Übungsblatt 12

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 16. Februar 2017

Aufgabe 51 Zeigen Sie: ***mündlich***

(a) USat ist in der Klasse $\mathsf{D}^p = \{A \setminus B \mid A, B \in \mathsf{NP}\}$ enthalten und hart für $\mathsf{UP} \cup \mathsf{co\text{-}NP}$.
(b) $\#\mathsf{P}^A = \#\mathsf{P} \Leftrightarrow A \in \mathsf{UP} \cap \mathsf{co\text{-}UP}$.
(c) $\exists^p \cdot \mathsf{L} = \mathsf{NL} \Leftrightarrow \mathsf{PH} = \mathsf{NL}$.

Aufgabe 52 ***mündlich***

Eine k**-Färbung** eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine Abbildung $c\colon V \to \{1, \ldots, k\}$. Ein Isomorphismus φ zwischen zwei gefärbten Graphen (G_1, c_1) und (G_2, c_2) darf einen Knoten u mit Farbe $c_1(u) = i$ nur auf Knoten v mit derselben Farbe $c_2(v) = i$ abbilden. Bezeichne ColGI das Graphenisomorphieproblem für gefärbte Graphen. Zeigen Sie:

(a) ColGI, DirGI und GI sind logspace-äquivalent, d.h. es gilt ColGI $\equiv_m^{log}$ ColGI $\equiv_m^{log}$ GI.
(b) Das Graphenisomorphieproblem für Bäume liegt in P.

Aufgabe 53 Sei $A \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache mit $\# \notin \Sigma$. ***mündlich***

Eine Funktion $f : (\Sigma \cup \{\#\})^* \to \Sigma^*$ heißt *unbeschränkte Und-Funktion* (kurz $\wedge$*-Funktion*) für A, falls für alle $x_1, \ldots, x_k \in \Sigma^*$ gilt:

$$f(x_1\# \cdots \#x_k) \in A \quad \Leftrightarrow \quad \forall i = 1, \ldots, k : x_i \in A.$$

Im Fall $k = 2$ nennen wir f eine *Und-Funktion* (kurz $\wedge_2$*-Funktion*). Die Begriffe der *(unbeschränkten) Oder-Funktion* und der *Nicht-Funktion* (kurz $\neg$*-Funktion*) sind analog definiert. f heißt *linear*, falls $|f(w)| = \mathcal{O}(|w|)$ ist. Zeigen Sie:

(a) Sat, $\oplus$Sat und GI haben lineare $\wedge_2$- und $\vee_2$-Funktionen in FL.
(b) GA hat eine lineare $\vee_2$-Funktion in FL.
(c) $\oplus$Sat hat eine $\neg$-Funktion in FL.
(d) Falls A eine lineare $\wedge_2$-Funktion (bzw. $\vee_2$-Funktion) in FP hat, so hat A auch eine $\wedge$-Funktion (bzw. $\vee$-Funktion) in FP.

Aufgabe 54 ***10 Punkte***

Sei C eine unter $\leq_m^{log}$-Reduktionen abgeschlossene Sprachklasse und sei A ein C-vollständiges Problem. Zeigen Sie:

(a) C ist genau dann unter Durchschnitt abgeschlossen, wenn A eine $\wedge_2$-Funktion in FL hat.
(b) NP, $\mathsf{co\text{-}NP}$ und $\mathsf{NP} \cap \mathsf{co\text{-}NP}$ (sowie alle Stufen von PH) sind unter Schnitt und Vereinigung abgeschlossen.
(c) $\mathsf{NP} \cup \mathsf{co\text{-}NP}$ ist nicht unter Schnitt (oder Vereinigung) abgeschlossen, außer wenn $\mathsf{NP} = \mathsf{co\text{-}NP}$ ist.