathsf{NP} = \mathsf{AM}$). Als Konsequenz hiervon ist GI nicht NP-vollständig, außer wenn $\mathsf{PH} = \mathsf{BP} \cdot \mathsf{NP}$ ist. Wir betrachten zunächst folgende Verallgemeinerung des BP-Operators.

Definition 114. *Sei $\mathcal{C}$ eine Sprachklasse. Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ gehört zu $\widetilde{\mathsf{BP}} \cdot \mathcal{C}$, falls Funktionen $g : \Sigma^* \to \mathbb{Q}^+$ in FP und $f \in \# \cdot \mathcal{C}$ existieren, so dass für alle x gilt,*

$$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow f(x) \geq 2g(x), \\ x \notin A &\Rightarrow f(x) \leq g(x). \end{aligned}$$

Es ist klar, dass $\mathsf{BP} \cdot \mathcal{C}$ in $\widetilde{\mathsf{BP}} \cdot \mathcal{C}$ enthalten ist. Ist nämlich $A \in \mathsf{BP} \cdot \mathcal{C}$ mittels einer zweiseitigen p-balancierten Sprache $B \in \mathcal{C}$, so reicht es, für g die Funktion $g(x) = 2^{p(|x|)}/3$ zu wählen. Zudem ist leicht zu sehen, dass NP in $\widetilde{\mathsf{BP}} \cdot \mathsf{P}$ enthalten ist (wähle $g(x) = 1/2$). Daher ist BPP vermutlich echt in $\widetilde{\mathsf{BP}} \cdot \mathsf{P}$ enthalten.

Satz 115. $\mathrm{GI} \in \text{co-}\widetilde{\mathsf{BP}} \cdot \mathsf{NP}$.

Beweis. Seien zwei Graphen $G_i = (V, E_i)$, $i = 1, 2$, mit $V = \{1, \ldots, n\}$ gegeben. Nach Lemma 111 haben die Mengen

$$X(G_i) = \{(H, \pi) \,|\, H \cong G_i, \pi \in Aut(H)\}$$

die Mächtigkeit $\|X(G_i)\| = n!$ und somit folgt

$$\begin{aligned} G_1 \ncong G_2 &\Rightarrow X(G_1) \cap X(G_2) = \emptyset &&\Rightarrow \#B(\langle G_1, G_2\rangle) = 2n!, \\ G_1 \cong G_2 &\Rightarrow X(G_1) = X(G_2) &&\Rightarrow \#B(\langle G_1, G_2\rangle) = n!, \end{aligned}$$

wobei die Sprache

$$B = \{\langle G_1, G_2\rangle \# \langle H, \pi\rangle \,|\, (H, \pi) \in X(G_1) \cup X(G_2)\}$$

in NP entscheidbar ist. Da zudem die Funktion $g(\langle G_1, G_2\rangle) = n!$ in FP berechenbar ist, folgt $\mathrm{GI} \in \text{co-}\widetilde{\mathsf{BP}} \cdot \mathsf{NP}$. ∎

Satz 116. $\widetilde{\mathsf{BP}} \cdot \mathsf{NP} \subseteq \mathsf{BP} \cdot \mathsf{NP}$.

Beweis. Sei L eine Sprache in $\widetilde{\mathsf{BP}} \cdot \mathsf{NP}$. Dann existieren Funktionen $g(x) > 0$ in FP und $f(x)$ in #NP mit

$$\begin{aligned} x \in L &\Rightarrow f(x) \geq 2g(x), \\ x \notin L &\Rightarrow f(x) \leq g(x). \end{aligned}$$

Zu f existieren ein Polynom p und eine p-balancierte NP-Sprache A mit

$$f(x) = \#A(x) = \|\{y \in \{0,1\}^{p(|x|)} \,|\, x\#y \in A\}\|,$$

wobei wir o.B.d.A. annehmen, dass A keine Wörter der Form $x\#0^m$ enthält. Für eine Eingabe x sei

$$B_x = \{y_1 \ldots y_5 \,|\, \forall i = 1, \ldots, 5 : |y_i| = p(|x|) \text{ und } x\#y_i \in A\}.$$

Wegen $\|B_x\| = f(x)^5$ enthält B_x für alle $x \in L$ mindestens $2^5 g(x)^5$ und für alle $x \notin L$ höchstens $g(x)^5$ Strings der Länge $m(x) = 5p(|x|)$. Setze nun $k(x) = \lceil \log_2(2^2 g(x)^5) \rceil$ und betrachte die NP-Sprache

$$B' = \{x\#h \,|\, h \in Lin(m(x), k(x)) \text{ und } \exists y \in B_x : h(y) = 0^{k(x)}\}.$$

Dann ist für eine zufällig aus $Lin(m(x), k(x))$ gewählte Funktion h das Ereignis $x\#h \in B'$ gleichbedeutend mit dem Ereignis $S \geq 1$, wobei

$$S = \sum_{y \in B_x} S_y \text{ und } S_y = \begin{cases} 1, & h(y) = 0^{k(x)}, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist. Daher reicht es zu zeigen, dass das Ereignis $S \geq 1$ im Fall $x \in L$ mindestens mit Wahrscheinlichkeit $2/3$ und im Fall $x \notin L$ höchstens mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ eintritt. Nach Lemma 100 sind die Indikatorvariablen S_y paarweise stochastisch unabhängig und daher gilt $Var(S) = \sum_{y \in B_x} Var(S_y)$ (siehe Übungen), was

$$Var(S) = \|B_x\| 2^{-k(x)}(1 - 2^{-k(x)}) < 2^{-k(x)}\|B_x\| = E(S)$$

impliziert. Für $x \in L$ ist $\|B_x\| \geq 2^5 g(x)^5$ und somit $E(S) \geq 2^{-k(x)} 2^5 g(x)^5 > 4$. Daher folgt mit Tschebyscheff

