Übungsblatt 11

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 9. Februar 2017

Aufgabe 47 ***mündlich***

Eine Sprache $S \subseteq \Sigma^*$ heißt *sparse* (kurz $S \in \mathsf{SPARSE}$), falls für ein Polynom p und alle n gilt: $\|S \cap \Sigma^n\| \le p(n)$. Sprachen $T \subseteq \{1\}^*$ heißen *tally* (kurz $T \in \mathsf{TALLY}$). Zeigen Sie:

$$\mathsf{P}/\text{poly} = \mathsf{P}(\mathsf{SPARSE}) = \mathsf{P}(\mathsf{TALLY}).$$

Aufgabe 48 ***mündlich***

Eine Funktion g heißt *parsimonious reduzierbar* auf eine Funktion h (kurz $g \le_{par} h^p$), falls eine Funktion $f \in \mathsf{FL}$ existiert, so dass für alle x gilt: $g(x) = h(f(x))$.

(a) Zeigen Sie, dass folgende auf der Menge aller booleschen Formeln (mit Junktoren $\neg$, $\wedge$ und $\vee$) definierte Funktion vollständig für $\#\mathsf{P}$ unter parsimonious Reduktionen ist:

$$\#\textsc{Sat} : F(x_1, \cdots, x_n) \mapsto \|\{a \in \{0,1\}^n \mid F(a) = 1\}\|$$

(b) Folgern Sie, dass $\oplus\textsc{Sat}$ $\oplus\mathsf{P}$-vollständig ist.

(c) Zeigen Sie, dass Teil (a) für jede vollständige Basis von Junktoren (wie z. B. $\{\wedge, \neg\}$, $\{\overline{\wedge}\}$ (NAND), $\{\rightarrow, 0\}$ oder $\{\wedge, \oplus, 1\}$) gilt.

Aufgabe 49 Zeigen Sie: ***mündlich***

(a) $\mathsf{P}^{\textsc{Sat}[k]} \subseteq \mathsf{P}_{\|}^{\textsc{Sat}[2^k-1]}$,

(b) $\mathsf{P}_{\|}^{\textsc{Sat}[2^k-1]} \subseteq \mathsf{P}^{\textsc{Sat}[k+1]}$,

(c) $\mathsf{P}_{\|}^{\textsc{Sat}[2^k-1]} = \mathsf{P}^{\textsc{Sat}[k]}$,

(d) $\mathsf{P}_{\|}^{\mathsf{NP}} = \mathsf{P}^{\mathsf{NP}[\mathcal{O}(\log n)]}$,

(e) $\mathsf{FP}_{\|}^{\mathsf{NP}} = \mathsf{FP}^{\mathsf{NP}[\mathcal{O}(\log n)]} \Rightarrow \mathsf{NP} = \mathsf{RP}$.

Hinweis: Überlegen Sie, warum eine erfüllende Belegung für eine Formel in $\textsc{USat}$ in $\mathsf{FP}_{\|}^{\mathsf{NP}}$ berechenbar ist, und benutzen Sie den Satz von Valiant und Vazirani.

Aufgabe 50 Zeigen Sie: ***10 Punkte***

(a) Es gibt ein Orakel A mit $\mathsf{NP}^A \ne \mathsf{co\text{-}NP}^A$.

(b) Es gibt ein Orakel B mit $\mathsf{NL}^B \ne \mathsf{co\text{-}NL}^B$.

(c) Es gibt ein Orakel C mit $C \in \mathsf{L}^{d(C)} \setminus \mathsf{NL}^{s(C)}$.

(d) Es gilt $\mathsf{L} = \mathsf{NL} \Leftrightarrow \forall A : \mathsf{L}^{d(A)} = \mathsf{NL}^{d(A)} \Leftrightarrow \forall A : \mathsf{L}^{s(A)} = \mathsf{NL}^{s(A)}$.