$$\Pr[S = 0] \leq \Pr[|S - E(S)| \geq E(S)] \leq \frac{Var(S)}{E(S)^2} < \frac{1}{E(S)} < \frac{1}{4},$$

was $\Pr[S \geq 1] \geq 2/3$ impliziert. Dagegen enthält B_x im Fall $x \notin L$ höchstens $g(x)^5$ Strings, was

$$\Pr[S \geq 1] \leq \sum_{y \in B_x} \Pr[S_y = 1] \leq 2^{-k(x)} g(x)^5 \leq 1/4 < 1/3$$

impliziert. ■

Korollar 117. GI *ist nicht* NP*-vollständig, außer wenn* PH = BP·NP *ist.*

Wir geben abschließend noch das aus den Beweisen der Sätze 115 und 116 resultierende AM-Protokoll für $\overline{\text{GI}}$ an:

AM-Protokoll für $\overline{\text{GI}}$

input Graphen $G_i = (V, E_i)$, $i \in \{1, 2\}$, mit $V = \{1, \ldots, n\}$
V: $k := \lceil \log_2(2^2 (n!)^5) \rceil$
  $m := 5|\langle G_1, \pi \rangle|$ (mit $\pi \in S_n$)
  guess randomly $h \in_R Lin(m, k)$
V → P: h
P: compute $H_1, \ldots, H_5, \pi_1, \ldots, \pi_5, \varphi_1, \ldots, \varphi_5$ mit
  $(*)$ $\begin{cases} \varphi_i \in \mathit{Iso}(G_1, H_i) \cup \mathit{Iso}(G_2, H_i), \pi_i \in \mathit{Aut}(H_i) \text{ für} \\ i = 1, \ldots, 5 \text{ und } h(\langle H_1, \pi_1 \rangle \cdots \langle H_5, \pi_5 \rangle) = 0^k \end{cases}$
P → V: $H_1, \ldots, H_5, \pi_1, \ldots, \pi_5, \varphi_1, \ldots, \varphi_5$
V: **if** $(*)$ **then accept else reject**

12.4 Zero-Knowledge Protokoll für GI

Definition 118.

- *Das Transkript* $View_{V,P_1,\ldots,P_k}(x)$ *eines MIPS* $(V, P_1, \ldots, P_k)$ *bei Eingabe* x *ist die ZV, die sämtliche während der Berechnung von* $(V, P_1, \ldots, P_k)(x)$ *ausgetauschten Nachrichten angibt.*
- *Ein MIPS* $(V, P_1, \ldots, P_k)$ *für* A *hat die perfekte Zero-Knowledge Eigenschaft (kurz PZK), wenn es für jede PPTM* V' *einen probabilistischen Simulator* S *mit im Erwartunswert polynomiell beschränkter Laufzeit gibt, so dass für alle Eingaben* $x \in A$ *die ZVen* $S(x)$ *und* $View_{V',P_1,\ldots,P_k}(x)$ *identisch verteilt sind.*

Betrachte folgendes 3-Runden IPS für GI:

3-Runden IPS für GI mit PZK-Eigenschaft

input Graphen $G_i = (V, E_i)$, $i \in \{1, 2\}$, mit $V = \{1, \ldots, n\}$
P: **guess randomly** $i \in_R \{1, 2\}$
  guess randomly $\pi \in_R S_n$
  $H := G_i^\pi$
P → V: H
V: **guess randomly** $j \in_R \{1, 2\}$
V → P: j

```
8  P: if j = i then φ := π
9       if j = 3 − i then
10        compute τ ∈ Iso(G_j, G_i); φ := τπ
11      if j ∉ {1, 2} then φ := id
12 P → V: φ
13 V: if G_j^φ = H then accept else reject
```

Man beachte, dass der Prover P effizient implementierbar ist, falls ihm ein Isomorphismus zwischen G_1 und G_2 als Zusatzeingabe gegeben wird.

Behauptung 119.

i) $G_1 \cong G_2 \Rightarrow \Pr[(V,P)(G_1,G_2)=1] = 1$

ii) $G_1 \ncong G_2 \Rightarrow \forall P' : \Pr[(V,P')(G_1,G_2)=1] \leq \frac{1}{2}$

Um zu zeigen, dass das Protokoll die perfekte Zero-Knowledge Eigenschaft besitzt, müssen wir für jeden probabilistischen Verifier V' mit polynomieller Laufzeit einen probabilistischen Simulator S mit im Erwartunswert polynomieller Laufzeit angeben, der die zwischen P und V' ausgetauschten Nachrichten mit den gleichen Wahrscheinlichkeiten erzeugt wie sie bei der Interaktion zwischen P und V' auftreten, wobei V' zusätzlich einen beliebigen String $z \in \{0,1\}^*$ als Eingabe erhält.

Simulator für obiges PZK-Protokoll

```
1 input Graphen G_1, G_2
2   repeat
3     guess randomly i ∈_R {1, 2}
4     guess randomly π ∈_R S_n
5     H := G_i^π
6     simuliere V' bei Eingabe (G_1, G_2) und
        erster Prover-Nachricht H
7   until V' antwortet mit einer Nachricht j ≠ 3 − i
8    if j ≠ i then π := id
9 output (H, j, π)
```

Die Fehlerwahrscheinlichkeit von V im Fall $G_1 \cong G_2$ lässt sich von $1/2$ auf $1/4$ reduzieren, indem das Protokoll zweimal hintereinander ausgeführt wird. Man beachte, dass bei einer parallelen Ausführung die PZK-Eigenschaft verloren gehen kann.